PRENTICE HALL

CÁLCULO

APLICADO

A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA

Arya- Lardner- Ibarra

ALWAYS LEARNING

PEARSON

CÁLCULO APLICADO
a la Administración y a la Economía

Primera edición

Jagdish C. Arya
Robin W. Lardner
Departament of Mathematics, Simon Fraser University

Con la colaboración de

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac-México Norte

ADAPTACIÓN:
Alfonso Bustamante Arias
Jefe Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad ICESI, Cali-Colombia

TRADUCCIÓN Y REVISIÓN TÉCNICA:
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac-México Norte

PRENTICE HALL

Colombia • México • Argentina • Brasil • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

ARYA, JAGDISH C. y LARDNER, ROBIN W.

**Cálculo aplicado a la administración
y a la economía. Primera edición**

PEARSON EDUCACIÓN, Colombia, 2011

ISBN: 978-958-699-207-7
Área: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 376

Adaptation of the authorized translation from the English language edition, entitled *Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences, Fourth Edition, by Jagdish C. Arya y Robin W. Lardner,* published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 1993. All rights reserved.
ISBN 0-13-564287-6

Adaptación de la traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada *Mathematical analysis for business, economics, and the life and social sciences, cuarta edición, por Jagdish C. Arya y Robin W. Lardner,* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 1993. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición adaptada de la quinta edición en español Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.
ISBN: 978-607-442-302-0
Editor: Orlando Fernández Palma
e-mail: orlando.fernandez@pearson.com

Edición en inglés:
Editor-in-chief: Tim Bozik
Senior editor: Steve Conmy
Executive editor: Priscilla McGeehon
Senior managing editor: Jeanne Hoeting
Production editor: Nicholas Romanelli
Design director: Florence Dara Silverman
Interior design: Patricia McGowan
Prepress buyer: Paula Massenaro
Manufacturing buyer: Lori Bulwin

PRIMERA EDICIÓN VERSIÓN IMPRESA, 2011
PRIMERA EDICIÓN E-BOOK, 2011

D.R. © 2011 por Pearson Educación Colombia
North Point III
Cra. 7a. No. 156-68, pisos 26 y 27.
Bogotá, Colombia.

Cámara Colombiana del Libro. Reg. Núm. 99645.

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

ISBN VERSIÓN IMPRESA 978-958-699-207-7
ISBN E-BOOK 978-958-699-208-4

PRIMERA IMPRESIÓN

PRENTICE HALL www.pearsoneducacion.net ISBN 978-958-699-207-7

ALWAYS LEARNING PEARSON

A

Niki y Shanti

Contenido

Prefacio

En esta versión se conservó y reforzó la orientación de las aplicaciones a la administración y la economía, sin descuidar aplicaciones generales a otras áreas, tales como ciencias sociales, biológicas y físicas, a fin de que la obra pueda seguir siendo útil a una amplia gama de estudiantes.

Las aplicaciones referidas a estas áreas se han integrado por completo en el desarrollo de la obra; a veces una aplicación particular se utiliza para motivar ciertos conceptos matemáticos; en otros casos, determinado resultado matemático se aplica, ya sea de inmediato o en una sección subsecuente, a un problema concreto, digamos, de análisis empresarial. Por lo general, las aplicaciones se ofrecen en estrecha cercanía con el tratamiento del concepto matemático específico en cuestión. No obstante, cabe aclarar que las matemáticas de esta obra se presentan inicialmente en un estilo "limpio", es decir, fuera del contexto de cualquier aplicación particular. Sólo después de establecer cada resultado en un nivel puramente algebraico, se aplica éste a un problema práctico.

Aunque se conservaron las características principales del libro, que han hecho de esta obra una de las preferidas por muchos profesores y alumnos, los cambios más importantes realizados son los siguientes.

- Se revisaron y actualizaron las lecturas de inicio de capítulo. En ellas se presentan casos prácticos probados en el salón de clases.
- Para que la obra tuviera una mayor unidad, ahora en *todos* los capítulos se presenta un caso práctico como lectura inicial. Una vez que se estudia el material del mismo, la solución del caso se presenta al término del capítulo, y se concluye con algunas preguntas que tienen la finalidad de estimular el intercambio de ideas entre profesores y alumnos, así como conducir a un análisis más profundo del tema, o bien, sirven de introducción para el material que se estudiará en los siguientes capítulos.

- Prácticamente todos los ejercicios de la sección *Problemas de repaso del capítulo* se actualizaron y, al igual que con los ejercicios de cada sección, la solución de los problemas con número impar se incluye al final del texto.
- En varios ejercicios de la sección *Problemas de repaso del capítulo* se presentan conceptos nuevos, cuyo estudio amplía lo expuesto en el texto. Se recomienda resolver estos problemas con la finalidad de ampliar la teoría expuesta; sin embargo, si se omite la resolución de éstos, se puede continuar con los siguientes temas sin mayor dificultad.
- Con base en los excelentes comentarios y observaciones de muchos usuarios de esta obra, se hizo una revisión cuidadosa de todo el libro, con la finalidad de enmendar las erratas de la versión anterior.

Como antes, el libro está orientado a la enseñanza de las aplicaciones y a la utilización de las matemáticas más que a las matemáticas puras. No se hace hincapié en las demostraciones de los teoremas ni se da a éstas un lugar predominante en el desarrollo del texto. Por lo regular, después de enunciar un teorema, procedemos a ilustrarlo y a analizar su importancia con varios ejemplos, y luego se da la demostración. Las demostraciones más difíciles se han omitido por completo.

Este relativo desinterés por los pormenores matemáticos da a los estudiantes el tiempo necesario para mejorar sus habilidades en el uso de diversas técnicas. Según nuestra experiencia, los estudiantes que aprenden a dominar las técnicas por lo común desarrollan una intuición razonablemente clara del proceso, y la carencia de un completo rigor matemático no constituye una grave deficiencia.

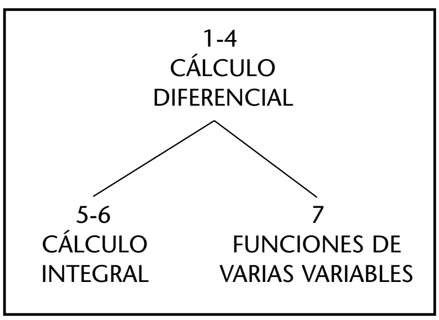
Distribución del contenido

Los capítulos 1 al 4 tratan el cálculo diferencial en una variable. Los primeros dos temas de estos dos capítulos explican las antiderivadas y se ofrece una opción sobre cómo enfocar la integración. Después de exponer el método de sustitución, de inmediato se presentan las tablas de integrales, de modo que el profesor que desee pasar rápidamente a las aplicaciones pueda hacerlo.

Por otro lado, si el profesor desea dedicar más tiempo a las técnicas de integración, puede posponer la sección sobre las tablas y tratar primero la sección final del capítulo 5. El segundo de estos capítulos estudia la integral definida y sus aplicaciones al cálculo de áreas, análisis gerencial y ecuaciones diferenciales.

El capítulo final constituye una introducción al cálculo diferencial de funciones de variables.

Seleccionando capítulos y/o secciones de capítulos en forma apropiada, el libro puede adaptarse a un curso de cálculo, si se seleccionan los capítulos pertinentes. El siguiente diagrama ilustra la estructura del libro en cuanto a requisitos previos de conocimientos.



Por último, queremos manifestar nuestro agradecimiento al incontable número de personas que nos han hecho invaluables comentarios sobre las versiones anteriores del texto. Los cambios realizados en esta *nueva edición* están significativamente influidos por esta información. Consideramos de gran valor las aportaciones de nuestros usuarios, por lo cual, reiteramos la invitación para que nos hagan llegar sus comentarios o sugerencias a la dirección de correo electrónico *editorialmx@pearsoned.com*

CAPÍTULO 1

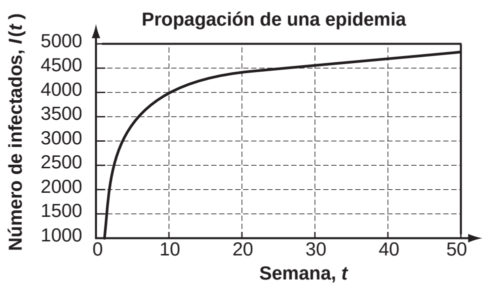
La derivada

PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

Con frecuencia se estudian modelos matemáticos como aproximaciones a la realidad. Estos modelos se pueden analizar desde el punto de vista matemático y para obtener resultados con respecto al fenómeno que modelan. Así, por ejemplo, se han estudiado diferentes funciones que "gobiernan" el movimiento de proyectiles, el crecimiento de una deuda, la ganancia por el alquiler de viviendas, etc. Como un ejemplo, una aplicación del cálculo la observamos en el problema al que se enfrenta la doctora Socorro cuando una epidemia se propoga en una población y, gracias a estudios anteriores en otras poblaciones similares, sabe que el número de infectados, I, después de t semanas, está dado por la fórmula

$$I(t) = 10{,}000 - 4500(t^{-1/2} + 1), \text{ para } t \geq 1$$

La gráfica de esta función de la semana 1 a la 50 se muestra a continuación:



La gráfica de la función muestra que el número de individuos al inicio crece rápido; sin embargo, alrededor de la semana 8 o 10, aunque sigue creciendo, el crecimiento empieza a ser más lento. Ahora bien, con base en el modelo que se propone para este fenómeno, la doctora Socorro tendría respuesta a preguntas de su interés, como las siguientes:

a) ¿Cuántos casos se tienen en la semana 1?
b) ¿Cuál es el aumento de casos de la semana 4 a la semana 6?
c) En promedio, ¿qué tan rápido se propaga la enfermedad de las semanas 1 a 2?
d) ¿Qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 9?
e) ¿Qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 50?

Con los temas que se abordan en este capítulo usted responderá las preguntas anteriores.

TEMARIO

■ 1-1 INCREMENTOS Y TASAS

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad, cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original. Los siguientes ejemplos ilustran tales situaciones.

1. El cambio en el costo total de operación de una planta que resultan de cada unidad adicional producida.

2. El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad (por ejemplo, \$1) en el precio.

3. El cambio en el producto nacional bruto de un país con cada año que pasa.

DEFINICIÓN Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces, el cambio en el valor de x, que es $x_2 - x_1$, se denomina el incremento de x y se denota por Δx.

Usamos la letra griega Δ (delta) para denotar un cambio o incremento de cualquier variable.

Δx denota el cambio de la variable x

Δp indica el cambio de la variable p

Δq denota el cambio de la variable q

Sea y una variable que depende de x tal que $y = f(x)$ está definida para todo valor de x entre x_1 y x_2. Cuando $x = x_1$, y tiene el valor $y_1 = f(x_1)$. De manera similar, cuando $x = x_2$, y tiene el valor $y_2 = f(x_2)$. Así, el incremento de y es

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ &= f(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por

$$q = 500(150 - p)$$

Calcule el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120¢ a 130¢ por litro.

Solución Aquí, p es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de p es $p_1 = 120$ y el segundo valor es $p_2 = 130$. El incremento de p es

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500(150 - p_1) = 500(150 - 120) = 15{,}000$$
$$q_2 = 500(150 - p_2) = 500(150 - 130) = 10{,}000$$

En consecuencia, el incremento de q está dado por

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 10{,}000 - 15{,}000 = -5000$$

☛ **1.** Dada $y = 2 - 3x + x^2$ calcule Δx y Δy si
a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

El incremento de q mide el crecimiento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5000 litros por día si el precio se incrementa de 120 a 130 centavos. ☛ **1**

Sea P el punto (x_1, y_1) y Q el punto (x_2, y_2), ambos situados en la gráfica de la función $y = f(x)$. (Véase la figura 1). Entonces, el incremento Δx es igual a la distancia horizontal de P a Q, mientras que Δy es igual a la distancia vertical de P a Q. En otras palabras, Δx es el *recorrido* y Δy es la *elevación* de P a Q.

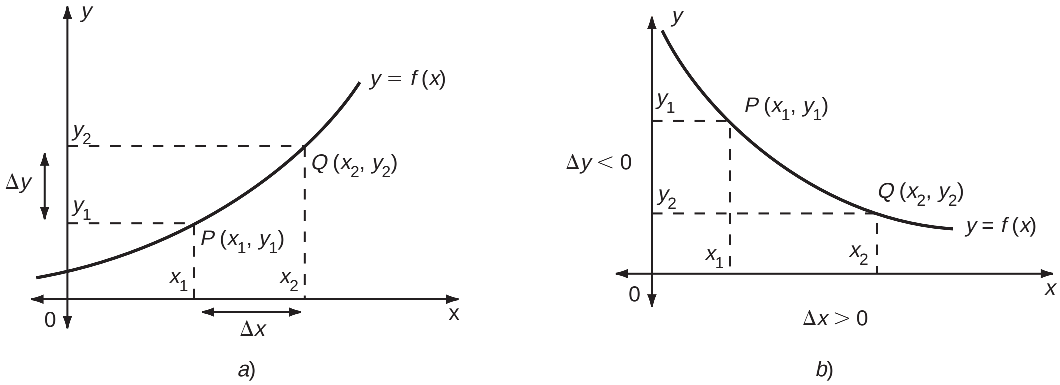


FIGURA 1

En el caso ilustrado en la parte *a*) de la figura 1, tanto Δx como Δy son positivos. Es posible que Δx, Δy o ambos sean negativos y aún Δy puede ser cero. Un ejemplo típico de un caso en que $\Delta x > 0$ y $\Delta y < 0$ se ilustra en la parte *b*) de la figura 1.

En algunas de las aplicaciones que abordaremos más adelante, nos convendrá pensar el incremento Δx como muy pequeño (esto es, sólo desearemos considerar pequeños cambios en la variable independiente). Se sobreentiende, por antonomasia, que Δx significa un cambio pequeño de x más bien que sólo un incremento. Sin embargo, en esta sección no se pondrá alguna restricción en el tamaño de los incrementos considerados; pueden ser pequeños o relativamente grandes.

Resolviendo la ecuación $\Delta x = x_2 - x_1$ para x_2, tenemos $x_2 = x_1 + \Delta x$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Respuesta *a*) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 0$
b) $\Delta x = 2$, $\Delta y = -6$

Dado que x_1 puede ser cualquier valor de x, suprimimos el subíndice y escribimos

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

En forma alternativa, dado que $f(x) = y$, podemos escribir

$$\boxed{y + \Delta y = f(x + \Delta x)}$$

EJEMPLO 2 Dada $f(x) = x^2$, calcule Δy si $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$.

Solución Sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de Δy,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + 0.2) - f(1) = f(1.2) - f(1)\\ &= (1.2)^2 - (1)^2 = 1.44 - 1 = 0.44\end{aligned}$$

Así que, un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en y de 0.44. Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 2.

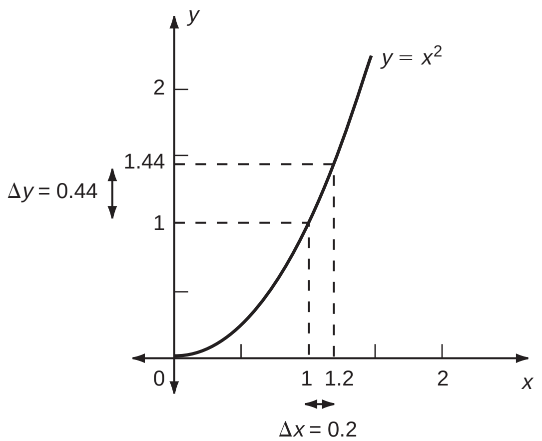


FIGURA 2

EJEMPLO 3 En el caso de la función $y = x^2$, determine Δy cuando $x = 1$ para cualquier incremento Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - (1)^2\\ &= (1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2) - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Puesto que la expresión de Δy del ejemplo 3 es válida para todos los incrementos Δx, podemos resolver el ejemplo 2 sustituyendo $\Delta x = 0.2$ en el resultado. De esta manera,

$$\Delta y = 2(0.2) + (0.2)^2 = 0.4 + 0.04 = 0.44$$

como antes.

☛ **2.** Calcule Δy para valores generales de x y Δx, si
a) $y = 3 - 2x$; *b*) $y = 4x - x^2$

EJEMPLO 4 De nuevo, considere la función $y = x^2$ y determine Δy para valores generales de x y Δx.

Solución $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

Nuevamente es claro que recuperamos el resultado del ejemplo 3 sustituyendo $x = 1$ en la expresión del ejemplo 4. ☛ **2**

Cuando se establecen en términos absolutos (como en los ejemplos anteriores), los cambios de la variable dependiente contienen menos información de la que tendrían si se establecieran en términos relativos. Por ejemplo, enunciados absolutos como, "la temperatura descendió 10°C" o "las ganancias se incrementarán en \$3000" son menos informativos que proposiciones relativas como, "la temperatura descendió 10°C en las últimas 5 horas" o " las ganancias se incrementarán en 3000 dólares si se venden 60 unidades extra". De estos últimos enunciados, no sólo sabemos qué tanto cambia la variable (temperatura o ganancias), sino que también podemos calcular la tasa promedio en que está cambiando con respecto a una segunda variable. Por tanto, el descenso promedio de la temperatura durante las últimas 6 horas es $\frac{10}{5} = 2$°C por hora; y el incremento promedio de las ganancias si 60 unidades más se venden es de $\frac{3000}{60} = 50$ dólares por unidad.

DEFINICIÓN La **tasa de cambio promedio** de una función f sobre un intervalo de x a $x + \Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observación Es necesario que el intervalo completo de x a $x + \Delta x$ pertenezca al dominio de f.

Gráficamente, si P es el punto $(x, f(x))$ y Q es el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es la elevación y Δx es el recorrido de P a Q. Por la definición de pendiente, podemos decir que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es igual a la pendiente de la secante PQ que une los puntos P y Q sobre la gráfica de $y = f(x)$. (Véase la figura 3). Estos puntos corresponden a los valores x y $x + \Delta x$ de la variable independiente.

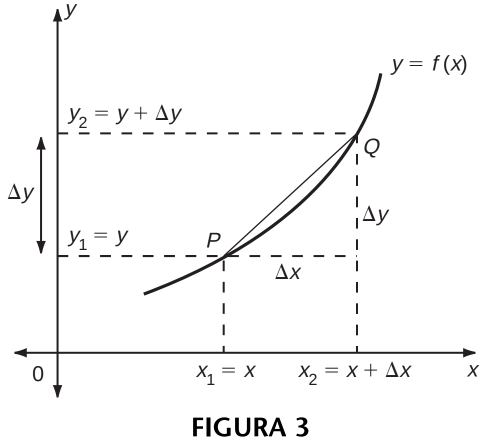


FIGURA 3

Respuesta *a*) $\Delta y = -2\Delta x$
b) $\Delta y = 4\Delta x - 2x\Delta x - (\Delta x)^2$

EJEMPLO 5 ***(Costo, ingresos y utilidades)*** Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x) = 20{,}000 + 40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x) = 100x - 0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana; pero está considerando incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcule los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determine la tasa de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extra producidas.

Solución El primer valor de x es 3100 y $x + \Delta x = 3200$:

$$\begin{aligned}
\Delta C &= C(x + \Delta x) - C(x) \\
&= C(3200) - C(3100) \\
&= [20{,}000 + 40(3200)] - [20{,}000 + 40(3100)] \\
&= 148{,}000 - 144{,}000 = 4000 \\
\Delta R &= R(x + \Delta x) - R(x) \\
&= R(3200) - R(3100) \\
&= [100(3200) - 0.01(3200)^2] - [100(3100) - 0.01(3\,100)^2] \\
&= 217{,}600 - 213{,}900 = 3700
\end{aligned}$$

De modo que los costos se incrementan en \$4000 con el incremento dado en la producción, mientras que los ingresos se incrementan en \$3700.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en \$300. Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$\begin{aligned}
P(x) &= R(x) - C(x) \\
&= 100x - 0.01x^2 - (20{,}000 + 40x) \\
&= 60x - 0.01x^2 - 20{,}000
\end{aligned}$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(3200) - P(3100) \\
&= [60(3200) - 0.01(3200)^2 - 20{,}000] - [60(3100) - 0.01(3100)^2 - 20{,}000] \\
&= 69{,}600 - 69{,}900 = -300
\end{aligned}$$

Así pues, la utilidad decrece en \$300. La tasa de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3$$

en donde $\Delta x = 3200 - 3100 = 100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de \$3 por tonelada con el incremento dado en la producción. ☛ **3**

☛ **3.** Dada $y = x^2 + 2x$, calcule la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo
a) de $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
b) de $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Respuesta *a*) 6; *b*) 3

EJEMPLO 6 Cuando cualquier objeto se suelta a partir del resposo y se le permite caer libremente bajo la fuerza de gravedad, la distancia s (en pies) recorrida en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$s(t) = 16t^2$$

Determine la velocidad promedio del objeto durante los siguientes intervalos de tiempo:

a) El intervalo de tiempo de 3 a 5 segundos.

b) El cuarto segundo (de $t = 3$ a $t = 4$ segundos).

c) El intervalo de tiempo entre los instantes 3 y $3\frac{1}{2}$ segundos.

d) El lapso de t a $t + \Delta t$

Solución La velocidad promedio de cualquier móvil es igual a la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo empleado. Durante el lapso de t a $t + \Delta t$, la distancia recorrida es el incremento Δs, y así la velocidad promedio es la razón $\Delta s/\Delta t$.

a) Aquí $t = 3$ y $t + \Delta t = 5$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3}$$

$$= \frac{16(5^2) - 16(3^2)}{2} = \frac{400 - 144}{2} = \frac{256}{2} = 128$$

Por consiguiente, durante el lapso de $t = 3$ a $t = 5$, el móvil cae una distancia de 256 pies con una velocidad promedio de 128 pies/segundo.

b) Ahora, $t = 3$ y $t + \Delta t = 4$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3}$$

$$= \frac{16(4^2) - 16(3^2)}{1} = 256 - 144 = 112$$

El móvil tiene una velocidad promedio de 112 pies/segundo durante el cuarto segundo de caída.

c) En este caso, $t = 3$ y $\Delta t = 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{16(3\frac{1}{2})^2 - 16(3)^2}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{196 - 144}{\frac{1}{2}} = \frac{52}{\frac{1}{2}} = 104$$

Así pues, el móvil tiene una velocidad promedio de 104 pies/segundo durante el lapso de 3 a $3\frac{1}{2}$ segundos.

☛ **4.** Si la distancia recorrida en t segundos es $s = 96t - 16t^2$, calcule la velocidad promedio durante

a) el intervalo de $t = 0$ a $t = 3$

b) el intervalo de $t = 2$ a $t = 4$

c) el intervalo de $t = 3$ a $t = 5$

d) el intervalo de t a $t + \Delta t$

d) En el caso general,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{16(t + \Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{16[t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] - 16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{32t \cdot \Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

la cual es la velocidad promedio durante el lapso de t a $t + \Delta t$

Todos los resultados particulares del ejemplo 6 pueden obtenerse como casos especiales de la parte *d*) poniendo los valores apropiados de t y Δt. Por ejemplo, el resultado de la parte *a*) se obtiene haciendo $t = 3$ y $\Delta t = 2$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t = 32(3) + 16(2) = 96 + 32 = 128$$ ☛ **4**

Respuesta *a*) 48 *b*) 0 *c*) –32 *d*) $96 - 32t - 16\Delta t$

EJERCICIOS 1-1

(1-8) Determine los incrementos de las siguientes funciones para los intervalos dados.

1. $f(x) = 2x + 7;\ x = 3,\ \Delta x = 0.2$

2. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5;\ x = 2,\ \Delta x = 0.5$

3. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2};\ x = 1,\ \Delta x = 2$

4. $f(t) = \dfrac{900}{t};\ t = 25,\ \Delta t = 5$

5. $p(t) = 2000 + \dfrac{500}{1 + t^2};\ t = 2,\ \Delta t = 1$

6. $h(x) = ax^2 + bx + c;\ x$ a $x + \Delta x$

7. $F(x) = x + \dfrac{2}{x};\ x$ a $x + \Delta x$

8. $G(t) = 300 + \dfrac{5}{t + 1};\ t$ a $t + \Delta t$

(9-16) Calcule la tasa de cambio promedio de cada función en el intervalo dado.

9. $f(x) = 3 - 7x;\ x = 2,\ \Delta x = 0.5$

10. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1;\ x = 3,\ \Delta x = 0.2$

11. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3};\ x = 2,\ \Delta x = 0.5$

12. $h(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x};\ x = 5,\ \Delta x = 0.3$

13. $f(t) = \sqrt{4 + t};\ t = 5,\ \Delta t = 1.24$

14. $F(x) = \dfrac{3}{x};\ x$ a $x + \Delta x$

15. $G(t) = t^3 + t;\ t = a$ a $a + h$

16. $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1};\ x$ a $x + \Delta x$

17. *(Crecimiento y variación de la población)* El tamaño de la población de cierto centro minero al tiempo t (medido en años) está dado por

$$p(t) = 10{,}000 + 1000t - 120t^2$$

Determine la tasa de crecimiento promedio entre cada par de tiempos.

a) $t = 3$ y $t = 5$ años

b) $t = 3$ y $t = 4$ años

c) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{2}$ años

d) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{4}$ años

e) t y $t + \Delta t$ años

18. *(Función de costo)* Un fabricante descubre que el costo de producir x artículos está dado por

$$C = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

a) Determine el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 50 a 60.

b) Calcule el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 50 a 60 unidades.

19. *(Función de costo)* Con respecto a la función de costo del ejercicio 18, calcule el costo promedio por unidad adicional en incremento de la producción de 90 a 100 unidades.

20. *(Relación de demanda)* Cuando el precio de cierto artículo es igual a p, el número de artículos que pueden venderse por semana (esto es, la demanda) está dado por la fórmula

$$x = \frac{1000}{\sqrt{p} + 1}$$

Determine el incremento de la demanda cuando el precio se incrementa de \$1 a \$2.25.

21. *(Función de ingreso)* En el caso de la función de demanda del ejercicio 20:

a) Determine el incremento en el ingreso bruto cuando el precio del artículo se incrementa de \$4 a \$6.25.

b) Calcule el incremento promedio en el ingreso total por dólar de incremento en el precio que ocurre con este incremento en p.

22. *(Crecimiento del PNB)* Durante el periodo de 1950 a 1970, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula $I = 5 + 0.1x + 0.01x^2$ en miles de millones de dólares. (Aquí la variable x se utiliza para medir los años, con $x = 0$ siendo 1970 y $x = 20$ siendo 1990). Determine el crecimiento promedio en el PNB por año entre 1975 y 1980.

23. *(Televidentes)* Después de que la televisión se introdujo en cierto país en desarrollo, la proporción de jefes de familia que poseían televisor t años después se encontró que estaba dada por la fórmula $p = 1 - e^{-0.1t}$.

a) Determine el crecimiento en p entre $t = 3$ y $t = 6$ y

b) Determine la tasa de cambio promedio de p por año.

24. *(Crecimiento de la población)* La población de cierta isla como función del tiempo t se encuentra que está dada por la fórmula

$$y = \frac{20{,}000}{1 + 6(2)^{-0.1t}}$$

a) El incremento de y entre $t = 10$ y $t = 30$

b) El crecimiento promedio de la población por año durante este periodo.

25. *(Proyectiles)* Una partícula que se lanza hacia arriba con una velocidad de 100 pies/segundo alcanza una altura s después de t segundos, en donde $s = 100t - 16t^2$. Calcule la velocidad ascendente promedio en cada caso.

a) Entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos

b) Entre $t = 3$ y $t = 5$ segundos

c) Entre t y $t + \Delta t$

26. *(Función de ingreso)* El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por

$$R = f(x) = 500x - 2x^2$$

Determine la tasa promedio de ingresos por unidad extra cuando el número de unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 100 a 120.

27. *(Medicina)* Cuando se le da cierta droga a una persona, su reacción se mide mediante los cambios en la presión de la sangre, cambios de temperatura, variación de pulso y otros cambios fisiológicos. La fuerza S de la reacción depende de la cantidad x de droga administrada y está dada por

$$S(x) = x^2(5 - x)$$

Determine el promedio de la razón de cambio en la fuerza de reacción cuando la cantidad de unidades de droga cambia de $x = 1$ a $x = 3$.

28. *(Agricultura)* El número de libras de duraznos P de buena calidad, producidos por un árbol promedio en cierto huerto depende, del número de libras de insecticida x con el cual el árbol fue rociado, de acuerdo con la siguiente fórmula

$$P = 300 - \frac{100}{1 + x}$$

Calcule el promedio de la razón de incremento de P cuando x cambia de 0 a 3.

■ 1-2 LÍMITES

En el ejemplo 6 de la sección 1-1, estudiamos las velocidades promedio de un móvil que cae durante varios intervalos de tiempo diferentes. Sin embargo, en muchos ejemplos tanto de la ciencia como de la vida diaria, la velocidad promedio de un móvil no da la información de mayor importancia. Por ejemplo, si una persona que viaja en un automóvil choca contra una pared de concreto, no es la velocidad promedio sino la velocidad en el *instante de colisión* la que determina si la persona sobrevivirá al accidente.

¿Qué entendemos por la velocidad de un móvil en cierto instante (o *velocidad instantánea*, como se denomina regularmente)? La mayoría de la gente aceptaría que en una idea como la de velocidad instantánea (es precisamente la cantidad que el velocímetro del automóvil mide) pero la definición de velocidad instantánea presenta algunas dificultades. La velocidad se define como la distancia recorrida en cierto intervalo dividida entre su duración. Pero si nos interesa la velocidad en cierto instante particular, deberíamos considerar un intervalo de duración cero. Sin embargo, la distancia recorrida durante tal intervalo sería cero, y obtendríamos: Velocidad = Distancia ÷ Tiempo = 0 ÷ 0, un valor sin significado.

Con la finalidad de definir la velocidad instantánea de un móvil en cierto instante t, procederemos de la siguiente manera. Durante cualquier intervalo con una duración entre t y $t + \Delta t$, se recorre un incremento en la distancia Δs. La velocidad promedio es $\Delta s/\Delta t$. Imaginemos ahora que el incremento Δt se hace cada vez más pequeño, de modo que el intervalo correspondiente es muy pequeño. Así, es razonable suponer que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ sobre tal intervalo muy pequeño estará muy cerca de la velocidad instantánea en el instante t. Más aún, cuanto más corto sea el intervalo Δt, mejor aproximará la velocidad promedio a la velocidad instantánea. De hecho, podemos imaginar que a Δt se le permite hacerse arbitrariamente cercano a cero, de modo que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ puede hacerse cada vez más parecida a la velocidad instantánea.

En el ejemplo 6 de la sección 1-1, vimos que la velocidad promedio durante el intervalo de t a $t + \Delta t$, de una particula que cae bajo la acción de la gravedad está dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

Haciendo $t = 3$, obtenemos la velocidad promedio durante un intervalo de duración Δt después de 3 segundos de caída.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 96 + 16\Delta t$$

Algunos valores de esta velocidad aparecen en la tabla 1 para diferentes valores del incremento Δt. Por ejemplo, la velocidad promedio entre 3 y 3.1 segundos se obtiene haciendo $\Delta t = 0.1$: $\Delta s/\Delta t = 96 + 16(0.1) = 96 + 1.6 = 97.6$ pies/segundo.

TABLA 1

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	104	100	97.6	96.16	96.016

A partir de los valores de la tabla 1 es claro que a medida que Δt se hace más y más pequeño, la velocidad promedio se acerca cada vez más a 96 pies/segundo. Es razonable concluir en consecuencia que 96 pies/segundo es la velocidad instantánea en $t = 3$.

Este ejemplo es característico de una clase completa de problemas en que necesitamos examinar el comportamiento de cierta función a medida que su argumento se acerca cada vez más a un valor particular. En este caso, nos interesa el comportamiento de la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero. En general, puede interesarnos el comportamiento de una función $f(x)$ de una variable x cuando x se aproxima a un valor particular, digamos c. Debe entenderse que x toma una sucesión de valores que están arbitrariamente cerca del valor c, si bien x nunca puede ser igual a c. (Obsérvese que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ no está definida si $\Delta t = 0$. Sólo podemos considerar un pequeño, muy pequeño valor de Δt, pero nunca un valor cero). Mediante $x \to c$ indicaremos que x se *aproxima* a c; por ejemplo, escribiríamos $\Delta t \to 0$ en el ejemplo anterior.

Examinemos lo que sucede con la función $f(x) = 2x + 3$ cuando $x \to 1$. Permitiremos de que x tome la sucesión de valores 0.8, 0.9, 0.99, 0.999 y 0.9999, que sin duda se acercan cada vez más a 1. Los valores correspondientes de $f(x)$ están dados en la tabla 2.

TABLA 2

x	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$	4.6	4.8	4.98	4.998	4.9998

A partir de esta tabla es claro que a medida que x se acerca a 1, $f(x)$ está cada vez más cerca de 5. Escribimos entonces $f(x) \to 5$ cuando $x \to 1$.

Los valores de x considerados en la tabla 2 son menores que 1. En tal caso, decimos que x se aproxima a 1 por abajo. Podemos considerar también el caso alternativo en que x se aproxima a 1 por arriba; es decir, x toma una sucesión de valores que están cada vez más cerca de 1 pero siempre son mayores que 1. Por ejemplo, podríamos permitir que x tomara la sucesión de valores 1.5, 1.1, 1.01, 1.001 y 1.0001. Los valores correspondientes de $f(x)$ están dados en la tabla 3.

TABLA 3

x	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	6	5.2	5.02	5.002	5.0002

Otra vez, es claro que $f(x)$ está cada vez más cerca de 5 cuando x se aproxima a 1 por arriba.

En consecuencia, cuando x se aproxima a 1 por abajo o por arriba, $f(x) = 2x + 3$ se acerca a 5. Decimos que el *límite* (o *valor límite*) de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es igual a 5. Esto se denota así:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$$

Damos ahora la definición formal de límite.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función que está definida para todos los valores de x cerca de c, con la excepción posible de c mismo. *Se dice que* L *es el límite de* f(x) *cuando* x *tiende a* c, *si la diferencia entre* f(x) *y* L *puede hacerse tan pequeña como se desee con sólo restringir a* x *a estar lo suficientemente cerca de* c. En símbolos, escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \to L \text{ cuando } x \to c$$

En nuestro ejemplo anterior, $f(x) = 2x + 3$, $c = 1$ y $L = 5$. Podemos hacer que el valor de la función $2x + 3$ esté tan cercano a 5 como se desee eligiendo x lo suficientemente cercano a 1. ☛ **5**

☛ **5.** Por el cálculo de unos cuantos valores, como en las tablas 2 y 3, evalúe los límites.

a) $\lim_{x \to 3} (2x + 3)$ *b*) $\lim_{x \to -1} 2x^2$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Respuesta *a*) 9 *b*) 2 *c*) 0

En este ejemplo, el valor límite de la función $f(x) = 2x + 3$ cuando $x \to 1$ puede obtenerse con sólo sustituir $x = 1$ en la fórmula $2x + 3$ que define la función. La pregunta que surge es si los límites siempre pueden encontrarse sustituyendo el valor de x en la expresión dada. La respuesta a esta pregunta es: algunas veces, pero no siempre. El análisis de la velocidad instantánea de la página 450 ya ilustró este punto. En términos de límites, la velocidad instantánea se definió como

$$\text{Velocidad instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

y si tratamos de sustituir de forma directa $\Delta t = 0$, obtenemos 0/0.

El ejemplo 1 presenta otro caso en que la sustitución directa no funciona.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$, evalúe $\lim_{x \to 3} f(x)$

Solución Si sustituimos $x = 3$ en $f(x)$, obtenemos $\frac{0}{0}$, y concluimos que $f(x)$ no está definida en $x = 3$. Sin embargo, $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe, dado que podemos escribir

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

La eliminación del factor $x - 3$ es válida siempre que $x \neq 3$, y, por supuesto, no es válida si $x = 3$. Es fácil advertir que cuando x tiende a 3, la función $x + 3$ está cada vez más cerca del valor 6. (Facilmente se puede convencer de esto calculando algunos valores como en las tablas 2 y 3). En consecuencia,

☛ **6.** Después del ejemplo 1, evalúe

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$ ☛ **6**

Al evaluar $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, es legítimo dividir numerador y denominador entre un factor común $x - c$, como lo hicimos en el ejemplo 1, a pesar de que cuando $x = c$, estos factores son cero. Esto se debe a que *el límite involucra el comportamiento de* f(x) *cerca de* $x = c$, *pero no se refiere al valor de* f *en* x = c. Mientras $x \neq c$, los factores del tipo $x - c$ pueden cancelarse. De hecho, el ejemplo 1 ilustró un caso en el cual $f(x)$ no estaba definida en $x = c$ y aún $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existió.

Estudiemos la idea del límite desde el punto de vista de la gráfica de la función considerada. En primer término volvamos a nuestro ejemplo inicial en que $f(x) = 2x + 3$. La gráfica de esta función es una línea recta con pendiente 2 y ordenada al origen 3. Cuando $x = 1$, $y = 5$.

Considere cualquier sucesión de puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ sobre la gráfica (véase la figura 4) tales que las coordenadas x de los puntos se acercan a 1. Es claro que los puntos mismos deben estar cerca del punto (1, 5) de la gráfica, y sus coordenadas y se aproximan al valor límite 5. Esto corresponde a nuestra proposición anterior de que $\lim\limits_{x\to 1} (2x + 3) = 5$.

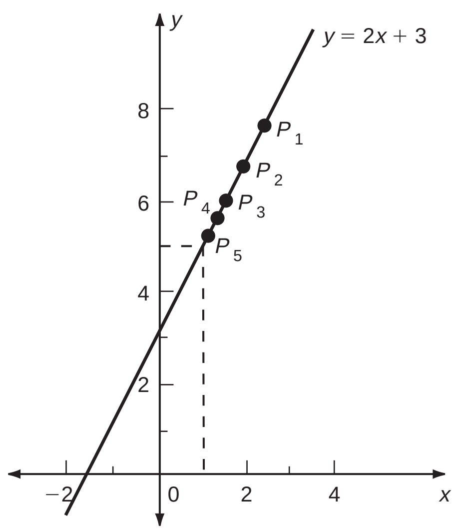


FIGURA 4

El ejemplo $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ es un poco diferente. Vimos antes que si $x \neq 3$, podemos escribir $f(x) = x + 3$. De modo que esta función también tiene una línea recta como gráfica, con pendiente 1 y ordenada al origen 3. Sin embargo, $f(x)$ no está definida en $x = 3$, por lo que el punto (3, 6) no pertenece a la gráfica. Este hecho se indica en la figura 5 usando un pequeño círculo en este punto sobre la línea recta. Otra vez, si consideramos una sucesión de puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ sobre la

Respuesta *a*) 4 *b*) $-\frac{1}{2}$

gráfica con coordenadas x aproximándose a 3, entonces los puntos mismos deben acercarse al punto (3, 6), a pesar de que este punto no pertenece a la gráfica. Así, a pesar de que $f(3)$ no existe, el límite de $f(x)$ cuando $x \to 3$ existe y es igual a 6.

En el primero de estos dos ejemplos, tenemos una función $f(x) = 2x + 3$ para la cual el límite cuando $x \to 1$ existe y es igual al valor de la función en $x = 1$. En el segundo ejemplo, tenemos una función $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ tal que el límite cuando $x \to 3$ existe, pero este límite no es igual a $f(3)$ (de hecho, $f(3)$ no existe en este caso). La primera función se dice que es *continua* en $x = 1$; la segunda función es *discontinua* en $x = 3$. Informalmente, una función es continua en $x = c$ si su gráfica pasa a través del valor de x sin un salto o ruptura. Por ejemplo, la gráfica de la figura 5 no pasa por el valor de $x = 3$ sin una ruptura porque el punto (3, 6) no forma parte de la gráfica. Más formalmente, tenemos la siguiente definición:

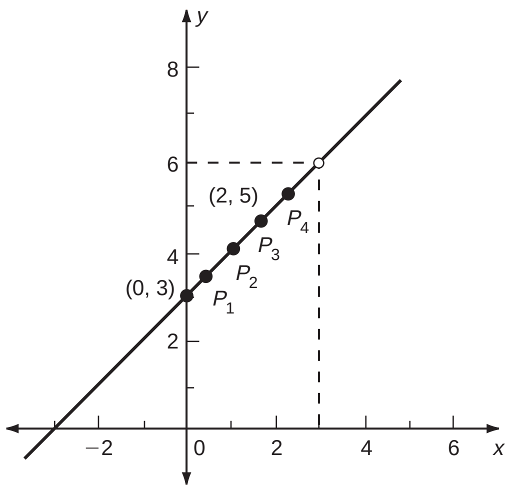


FIGURA 5

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es *continua* en $x = c$ si tanto $f(c)$ como $\lim_{x \to c} f(x)$ existen y son iguales.

Analizaremos funciones continuas y discontinuas con mayor detalle en la sección 1-6.

El cálculo de los valores límites de funciones en casos más complicados descansa en varios teoremas que se refieren a límites. Establecemos ahora estos teoremas e ilustraremos su aplicación con varios ejemplos, pero no daremos demostraciones de ellos.

TEOREMA 1 Si m, b y c son tres constantes cualesquiera, entonces,

$$\boxed{\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b}$$

☛ **7.** Utilizando los teoremas 1 y 2, evalúe los límites siguientes:
a) $\lim_{x\to 3} (2x + 3)^2$ *b*) $\lim_{x\to 4} 2\sqrt{x}$
c) $\lim_{x\to 1} \frac{4}{x + 1}$

Respuesta *a*) 81 *b*) 4 *c*) 2

Observemos que la función $y = mx + b$ tiene como gráfica una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Cuando $x = c$, y siempre está definida y $y = mc + b$. Cuando x tiende a c, el punto (x, y) sobre la gráfica de esta función se acerca cada vez más al punto $(c, mc + b)$. Esto es, el valor de y está cada vez más cerca de $mc + b$, como se estableció en el teorema.

EJEMPLO 2

a) Tomando $m = 2$, $b = 3$ y $c = 1$, obtenemos el resultado

$$\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

que ya dimos antes.

b) Ahora con $m = 1$, $b = 3$ y $c = 3$, tenemos que

$$\lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

reproduciendo otra vez un resultado ya obtenido.

TEOREMA 2

a) $\lim_{x\to c} bf(x) = b \lim_{x\to c} f(x)$

b) $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$ si $[f(x)]^n$ está definida en x cercano a $x = c$

EJEMPLO 3

a)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} x^2 &= [\lim_{x\to 3} x]^2 && \text{(por teorema 2(b))} \\ &= 3^2 && \text{(por teorema 1)} \\ &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} 5(2x + 3)^{-1} &= 5 \lim_{x\to 1} (2x + 3)^{-1} && \text{(por teorema 2(a))} \\ &= 5[\lim_{x\to 1} (2x + 3)]^{-1} && \text{(por teorema 2(b))} \\ &= 5[2(1) + 3]^{-1} && \text{(por el teorema 1)} \\ &= 5(5)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 9)^3}{12(x - 3)^3} &= \frac{1}{12} \lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)^3 && \text{(por teorema 2(a))} \\ &= \frac{1}{12}\left[\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)\right]^3 && \text{(por el teorema 2(b))} \\ &= \frac{1}{12}(6)^3 && \text{(por el resultado del ejemplo 1)} \\ &= 18 \end{aligned}$$
☛ **7**

☛ **8.** Utilizando los teoremas 1, 2 y 3, evalúe los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} [(x+3)(1-x)]$

b) $\lim_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{3-x}{x^3+2}}$

c) $\lim_{x\to 2} (x+2x^{-1})$

Respuesta *a*) –12 *b*) 2 *c*) 3

TEOREMA 3

a) $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

b) $\lim_{x\to c} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

c) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)][\lim_{x\to c} g(x)]$

d) $\lim_{x\to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{[\lim_{x\to c} f(x)]}{[\lim_{x\to c} g(x)]}$

con tal de que existan los límites del lado derecho y, en el caso *d*), el denominador del lado derecho sea distinto de cero.

EJEMPLO 4

a) $\lim_{x\to 3} (x^2+2x) = \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x$ (por teorema 3(a))

$= 3^2 + 2(3)$ (por ejemplo 3(a)

$= 9 + 6 = 15$ y teorema 1)

b) $\lim_{x\to -1} \left(2x^3 - \dfrac{3}{x-1}\right) = \lim_{x\to -1} (2x^3) - \lim_{x\to -1} \left(\dfrac{3}{x-1}\right)$ (por teorema 3(b))

$= 2\lim_{x\to -1} x^3 - 3\lim_{x\to -1} (x-1)^{-1}$ (por teorema 2(a))

$= 2[\lim_{x\to -1} x]^3 - 3[\lim_{x\to -1} (x-1)]^{-1}$ (por teorema 2(b))

$= 2(-1)^3 - 3(-1-1)^{-1}$ (por teorema 1)

$= -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-1)(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x-1) \lim_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)$ (por teorema 3(c))

$= \lim_{x\to 3} (x-1) \lim_{x\to 3} (x+3)$

$= (3-1)(3+3) = 12$ (por teorema 1)

d) $\lim_{x\to -2} \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \dfrac{\lim_{x\to -2} x^2}{\lim_{x\to -2} (x-1)}$ (por teorema 3(d))

$= \dfrac{\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2}{(-2-1)}$ (por teorema 2(b) y 1)

$= \dfrac{(-2)^2}{-3}$ (por teorema 1)

$= -\frac{4}{3}$ ☛ **8**

☛ **9.** Evalúe los siguientes límites por medio de sustitución del valor límite de x, siempre que eso sea válido:

a) $\lim_{x\to 3} [(x + 3)(1 - x)]$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ *c*) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

Respuesta *a*) -12 *b*) La sustitución no se permite *c*) 0 *d*) el límite no existe.

Sin duda, el lector habrá notado que en la mayoría de estos ejemplos, el valor límite de la función considerada pudo obtenerse con la simple sustitución del valor límite de x en la función dada. Este método de sustitución siempre producirá la respuesta correcta cuando la función cuyo límite se está evaluando sea continua. Esto se sigue directamente de la definición de función continua. Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero. De modo que en el caso de una función racional, siempre podemos evaluar un valor límite por sustitución con tal de que el resultado después de la sustitución sea un número bien definido y no uno de la forma $\frac{0}{0}$ o constante/0. Esta misma observación se aplica a funciones algebraicas de x a condición de que estén definidas en algún intervalo que incluya el valor a que tiende x. ☛ **9**

En los ejemplos que siguen, determinaremos límites por sustitución. Sin embargo, recomendamos al lector que haga un buen número de ejercicios usando los teoremas anteriores en la forma ilustrada por los ejemplos anteriores. La razón de esto es que nos encontraremos casos en los últimos capítulos en que la utilización de los teoremas desempeña una parte esencial y los límites no podrán evaluarse por sustitución. (Véase los ejercicios 47 y 48 como un ejemplo). Sólo después de haber dominado la aplicación de los teoremas deberá adoptar el lector el método de sustitución como un medio de evaluar límites.

Puede suceder que al sustituir $x = c$ en $f(x)$, obtengamos un resultado del tipo constante/0. Por ejemplo, suponga que tratamos de evaluar $\lim_{x\to 0} (1/x)$. Al sustituir $x = 0$, obtendríamos el resultado $1/0$, que no está definido. En tal caso, diríamos que *el límite no existe*. La función $1/x$ se hace indefinidamente grande cuando x se acerca a cero, y no se aproxima a algún valor límite. Esto puede advertirse de la tabla 4, en que aparece una serie de valores de $1/x$ cuando x toma una sucesión de valores más y más pequeños. Es claro que los valores correspondientes de $1/x$ se hacen cada vez más grandes y no pueden aproximarse a algún valor límite finito.

TABLA 4

x	1	0.5	0.1	0.02	0.002	0.0002
$\frac{1}{x}$	1	2	10	50	500	5000

Otro caso muy importante que puede surgir es el de obtener el resultado $0/0$, que está indefinido, al sustituir $x = c$ en $f(x)$. A menudo, límites de esta clase pueden evaluarse cancelando factores del tipo $(x - c)$ del numerador y denominador de fracciones que ocurran en $f(x)$. Esta técnica se ilustró ya en esta sección y se darán otros ejemplos ahora.

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to -1} f(x)$ en el caso de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} & (x \neq -1) \\ 0 & (x = -1) \end{cases}$$

Solución Haciendo $x = -1$ en la fórmula válida para $f(x)$ cuando $x \neq -1$, tenemos

$$\frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

En consecuencia, factorizamos numerador y denominador y cancelamos el factor $x + 1$ antes de sustituir $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{-1 + 2}{1 -(-1)} = \frac{1}{2}$$

El hecho de que $f(-1) = 0$ es irrelevante para el límite. (Recuerde que el valor del límite está determinado por el comportamiento de la función cerca del punto límite c, pero no está influido en absoluto por el valor de f en c).

☛ **10.** Después de los ejemplos 5 y 6, evalúe los límites

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{2 - x}}{x - 1}$

c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2 - \sqrt{8 - x}}$

EJEMPLO 6 Determine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

Solución Cuando 0 sustituye a x, obtenemos

$$\frac{\sqrt{1 + 0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

En este caso, no podemos factorizar el numerador directamente para obtener el factor x que es necesario con el objetivo de cancelar la x del denominador. Superamos esta dificultad racionalizando el numerador, que se logra multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{1 + x} + 1)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1 + x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x) - 1}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

☛ **10**

Obsérvese que en estos ejemplos, el límite final se evaluó por sustitución. En realidad, los teoremas sobre límites fundamentan este procedimiento de sustitución.

Respuesta *a*) -4 *b*) $\frac{1}{2}$ *c*) 20

EJERCICIOS 1-2

(1-30) Evalúe los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 + 7x - 1)$

2. $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2 + 3x + 1)$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+1}{x+3}$

5. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2+11}}$

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

14. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

17. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

18. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

20. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

***21.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

***22.** $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+5x+7}{x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$

30. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

(31-36) Calcule $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, en donde $f(x)$ y c se dan abajo.

31. $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & \text{para } x \neq 2 \\ 5 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

32. $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+1 & \text{para } x \neq 1 \\ 7 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{para } x \neq 2 \\ 3 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{para } x \neq -3 \\ -5 & \text{para } x = -3 \end{cases}; \quad c = -3$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{para } x \neq 9 \\ 7 & \text{para } x = 9 \end{cases}; \quad c = 9$

(37-41) Las funciones $f(x)$ y los valores de a están dados abajo. Evalúe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

en cada caso.

37. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad a = 1$

38. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, \quad a = 2$

39. $f(x) = x^2 - 1, \quad a = 0$

40. $f(x) = x^2 + x + 1, \quad a = x$

41. $f(x) = 2x^2 + 5x + 1, \quad a = x$

42. Una partícula cae del reposo bajo la acción de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad instantánea después de $1\frac{1}{2}$ segundos?

43. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/segundo. La distancia recorrida en pies después de t segundos está dada por la fórmula $s = 40t - 16t^2$. Determine la velocidad instantánea:

a) Después de 1 segundo   *b*) Después de 2 segundos

44. En el ejercicio 43, calcule la velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué ocurre cuando $t = \frac{5}{4}$? ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{5}{2}$?

45. En este ejercicio, con su calculadora evalúe la función

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

en $x = 1.2$, 1.1, 1.05, 1.01, 1.005 y 1.001. Demuestre que el $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{3}$. ¿Se acercan sus valores calculados a este límite?

46. Use una calculadora para evaluar

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

para $x = 0.9$, 0.99, 0.999 y 0.9999 y para $x = 1.1.$, 1.01, 1.001 y 1.0001. Pruebe que $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$. ¿Se acercan los valores calculados a este límite?

47. Use una calculadora para evaluar la función

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

para $x = 0.1$, 0.01, 0.001, 0.0001 y 0.00001. ¿Están los valores calculados cada vez más cerca de algún número? ¿Cuánto cree que vale $\lim_{x \to 0} f(x)$?

48. Repita el ejercicio 45 con la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

¿A qué piensa que sea igual $\lim_{x \to 1} f(x)$?

■ 1-3 LA DERIVADA

En la sección 1-2, vimos cómo la definición de velocidad instantánea de un móvil nos conduce de manera natural a un proceso de límite. La velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ se calcula, en primer término, para un lapso de duración entre t y $t + \Delta t$, y luego se calcula su valor límite cuando $\Delta t \to 0$. Podríamos describir $\Delta s/\Delta t$ como la tasa de cambio promedio de la posición s con respecto al tiempo, y su límite es la tasa de cambio promedio de s con respecto a t.

Ahora bien, existen muchos ejemplos de procesos que se desarrollan en el tiempo y podemos dar definiciones correspondientes de la tasa de cambio instantánea de las variables asociadas.

EJEMPLO 1 ***(Crecimiento de la población)*** Durante el periodo de 10 años de 1970 a 1980, se encontró que la población de cierto país estaba dada por la fórmula

$$P(t) = 1 + 0.03t + 0.001t^2$$

donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1970. Calcule la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1975.

Solución Queremos la tasa de crecimiento en $t = 5$. El incremento de P entre $t = 5$ y $t = 5 + \Delta t$ es

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(5 + \Delta t) - P(5) \\
&= [1 + 0.03(5 + \Delta t) + 0.001(5 + \Delta t)^2] - [1 + 0.3(5) + 0.001(5)^2] \\
&= 1 + 0.15 + 0.03\,\Delta t + 0.001(25 + 10\,\Delta t + (\Delta t)^2) \\
&\quad -[1 + 0.15 + 0.001(25)] \\
&= 0.04\,\Delta t + 0.001\,(\Delta t)^2
\end{aligned}$$

La tasa de crecimiento promedio durante este intervalo de tiempo está dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 0.04 + 0.001\ \Delta t$$

Para obtener la tasa de crecimiento instantánea, debemos tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [0.04 + 0.001\ \Delta t] = 0.04$$

☛ **11.** En el ejemplo 1, encuentre la tasa de crecimiento instantánea cuando
a) $t = 0$ *b*) $t = 10$

Así, al inicio de 1975, la población de la ciudad estaba creciendo a una tasa de 0.04 millones anualmente (esto es, 40,000 por año). ☛ **11**

La tasa de cambio instantánea de una función tal como la del ejemplo 1 es un caso de lo que llamamos la *derivada* de una función. Daremos ahora una definición formal de la derivada.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función dada. La **derivada de *y* con respecto a *x***, denotada por dy/dx, se define por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

o bien,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

con tal de que este límite exista.

A la derivada también se le da el nombre de **coeficiente diferencial** y la operación de calcular la derivada de una función se denomina **diferenciación**.

Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que f es **diferenciable** en tal punto.

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x también se denota por uno de los siguientes símbolos:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(f), \quad y', \quad f'(x), \quad D_x y, \quad D_x f$$

Cada una de estas notaciones indica exactamente lo mismo que dy/dx.

Observación dy/dx representa un solo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades dy y dx. Con la finalidad de ampliar la notación, note que dy/dx indica la derivada de y con respecto a x si y es una función de la variable independiente x; dC/dq denota la derivada de C con respecto a q si C es una función de la variable independiente q; dx/du indica la derivada de x con respecto a u si x es una función de la variable independiente u. De la definición,

Respuesta *a*) 0.03 *b*) 0.05

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dC}{dq} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u}$$

Con el propósito de calcular la derivada dy/dx, procedemos de la siguiente manera:

1. Calculamos $y = f(x)$ y $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2. Restamos la primera cantidad de la segunda a fin de obtener Δy y simplificamos el resultado.

3. Dividimos Δy entre Δx y entonces tomamos el límite de la expresión resultante cuando $\Delta x \to 0$.

El valor de dy/dx depende de la elección de x. Esto se enfatiza cuando utilizamos la notación $f'(x)$, la cual indica que la derivada $f'(x)$ es una función de x. El valor de la derivada en un punto particular, digamos $x = 2$, entonces es $f'(2)$. Por ejemplo, en el ejemplo 1 evaluamos dP/dt en $t = 5$, o de forma equivalente, $P'(5)$.

☛ **12.** Determine $f'(x)$ cuando $f(x) = 2 - x^2$. Evalúe $f'(3)$ y $f'(-2)$

Respuesta $f'(x) = -2x$, $f'(3) = -6$, $f'(-2) = 4$

EJEMPLO 2 Determine $f'(x)$ si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Evalúe $f'(2)$ y $f'(-2)$.

Solución Sea $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} y + \Delta y = f(x + \Delta x) &= 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 1 \\ &= 2[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] + 3x + 3\Delta x + 1 \\ &= 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 1 \\ &= 2x^2 + 3x + 1 + \Delta x(4x + 3 + 2\Delta x) \end{aligned}$$

Restando y de $y + \Delta y$, tenemos

$$\Delta y = \Delta x(4x + 3 + 2\Delta x)$$

y así $\Delta y/\Delta x = 4x + 3 + 2\Delta x$. Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 3 + 2\Delta x) = 4x + 3$$

Esto es, $f'(x) = 4x + 3$
Cuando $x = 2$, $f'(2) = 4(2) + 3 = 11$
cuando $x = -2$, $f'(-2) = 4(-2) + 3 = -5$

☛ **13.** Determine $f'(x)$ cuando $f(x) = x^3$. Evalúe $f'(2)$ y $f'(-2)$

Respuesta $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$, $f'(-2) = 12$

***Observación*:** Para determinar $f'(c)$ no debemos encontrar primero $f(c)$ y luego derivarla: $f'(c) \neq (d/dx)\, f(c)$. ☛ **12, 13**

EJEMPLO 3 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución Sea $y = f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $y + \Delta y = f'(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$, de modo que

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Deseamos tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$; antes de hacerlo, debemos racionalizar el numerador. Hacemos esto multiplicando el numerador y el denominador por $(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De aquí que $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$

EJEMPLO 4 Evalúe dy/dx para la función cúbica

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

donde A, B, C y D son cuatro constantes.

Solución Reemplazando x por $x + \Delta x$, encontramos que

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= A(x + \Delta x)^3 + B(x + \Delta x)^2 + C(x + \Delta x) + D \\ &= A[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] \\ &\quad + B[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] + C(x + \Delta x) + D \end{aligned}$$

Ahora, si restamos la expresión dada para y, encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta y &= (y + \Delta y) - y \\ &= A[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] \\ &\quad + B[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &\quad + C(x + \Delta x) + D - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &= A[3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + \Delta x)^3] + B[(2x\,\Delta x + \Delta x)^2] + C\,\Delta x \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A[\,3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2] + B(2x + \Delta x) + C$$

Permitiendo que Δx se aproxime a cero, vemos que en el límite, los tres términos de la derecha que incluyen Δx como factor se aproximan a cero. Los restantes términos dan el siguiente resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 3\,Ax^2 + 2Bx + C \tag{1}$$

Con base en el resultado de este ejemplo, es posible recuperar algunos de los resultados de los ejemplos anteriores. Por ejemplo, si tomamos $A = 0$, $B = 2$, $C = 3$

y $D = 1$, la función cúbica en el ejemplo 4 se transforma en $y = 0x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 3x + 1$, que se analizó en el ejemplo 2. De la ecuación (1),

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C = 3(0)x^2 + 2(2)x + 3 = 4x + 3$$

lo cual coincide con el resultado del ejemplo 2.

Interpretación geométrica

Ya hemos visto que cuando la variable independiente de una función $y = f(t)$ representa el tiempo, la derivada dy/dt da la tasa de cambio instantánea de y. Por ejemplo, si $s = f(t)$ representa la distancia recorrida por un móvil, ds/dt da la velocidad instantánea. Aparte de esta clase de aplicación de la derivada, sin embargo, también tiene una interpretación desde el punto de vista geométrico.

Si P y Q son los dos puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces, como se estableció en la sección 1-1, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente del segmento rectilíneo PQ. A medida que Δx se hace cada vez más pequeño, el punto Q se aproxima cada vez más a P y el segmento secante PQ está cada vez más cerca de ser tangente. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de la secante PQ se aproxima a la pendiente de la línea tangente en P. Así que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

representa la pendiente de la línea tangente a $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$. (Véase la figura 6). Con tal de que la curva $y = f(x)$ sea "suave" en P; esto es, si podemos dibujar una tangente que no sea vertical en P, el límite existirá.

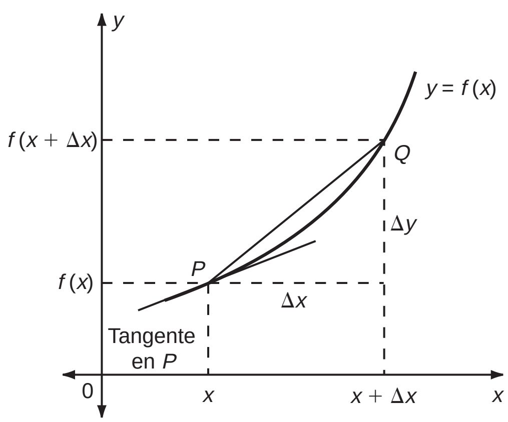


FIGURA 6

☛ **14.** En el ejemplo 4, encuentre la ecuación de la recta tangente en *a*) (1, 1) *b*) (9, 3)

Respuesta *a*) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

☛ **15.** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + x$ en el punto *a*) (1, 2) *b*) $(-1, 0)$

Respuesta *a*) $y = 3x - 1$
b) $y = -x - 1$

EJEMPLO 5 Determine la pendiente de la tangente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) y en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Solución En el ejemplo 3, demostramos que si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Cuando $x = 4$, $f'(4) = 1/2\sqrt{4} = \frac{1}{4}$. Por lo que la pendiente de la tangente en (4, 2) es $\frac{1}{4}$.

Para obtener la ecuación de la recta tangente, podemos utilizar la fórmula punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

con pendiente $m = \frac{1}{4}$ y $(x_1, y_1) = (4, 2)$. (Véase la figura 7). Obtenemos

$$y - 2 = \tfrac{1}{4}(x - 4)$$
$$y = \tfrac{1}{4}x + 1$$

que es la ecuación pedida.

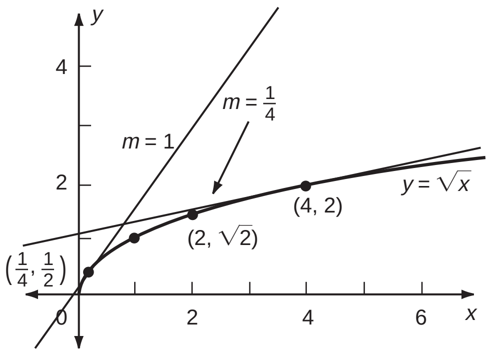


FIGURA 7

Cuando $x = \frac{1}{4}$, $f'(\frac{1}{4}) = 1/2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$. Así la pendiente de la tangente en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ es 1. (Véase la figura 7). Con base en la fórmula punto-pendiente, su ecuación es

$$y - \tfrac{1}{2} = 1 \cdot (x - \tfrac{1}{4}) \quad \text{o} \quad y = x + \tfrac{1}{4}$$ ☛ **14, 15**

EJERCICIOS 1-3

(1-14) Calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a las variables independientes según el caso.

1. $f(x) = 2x - 5$
2. $f(x) = 2 - 5x$
3. $g(x) = 7$
4. $g(t) = -3$
5. $f(x) = x^2$
6. $g(t) = 3t^2 + 1$
7. $f(u) = u^2 + u + 1$
8. $g(x) = x^2 - 3x + 7$
9. $h(x) = 7 - 3x^2$
10. $f(x) = 1/x$
11. $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$
12. $h(u) = \dfrac{2}{1 - u}$
13. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 3}$
14. $g(u) = \dfrac{u}{u + 1}$
15. Calcule dy/dx si:

a) $y = 3 - 2x^2$ *b*) $y = 3x + 7$

16. Determine du/dt si:

a) $u = 2t + 3$ *b*) $u = 1/(2t + 1)$

17. Encuentre dx/dy si:

a) $x = \sqrt{y}$ *b*) $x = (y + 1)/y^2$

18. Calcule dp/dq si:

a) $p = 1/(3 + 2q)$ *b*) $p = 1/\sqrt{q}$

19. Determine $f'(2)$ si $f(x) = 5 - 2x$

20. Calcule $g'(4)$ si $g(x) = (x + 1)^2$

21. Encuentre $F'(3)$ si $F(t) = t^2 - 3t$

22. Determine $G'(1)$ si $G(u) = u^2 - u + 3$

23. Calcule $h'(0)$ si $h(y) = y^2 + 7y$

24. Encuentre $H'(2)$ si $H(t) = 1/(t - 1)$

(25-32) Determine la pendiente de la tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Encuentre la ecuación de la línea tangente en cada caso.

25. $y = 3x^2 - 4$ en $x = 2$

26. $y = x^2 + x + 2$ en $x = -2$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 3$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ en $x = 2$

29. $y = \dfrac{x + 1}{x}$ en $x = 1$ **30.** $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$

31. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ en $x = 2$

32. $g(t) = 5t^2 + 1$ en $t = -3$

33. *(Crecimiento de las ventas)* El volumen de las ventas de un disco fonográfico particular está dado como una función del tiempo t por la fórmula

$$S(t) = 10{,}000 + 2000t - 200t^2$$

donde t se mide en semanas y S es el número de discos vendidos por semana. Determine la tasa en que S cambia cuando:

a) $t = 0$ *b*) $t = 4$ *c*) $t = 8$

34. *(Crecimiento de la población)* Cierta población crece de acuerdo con la fórmula

$$p(t) = 30{,}000 + 60t^2$$

donde t se mide en años. Calcule la tasa de crecimiento cuando:

a) $t = 2$ *b*) $t = 0$ *c*) $t = 5$

35. *(Reacción química)* Durante una reacción química en la cual una sustancia A se descompone, la masa (en gramos) de A restante en un tiempo t está dada por $m(t) = 9 - 3t + \frac{1}{4}t^2$. Encuentre $m'(t)$ e interprete esta cantidad. Evalúe $m(0)$, $m'(0)$, $m(6)$ y $m'(6)$.

■ 1-4 DERIVADAS DE FUNCIONES ELEVADAS A UNA POTENCIA

Por lo que se expuso en la sección 1-3 quedó claro que encontrar derivadas de funciones utilizando la propia definición de derivada no siempre es sencillo y, por lo general, lleva tiempo. Esta tarea puede simplificarse en forma apreciable usando ciertas fórmulas estándar. En esta sección, desarrollaremos fórmulas con el propósito de encontrar las derivadas de funciones elevadas a una potencia y combinaciones de ellas.

Empecemos regresando al ejemplo 4 de la sección 1-3. Considerando casos especiales de los coeficientes A, B, C y D en ese ejemplo, obtenemos los siguientes resultados.

TEOREMA 1

a) La derivada de una función constante es cero

b) Si $y = x$, entonces $dy/dx = 1$

c) Si $y = x^2$, entonces $dy/dx = 2x$

d) Si $y = x^3$, entonces $dy/dr = 3x^2$

DEMOSTRACIÓN

a) En la función $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, hagamos A, B y C iguales a cero. Entonces $y = D$, una función constante. La expresión general de dy/dx es $3Ax^2 + 2Bx + C$ (por el ejemplo 4 de la sección 11.3) y es cero cuando $A = B = C = 0$.

b) Si hacemos $A = B = D = 0$ y $C = 1$, obtenemos $y = x$ y $dy/dx = 1$, como se requería.

c) y *d*) se prueban en forma similar.

En términos geométricos, la parte *a*) del teorema 1 asegura que la pendiente de la línea $y = c$ es cero en todo punto de ella. Es obvio que esto es cierto porque la gráfica de $y = c$ es una línea horizontal, y cualquier línea horizontal tiene pendiente cero.

EJEMPLO 1 $\frac{d}{dx}(6) = 0$ y $\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Con base en los resultados de las partes *a*) a *d*) del teorema 1, podemos observar cierto patrón en las derivadas de potencias de x, $y = x^n$. Tenemos el siguiente resultado que es válido para cualquier valor real de n.

$$\text{Si } y = x^n, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{(fórmula de la potencia)}$$

Verbalmente, *con la finalidad de encontrar la derivada de cualquier potencia constante de* x, *reducimos la potencia de* x *en* 1 *y multiplicamos por el exponente original de* x.

Al final de esta sección, probaremos esta fórmula de la derivada de x^n en el caso de que n sea un entero positivo. Sin embargo, es válida para todos los valores reales de n.

EJEMPLO 2

a) $\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$

b) $\frac{d}{dy}(y^{3/2}) = \frac{3}{2}y^{3/2-1} = \frac{3}{2}y^{1/2}$

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{d}{dt}(t^{-1/2}) = -\frac{1}{2}t^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}t^{-3/2}$

d) $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right) = \frac{d}{du}(u^{-2}) = -2u^{-2-1} = -2u^{-3} = -\frac{2}{u^3}$

☛ **16.** Utilice la fórmula de la potencia para encontrar

a) $\frac{d}{dx}(x^4)$ *b*) $\frac{d}{dt}(\sqrt{t})$

c) $\frac{d}{du}(u^e)$ *d*) $\frac{d}{dx}(x^x)$

e) $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ (porque $x^0 = 1$)

f) $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ ☛ **16**

TEOREMA 2 Si $u(x)$ es una función diferenciable de x y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Esto es, *la derivada del producto de una constante y una función de* x *es igual al producto de la constante y la derivada de la función*.

EJEMPLO 3

a) $\frac{d}{dx}(cx^n) = c\frac{d}{dx}(x^n) = c(nx^{n-1}) = ncx^{n-1}$

b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{t}\right) = \frac{d}{dt}(4t^{-1}) = 4\frac{d}{dt}(t^{-1}) = 4(-1 \cdot t^{-2}) = \frac{4}{t^2}$

c) $\frac{d}{du}(2\sqrt{u}) = \frac{d}{du}(2u^{1/2}) = 2\frac{d}{du}(u^{1/2}) = 2 \cdot \frac{1}{2}u^{-1/2} = u^{-1/2}$

TEOREMA 3 Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferenciables de x, entonces,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

En otras palabras, *la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las dos funciones*.

EJEMPLO 4 Calcule dy/dx si $y = x^2 + \sqrt{x}$

Solución La función dada es la suma de x^2 y $x^{1/2}$. En consecuencia, por el teorema 3, podemos diferenciar estas dos potencias por separado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = 2x + \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Respuesta *a*) $4x^3$ *b*) $\frac{1}{2}t^{-1/2}$ *c*) eu^{e-1} *d*) la fórmula de la potencia no puede utilizarse cuando el exponente no es una constante. La respuesta *no* es $x \cdot x^{x-1}$

Este teorema puede extenderse de inmediato a la suma de cualquier número de funciones y también a diferencias entre funciones. Por ejemplo,

☛ **17.** Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si

a) $y = 4x^3 - \frac{2}{x^3}$

b) $y = x(2x^2 + 1)$

Respuesta

a) $12x^2 + \frac{6}{x^4}$

b) $6x^2 + 1$

☛ **18.** Derive

a) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)(2 - x^2)$

b) $y = \frac{3t^2 - \sqrt{t}}{2t}$

Respuesta

a) $1 - \frac{2}{x^2} - 3x^2$

b) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}t^{-3/2}$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

etcétera.

EJEMPLO 5 Determine la derivada de $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ con respecto a x.

Solución Sea $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^3 + 7x + 2) = \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(2)$$

Usamos el teorema 3 para expresar la derivada de la suma $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ como la suma de las derivadas de $3x^4$, $-5x^3$, $7x$ y 2. Calculando estas cuatro derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3(4x^3) - 5(3x^2) + 7(1x^0) + 0 = 12x^3 - 15x^2 + 7$$

porque $x^0 = 1$. ☛ **17**

Reconsidere el ejemplo 2 de la sección 1-3. Utilizando los métodos de esta sección podemos obtener la respuesta con mucho más facilidad que antes. Porque si $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, entonces,

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 4x + 3$$

Terminado.

Con frecuencia es necesario arreglar la forma algebraica de una función antes de que puedan aplicarse los teoremas. Expresiones en que aparecen paréntesis pueden derivarse después de eliminar los paréntesis. Por ejemplo, si deseamos calcular dy/dx cuando $y = x^2(2x - 3)$, en primer término escribimos $y = 2x^3 - 3x^2$. En esta forma, podemos derivar y como en el ejemplo 5, y obtener $dy/dx = 6x^2 - 6x$. O si $y = (x + 2)(x^2 - 3)$, empezamos desarrollando los productos, obteniendo $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$. A partir de esta etapa, procedemos otra vez como en el ejemplo 5 y obtenemos que $dy/dx = 3x^2 + 4x - 3$.

En forma similar, podemos simplificar fracciones con denominadores monomiales antes de diferenciar. Por ejemplo, si

$$y = \frac{5t^4 + 7t^2 - 3}{2t^2}$$

escribimos primero $y = \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t^{-2}$. Después de derivar los tres términos por separado,

$$\frac{dy}{dt} = 5t + 3t^{-3}$$ ☛ **18**

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Sea $y = cu(x)$. Entonces si x se reemplaza por $x + \Delta x u$ se convierte en $u + \Delta u$ y en $y + \Delta y$, de modo que

$$y + \Delta y = cu(x + \Delta x) = c(u + \Delta u)$$

Restando, tenemos que $\Delta y = c(u + \Delta u) - cu = c\Delta u$. La división de ambos lados entre Δx nos da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(c\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$$

como se requería.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3 Sea $y = u(x) + v(x)$. Sea x dado un incremento Δx. Puesto que y, u y v son funciones de x, se incrementan en $y + \Delta y$, $u + \Delta u$ y $v + \Delta v$, en donde

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

La resta de y a $y + \Delta y$ da

$$\Delta y = (u + \Delta u + v + \Delta v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v$$

Dividiendo entre Δx, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que Δx tienda a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad \text{(por el teorema 3(a), sección 1-2)}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

que es el resultado requerido.

Por último, probaremos la fórmula de las potencias cuando n es un entero positivo. La demostración dada utiliza el siguiente resultado del álgebra.

Si n es un entero positivo,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + n^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Este resultado es fácil de verificar multiplicando las dos expresiones del lado derecho término a término. Debe observarse que el número de términos en el segundo paréntesis de la derecha es igual a n, la potencia de a y b en el lado izquierdo. Considere los siguientes ejemplos:

$$n = 2: \quad a^2 - b^2 = (a - b)\underbrace{(a + b)}_{\text{2 términos}}$$

$$n = 3: \quad a^3 - b^3 = (a - b)\underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{3 términos}}$$

$$n = 4: \quad a^4 - b^4 = (a - b)\underbrace{(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}_{\text{4, términos, etcétera}}\text{, etcétera.}$$

TEOREMA 4 La derivada de x^n con respecto a x es nx^{n-1}, en donde n es un entero positivo.

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Cuando x cambia a $x + \Delta x$, y se incrementa a $y + \Delta y$, en donde

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

La sustracción del valor de y de $y + \Delta y$ nos da

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Con objeto de simplificar esta expresión de Δy, usamos la identidad algebraica que se dio antes, haciendo $a = x + \Delta x$ y $b = x$. Así pues, $a - b = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, de modo que

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + (x + \Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

Dividiendo ambos lados entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + (x + \Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

Ahora cuando $\Delta x \to 0$, cada término de los paréntesis se aproxima al límite x^{n-1}. Por ejemplo, el segundo término $(x + \Delta x)^{n-2} \cdot x$ se aproxima a $x^{n-2} \cdot x = x^{n-1}$ cuando $\Delta x \to 0$. Además, hay n de tales términos que están sumados. Así, que

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ términos}} = nx^{n-1}$$

como se requería.

EJERCICIOS 1-4

(1-46) Derive las siguientes expresiones.

1. x^5

2. $x^{\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{1}{t^3}$

4. $\dfrac{4}{u^4}$

5. $\dfrac{1}{5u^5}$

6. $\dfrac{x^7}{7}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $2x - x^3$

9. $4x^3 - 3x^2 + 7$

10. $5 - 2x^2 + x^4$

11. $3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 8$

12. $4x^3 + 2 + \dfrac{1}{x}$

13. $3u^2 + \dfrac{3}{u^2}$

14. $\dfrac{x^6}{6} + \dfrac{6}{x^6}$

15. $x^{1.2} + \dfrac{1}{x^{0.6}}$

16. $x^{0.4} - x^{-0.4}$

17. $2\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$

18. $x^7 + \dfrac{1}{x^7} + 7x + \dfrac{7}{x} + 7$

19. $2\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$

20. $2\sqrt{t} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{t}}$

21. $2x^{3/2} + 4x^{5/4}$

22. $\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

23. $3x^4 + (2x - 1)^2$

24. $(y - 2)(2y - 3)$

25. $(x - 7)(2x - 9)$

26. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

27. $(u + 1)(2u + 1)$

28. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

29. $(t + 1)(3t - 1)^2$

30. $(u - 2)^3$

31. $(x + 2)^3$

32. $(x + 1)(x - 1)^2$

33. $\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^3$

34. $\left(\dfrac{2t - 1}{2t}\right)^3$

35. $\left(\dfrac{y + 2}{y}\right)^3 + \left(\dfrac{y - 2}{y}\right)^3$

36. $\dfrac{2y^2 + 3y - 7}{y}$

37. $\dfrac{(x + 1)^2}{x}$

38. $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$

39. $\dfrac{t + 3/t}{\sqrt{t}}$

40. $\dfrac{(x + 1)^2 + (x - 1)^2}{x^2}$

41. $\dfrac{(2t + 3)^2 - (2t - 3)^2}{4t}$

42. $x^3 - \dfrac{x^{1.6}}{x^{2.3}}$

43. $\sqrt{2y} + (3y)^{-1}$

44. $(8y)^{2/3} + (8y)^{-2/3}$

45. $(16t)^{3/4} - (16t)^{-3/4}$

46. $\sqrt[3]{27t^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{27t^2}}$

47. Calcule dy/dx si $y = x^3 + 1/x^3$

48. Determine du/dx si $u = x^2 - 7x + 5/x$

49. Calcule dy/du si $y = u^3 - 5u^2 + \dfrac{7}{3u^2} + 6$

50. Determine dx/dt si $x = (t^3 - 5t^2 + 7t - 1)/t^2$

51. Si $y = \sqrt{x}$, pruebe que $2y(dy/dx) = 1$

52. Si $u = 1/\sqrt{x}$, pruebe que $2u^{-3}\,(du/dx) + 1 = 0$

(53-56) Determine la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados.

53. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $(1, 2)$

54. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en $(-1, 2)$

55. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en $x = -2$

56. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ en $x = 1$

57. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^2 - 3x + 7$ donde la recta tangente sea paralela a la recta $x - y + 4 = 0$

58. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 2$ donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $x + 7y + 4 = 0$

59. *(Móvil)* La distancia recorrida por un móvil al tiempo t es igual a $2t^3 - t^{1/2}$. Calcule la velocidad instantánea:

a) Al tiempo t *b*) En el instante $t = 4$

60. *(Proyectiles)* Una partícula se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies/segundo. Después de t segundos, su altura sobre el nivel del suelo está dada por $s = 60t - 16t^2$. Calcule su velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué tiene de especial el instante $t = \frac{15}{8}$?

61. *(Crecimiento del PNB)* En el ejercicio 22 de la sección 1-1, calcule las tasas de crecimiento instantáneas del PNB en:

***a*)** 1970 ***b*)** 1980 ***c*)** 1990

(La respuesta debe darse en miles de millones de dólares por año).

62. *(Crecimiento de población)* Al principio de un experimento se encontró que en un cultivo de bacterias había 10,000 individuos. Se observó el crecimiento de la población y se encontró que en un tiempo posterior t (horas) después de empezado el experimento, el tamaño de la población $p(t)$ se podía expresar por la fórmula

$$p(t) = 2500\,(2 + t)^2$$

Determine la fórmula de la razón de crecimiento de la población en cualquier tiempo t y en particular calcule la razón de crecimiento para $t = 15$ minutos y para $t = 2$ horas.

63. *(Botánica)* La proporción de semillas de una especie de árbol que disemina una distancia mayor que r, a partir de la base del árbol, está dada por

$$p(r) = \frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

donde r es una constante. Encuentre la razón de cambio de la proporción con respecto a la distancia y calcule $p'(2r_0)$.

64. *(Física)* Durante cambios rápidos (adiabáticos) de presión, la presión ρ y la densidad ρ de un gas varía de acuerdo con la ley $p\rho^{-\gamma} = c$ donde γ y c son constantes. Calcule $dp/d\rho$.

65. *(Bioquímica)* Según la ley de Schütz-Borisoff, la cantidad y de sustrato transformada por una enzima en un intervalo de tiempo t está dada por $y = k\sqrt{cat}$, donde c es la concentración de la enzima, a es la concentración inicial de sustrato y k es una constante. ¿Cuál es la razón a la cual el sustrato está siendo transformado?

66. *(Proyectiles)* Una pelota es lanzada al aire a una velocidad de 40 pies por segundo con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Si tomamos el eje x como horizontal y el eje y como vertical, el origen como el punto inicial del vuelo de la pelota, entonces la posición de la pelota en el tiempo t está dada por $x = 20\sqrt{2}\,t$, $y = 20\sqrt{2}\,t - 16t^2$. Calcule la pendiente de la trayectoria t segundos después de haberse lanzado la pelota. ¿Para cuál valor de t la pendiente es cero? (*Sugerencia*: Exprese y en términos de x para eliminar a t).

67. *(Crecimiento de células)* La masa de un organismo unicelular crece con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $m(t) = 2 + 6t + 3t^2$. Encuentre $m'(t)$ y evalúe $m(2)$ y $m'(2)$. Interprete estos valores.

68. *(Epidemias)* Una enfermedad infecciosa y debilitante se propaga lentamente en una población. El número de individuos infectados después de t meses está dado mediante la fórmula:

$$N(t) = 1000(t^{3/2} + t^2)$$

Encuentre $N'(t)$. Evalúe $N(9)$ y $N'(9)$ e interprete estos valores.

69. *(Fórmula Fay/Lehr)* Se ha observado que la forma de esparcimiento de un derrame de petróleo es aproximadamente una elipse con su eje mayor en la dirección del viento. El área de la elipse en metros cuadrados es $A = \pi ab$, donde:

$$a(t) = b(t) + c_1 t^{3/4}, \qquad b(t) = c_2 t^{1/4}$$

Aquí t es el tiempo en minutos, c_1 es una constante que depende de la velocidad del viento y c_2 es una constante que depende del volumen derramado. Si $c_1 = 0.2$ y $c_2 = 15$ calcule los valores de $A(t)$ y $A'(t)$ después de 15 minutos y después de 30 minutos.

■ 1-5 ANÁLISIS MARGINAL

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía en la construcción de lo que denominamos *tasas marginales*. En este campo, la palabra "marginal" se utiliza para indicar una derivada, esto es, una tasa de cambio. Se dará una selección de ejemplos.

Costo marginal

Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que con la finalidad de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio por artículo al producir 100 artículos es $\frac{500}{100} = \$5$.

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal. El costo es

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03[10{,}000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta C = (C + \Delta C) - C &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 \\ &= 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extra es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x$$

Por ejemplo, si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = \$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\Delta x) = 6$$

En el caso de una función de costo general $C(x)$ que represente el costo de producir una cantidad de x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

EJEMPLO 1 ***(Costo marginal)*** Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50$, $x = 100$ y $x = 150$.

Solución Deseamos evaluar $C'(x)$. La función dada $C(x)$ es una combinación de potencias de x y así puede derivarse por medio de la fórmula para las potencias que se presentó en la última sección. Obtenemos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}(0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000) \\ &= 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 40(1) + 0 \\ &= 0.003x^2 - 0.6x + 40 \end{aligned}$$

Esta función, el costo marginal, da el costo promedio por artículo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se han producido x artículos. Cuando se han producido 50 unidades, el costo marginal de los artículos extra está dado por

$$C'(50) = (0.003)(50)^2 - (0.6)(50) + 40 = 7.5 - 30 + 40 = 17.5$$

Si $x = 100$, el costo marginal es

$$C'(100) = (0.003)(100)^2 - (0.6)(100) + 40 = 30 - 60 + 40 = 10$$

Cuando $x = 150$, el costo marginal está dado por

$$C'(150) = (0.003)(150)^2 - (0.6)(150) + 40 = 67.5 - 90 + 40 = 17.5$$

☛ **19.** Determine el costo marginal si $C(x) = 4 + 3x - 0.1x^2$ Evalúe $C'(5)$ y explique su significado.

Informalmente podemos decir que el costo de producir el artículo número 51 es de \$17.50, el artículo número 101 tiene un costo de \$10 y el artículo número 151 cuesta \$17.50. (Afirmaciones como ésta no son lo *bastante* precisas, dado que la derivada de la tasa de un incremento infinitesimalmente pequeño en la producción, no para un incremento unitario). ☛ **19**

En el ejemplo 1, observamos que el costo marginal decrece a medida que la producción se incrementa de 50 a 100 unidades y luego se incrementa de nuevo cuando la producción aumenta de 100 a 150. En la figura 8 aparece la gráfica de $C'(x)$ como una función de x.

Respuesta $C'(x) = 3 - 0.2x$, $C'(5) = 2$. Cuando se producen 5 unidades, el costo se eleva en 2 por unidad adicional, cuando se aumenta el nivel de producción en un pequeño incremento infinitesimal.

Este tipo de comportamiento es bastante frecuente en el costo marginal. Cuando la producción x aumenta a partir de valores pequeños, el costo marginal decrece (esto es, baja el costo promedio del pequeño incremento siguiente en la producción). La razón de esto estriba en las economías de escala, que provocan que la fabricación de pequeñas cantidades de bienes sea relativamente más cara que la producción de grandes cantidades. Sin embargo, cuando x se hace muy grande, los costos empie-

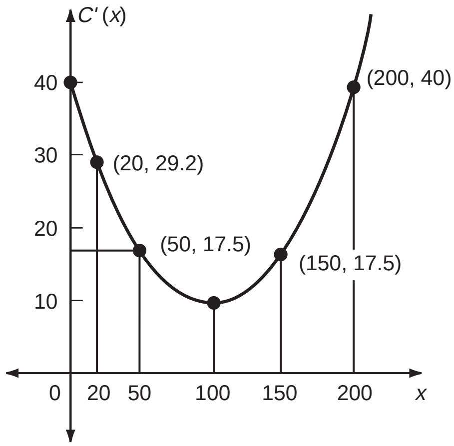


FIGURA 8

zan a aumentar a medida que la capacidad de las unidades de producción existentes llegan a gastarse, y empieza a ser necesario invertir en una nueva planta o maquinaria o pagar horas extra a los trabajadores, etc. Esto causa un eventual aumento en el costo marginal. Así que, por lo regular, el costo marginal primero decrece al aumentar la producción y luego se incrementa de nuevo.

Vale la pena comparar este tipo de comportamiento con el sencillo modelo de costo lineal. En ese caso, $C(x) = mx + b$ (m y b constantes) y el costo marginal $C'(x) = m$ es constante para toda x. Así que el costo de cada unidad de producción adicional es constante,independiente del nivel de producción.

Es importante no confundir el costo marginal con el costo promedio. Si $C(x)$ es la función de costo, el **costo promedio** de producir x artículos es el costo total, $C(x)$, dividido entre el número de artículos producidos.

$$\text{Costo promedio por artículo} = \frac{C(x)}{x}$$

Esto es muy diferente del costo marginal, que está dado por la derivada $C'(x)$. El costo marginal representa el costo promedio por unidad adicional de un pequeño incremento en la producción. El costo promedio por lo regular se denota por $\overline{C}(x)$.

EJEMPLO 2 En el caso de la función de costo $C(x) = 1000 + 10x + 0.1x^2$, el costo marginal es $C'(x) = 10 + 0.2x$. El costo promedio de producir x artículos es

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0.1x$$

Estas dos funciones son bastante distintas.

Ingreso y utilidad marginales

Ahora consideramos los ingresos derivados de la venta de los productos o servicios de una empresa. Si $R(x)$ denota el ingreso en dólares por la venta de x artículos, definimos el **ingreso marginal** como la derivada $R'(x)$.

$$\text{Ingreso marginal} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

Si el número de artículos vendidos se incrementa de x a $x + \Delta x$, entonces existe un incremento correspondiente en el ingreso dado por

$$\Delta R = \text{Nuevo ingreso} - \text{Ingreso original} = R(x + \Delta x) - R(x)$$

El incremento promedio en el ingreso por artículo adicional vendido se obtiene dividiendo ΔR entre el número de artículos adicionales, lo que da $\Delta R/\Delta x$. El valor límite de este promedio cuando $\Delta x \to 0$ da el ingreso marginal. Así pues, el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

EJEMPLO 3 ***(Ingreso marginal)*** Si la función de ingreso está dada por

$$R(x) = 10x - 0.01x^2$$

en donde x es el número de artículos vendidos, determine el ingreso marginal. Evalúe el ingreso marginal cuando $x = 200$.

Solución Necesitamos evaluar $R'(x)$. Dado que $R(x)$ es una combinación de potencias de x, podemos usar la fórmula para las potencias, obteniendo el resultado.

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(10x - 0.01x^2) = 10(1) - (0.01)(2x) = 10 - 0.02x$$

Esto nos da el ingreso marginal cuando se vende un número arbitrario x de artículos. Si $x = 200$, obtenemos un ingreso marginal de

$$R'(200) = 10 - (0.02)(200) = 10 - 4 = 6$$

Así que cuando se venden 200 artículos, cualquier incremento pequeño en las ventas provoca un aumento en los ingresos de \$6 por artículo.

La función de ingreso puede escribirse en la forma

$$R(x) = xp$$

en donde p es el precio por artículo y x es el número de artículos vendidos. Existe una relación entre x y p caraterizada por la ecuación de demanda. Cuanto más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio; cuanto más alto se fije el precio, en general, menor será el volumen de las ventas.

EJEMPLO 4 ***(Ingreso marginal)*** Determine el ingreso marginal cuando $x = 300$ si la ecuación de demanda es

$$x = 1000 - 100p$$

Solución En primer término, debemos escribir la ecuación de demanda en tal forma que expresamos p como una función de x.

$$100p = 1000 - x$$
$$p = 10 - 0.01x$$

Así, la función de ingreso está dada por

$$R(x) = xp = x(10 - 0.01x) = 10x - 0.01x^2$$

Observemos que esta función de ingreso es la misma que la del ejemplo anterior, de modo que podemos usar el resultado del ingreso marginal:

$$R'(x) = 10 - 0.02x$$

Cuando el volumen de ventas es 300, el ingreso marginal está dado por

$$R'(300) = 10 - (0.02)(300) = 10 - 6 = 4$$

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $R(x)$ cuando se venden x artículos, y si la función de costo es $C(x)$ al producirse esos mismos x artículos, entonces la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

La derivada $P'(x)$ se denomina la **utilidad marginal**. Representa la utilidad adicional por artículo si la producción sufre un pequeño incremento. ☛ **20**

☛ **20.** Calcule el ingreso marginal para la ecuación de demanda $p = 4 - \sqrt{x}$. Si la función de costo es $C(x) = 1 + x$, determine el costo marginal y la utilidad marginal. Evalúe $R'(4)$, $P'(4)$, $R'(6)$ y $P'(6)$

EJEMPLO 5 ***(Utilidad marginal)*** La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p + 0.1x = 80$$

y la función de costo es

$$C(x) = 5000 + 20x$$

Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.

Solución La función de ingreso está dada por

$$R(x) = xp = x(80 - 0.1x) = 80x - 0.1x^2$$

Por consiguiente, la utilidad generada por la producción y venta de x artículos está dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (80x - 0.1x^2) - (5000 + 20x) \\ &= 60x - 01x^2 - 5000 \end{aligned}$$

Respuesta
$R'(x) = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $C'(x) = 1$, $P'(x) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$. $R'(4) = 1$, $P'(4) = 0$, $R'(6) = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx 0.33$, $P'(6) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx -0.67$

La utilidad marginal es la derivada $P'(x)$. Ya que $P(x)$ es una combinación de potencias, usamos la fórmula de las potencias para calcular su derivada.

$$P'(x) = \frac{d}{dx}(60x - 0.1x^2 - 5000) = 60 - 0.2x$$

Si $x = 150$, obtenemos $P'(x) = 60 - (0.2)(150) = 30$. Así pues, cuando se producen 150 artículos, la utilidad marginal, esto es, la utilidad extra por artículo adicional cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad es \$30.

☛ **21.** Para la función de costo del ejemplo 1, determine la utilidad marginal si los artículos pueden venderse en \$130 cada uno. Evalúe $P'(200)$, $P'(300)$ y $P'(400)$ e interprete sus valores.

Cuando $x = 400$, la utilidad marginal es $P'(400) = 60 - (0.2)(400) = -20$. En consecuencia, si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción da como resultado una pérdida (esto es, una utilidad negativa) de \$20 por unidad adicional. ☛ **21**

La utilización de las tasas marginales es amplia en los negocios y la economía. Además de los ejemplos anteriores de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal, tiene otras aplicaciones. Algunas de ellas se resumen a continuación.

Productividad marginal

Considere que un fabricante tiene una cantidad fija de disponibilidad de capacidad de producción pero con un número variable de empleados. Denotemos con u la cantidad de mano de obra empleada (por ejemplo, u podría ser el número de horas-hombre a la semana de los empleados de la industria) y sea x la cantidad de producción (por ejemplo, el número total de artículos producidos a la semana). Entonces x es función de u y podemos escribir $x = f(u)$.

Si la cantidad de mano de obra u sufre un incremento Δu, la producción x se incrementa a $x + \Delta x$ en donde, como de costumbre, el incremento en la producción está dado por

$$\Delta x = f(u + \Delta u) - f(u)$$

La razón

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

proporciona la producción adicional promedio por unidad extra de mano de obra correspondiente al incremento Δu. Si ahora hacemos que Δu tienda a cero, esta razón se aproxima a la derivada dx/du, que se denomina **productividad marginal de mano de obra**. Así,

$$\text{Productividad marginal} = \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

De modo que la productividad marginal de mano de obra mide el incremento en la producción por unidad de mano de obra adicional, por ejemplo, por hora-hombre adicional, cuando se realiza un pequeño incremento en la cantidad de mano de obra empleada. Está dada por la derivada $f'(u)$.

Respuesta
$P'(x) = -0.003x^2 + 0.6x + 90$,
$P'(200) = 90$,
$P'(300) = 0$ y $P'(400) = -150$
Para un muy pequeño aumento en el nivel de producción, las utilidades aumentan en \$90 por unidad cuando $x = 200$, se mantiene sin cambio cuando $x = 300$ y disminuye en \$150 por unidad cuando $x = 400$

Rendimiento marginal

Suponga que un inversionista se enfrenta con el problema de saber cuánto capital debe invertir en un negocio o en una empresa financiera. Si se invierte una cantidad S, el inversionista obtendrá cierto rendimiento en la forma de ingresos de, digamos, Y dólares por año. En general, el rendimiento Y será una función del capital S invertido: $Y = f(S)$. En un caso característico, si S es pequeña, el rendimiento también será pequeño o aun cero, puesto que la empresa no dispondrá del capital suficiente para operar con eficiencia. A medida que S aumenta, la eficiencia de operación mejora y el rendimiento crece rápidamente. Sin embargo, cuando S se hace muy grande, la eficiencia puede deteriorarse otra vez si los demás recursos necesarios para la operación, tales como la mano de obra e insumos, no pueden crecer lo suficiente para mantener el ritmo del capital extra. En consecuencia, en el caso de grandes capitales S, el rendimiento Y puede descender de nuevo a medida que S continúa su crecimiento.

La **rendimiento marginal** se define como la derivada dY/dS. Se obtiene como el valor límite de $\Delta Y/\Delta S$ y representa el rendimiento por dólar adicional invertido cuando se realiza un pequeño incremento en el capital.

Tasa de impuesto marginal

Sea T la cantidad de impuestos pagados por un individuo o por una corporación cuando el ingreso es I. Así, podemos escribir $T = f(I)$. Si todas las demás variables permanecen fijas, un incremento ΔI en I provoca un aumento en T dado por $\Delta T = f(I + \Delta I) - f(I)$. La razón $\Delta T/\Delta I$ representa la fracción del incremento del ingreso que se pierde en forma de impuestos. Si hacemos que ΔI tienda a cero, esta razón se aproxima a la derivada dT/dI, la cual se denomina la tasa marginal de impuestos. Representa la proporción de un incremento infinitamente pequeño en el ingreso que debe pagarse en forma de impuesto.

La tasa marginal de impuestos está determinada por las escalas graduadas de impuestos. Los individuos con ingreso muy bajos no pagan impuestos, y por debajo de cierto nivel de ingreso la tasa marginal es cero. A medida que el ingreso aumenta, la tasa de impuestos marginal aumenta hasta que alcanza un nivel máximo igual a la proporción máxima que puede pagarse de acuerdo con la escala. (Véase ejemplo 8 de la sección 1-6).

Tendencias marginales a ahorrar y a consumir

Sea I el ingreso total (producto nacional bruto) de una nación. Cada individuo de la población que recibe parte de este ingreso toma una decisión con el propósito de gastar parte de su ingreso en bienes consumibles o servicios y ahorrar el resto. Sea C la cantidad total gastada por la población en artículos consumibles y S la cantidad total de los ahorros. Se sigue que $S + C = I$.

En general, la cantidad ahorrada está determinada por el ingreso nacional, y podemos escribir $S = f(I)$. La cantidad consumida está dada entonces por $C = I - f(I)$.

Si el ingreso nacional recibe un incremento ΔI, los ahorros y el consumo también sufren incrementos ΔS y ΔC, respectivamente, en donde

$$\Delta S + \Delta C = \Delta I \quad \text{y} \quad \Delta S = f(I + \Delta I) - f(1)$$

La razón $\Delta S/\Delta I$ representa la fracción del incremento del ingreso que se ahorra y $\Delta C/\Delta I$ indica a la fracción que se consume. Ya que

$$\frac{\Delta S}{\Delta I} + \frac{\Delta C}{\Delta I} = \frac{\Delta S + \Delta C}{\Delta I} = \frac{\Delta I}{\Delta I} = 1$$

la suma de estas dos fracciones es igual a 1.

En el límite cuando $\Delta I \to 0$, estas fracciones se convierten en las derivadas correspondientes. Llamamos a dS/dI la **tendencia marginal a ahorrar** y a dC/dI la **tendencia marginal a consumir**. Representan las proporciones de un pequeño incremento en el ingreso nacional que se ahorran y se consumen, respectivamente. Están relacionadas por la ecuación

$$\frac{dS}{dI} + \frac{dC}{dI} = 1$$

EJERCICIOS 1-5

(1-4) *(Costo marginal)* Calcule el costo marginal de las siguientes funciones de costo.

1. $C(x) = 100 + 2x$

2. $C(x) = 40 + (\ln 2)x^2$

3. $C(x) = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$

4. $C(x) = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$

(5-8) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal de las siguientes funciones de ingreso.

5. $R(x) = x - 0.01x^2$

6. $R(x) = 5x - 0.01x^{5/2}$

7. $R(x) = 0.1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{5/2}$

8. $R(x) = 100x - (\log 5)x^3(1 + \sqrt{x})$

9. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$, calcule el ingreso marginal, $R'(x)$

10. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $\sqrt{x} + p = 10$, calcule el ingreso marginal.

11. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $x^{3/2} + 50p = 1000$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 16$

12. *(Ingreso marginal)* Si la ecuación de demanda es $10p + x + 0.01x^2 = 700$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 10$

13. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 9, la función de costo es $C(x) = 100 + 5x$, calcule la utilidad marginal.

14. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 10, la función de costo es $C(x) = 60 + x$, calcule la utilidad marginal.

15. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 11, la función de costo es $C(x) = 50 + x^{3/2}$, evalúe la utilidad marginal cuando:

a) $p = 16$ *b*) $x = 25$

16. *(Utilidad marginal)* Si en el ejercicio 12, la función de costo es $C(x) = 1000 + 0.01x^2$, evalúe la función de utilidad marginal si:

a) $x = 100$ *b*) $p = 10$

17-18. *(Utilidad máxima)* En los ejercicios 13 y 14, encuentre el valor de x tal que $P'(x) = 0$ y calcule la utilidad correspondiente. Ésta representa la utilidad máxima que puede obtenerse por la venta del artículo en cuestión. Determine el precio p que da esta utilidad máxima.

19. *(Ingreso marginal)* Cuando una peluquera fija una cuota de \$4 por corte de cabello, advierte que el número de clientes que atiende en una semana es de 100, en promedio. Al elevar la tarifa a \$5, el número de clientes por semana baja a 80. Suponiendo una ecuación de demanda lineal entre el precio y el número de clientes, determine la función de ingreso marginal. Encuentre entonces el precio que produce un ingreso marginal igual a cero.

20. *(Utilidades marginales)* El editor de una revista descubre que si fija un precio de \$1 a su revista, vende 20,000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas sólo serán por 15,000 ejemplares. El costo de producir cada ejemplar es de \$0.80 y tiene costos fijos de \$10,000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal, calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es:

a) \$1.80 *b*) \$1.90 *c*) \$2

21. *(Costo marginal y costo promedio)* Demuestre que si la función de costo es de la forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, entonces en el valor de x para el cual el costo marginal es igual al costo promedio $\overline{C}(x)$, la derivada $(d/dx)\overline{C}(x)$ es cero.

***22.** *(Costo marginal y costo promedio)* Pruebe que el resultado del ejercicio 21 es válido para cualquier función de costo $C(x)$ que sea una función polinomial de x. (Esto es, $C(x)$ consta de una suma de potencias de x, donde cada potencia está multiplicada por una constante).

23. La función de consumo de cierta nación está dada por $C(I) = 4 + 0.36I + 0.48I^{3/4}$. Encuentre las tendencias marginales a consumir y a ahorrar, si el ingreso nacional es $I =$ 16 mil millones.

■ 1-6 CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD (SECCIÓN OPCIONAL)

Al considerar el valor límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c, debemos considerar valores de x que son tanto menores como mayores que c. Sin embargo, en algunos casos el comportamiento de una función dada es diferente si $x < c$ del correspondiente a $x > c$. En tal caso, desearíamos considerar por separado las posibilidades de que x tiende a c por la derecha o por la izquierda.

Decimos que x **tiende a *c* por la derecha** y escribimos $x \to c^+$ si x toma una sucesión de valores que están cada vez más cerca de c, pero siempre son mayores que c. (Véase la página 452). Decimos que *x tiende a C por la izquierda* y escribimos $x \to C^-$ si x toma una sucesión de valores cada vez más cercanos a C, pero siempre menores que C. Si $f(x)$ tiende al valor límite L cuando $x \to c^+$, escribimos

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Si $f(x)$ se aproxima al valor límite M cuando $x \to c^-$, escribimos

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M$$

Límites de este tipo se denominan **límites laterales**.

EJEMPLO 1 Investigue los valores límites de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ cuando x tiende a 1 por la derecha y por la izquierda.

Solución Cuando $x \to 1^+$, $x - 1$ tiende a cero mediante valores positivos. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to c^+} \sqrt{x - 1} = 0$$

Por otra parte, cuando $x \to 1^-$, $x - 1$ aún se aproxima a cero, pero siempre es una cantidad negativa. Así pues, $\sqrt{x - 1}$ no está definida si $x < 1$, de modo que $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x - 1}$ no existe.

La gráfica de $y = \sqrt{x - 1}$ aparece en la figura 9. El dominio de esta función no comprende los valores de x que sean menores que 1, por lo que el límite por la izquierda no existe.

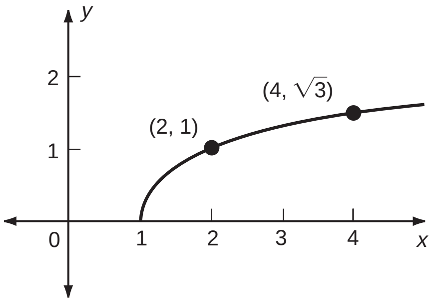


FIGURA 9

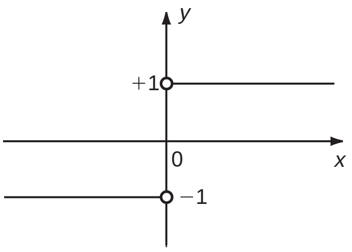


FIGURA 10

EJEMPLO 2 Calcule los valores límites de $f(x) = |x|/x$ cuando x tiende a 0 por la derecha o por la izquierda.

Solución Si $x > 0$, $|x| = x$, y así

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

La función dada tiene el valor 1 siempre que $x > 0$ y así debemos tener el valor límite 1 cuando x tiende a 0 por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

En el caso de que $x < 0$, $|x| = -x$, por lo cual

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

(Por ejemplo, cuando $x = -6$, $f(-6) = |-6|/(-6) = 6/(-6) = -1$). En consecuencia $f(x)$ es idénticamente igual a -1 siempre que $x < 0$ y de ahí que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

La gráfica de $y = f(x)$ se aprecia en la figura 10. Obsérvese que $f(x)$ no está definida si $x = 0$ y la gráfica presenta un salto de -1 a $+1$ al pasar la x de la izquierda de cero a su derecha. ☛ **22**

☛ **22.** Evalúe $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{|1-x|}$

Respuesta *a*) No tiene límite, 0, respectivamente; *b*) 1 y –1, respectivamente.

Los ejemplos anteriores ilustran dos tipos básicos de comportamiento. En el primer caso, sólo uno de los dos límites laterales existe. En el segundo, ambos límites existen pero sus valores son distintos. En ambos casos, el límite bilateral relevante, $\lim_{x\to c} f(x)$, no existe. En el caso de una función general $f(x)$, como se ilustra en la figura 11, si la gráfica de $f(x)$ tiene un salto en $x = c$, los límites laterales difieren. Obsérvese que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe si tanto $\lim_{x\to c^-} f(x)$ como $\lim_{x\to c^+} f(x)$ existen y son iguales.

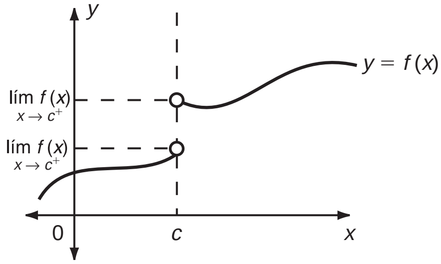


FIGURA 11

EJEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{para } x > 3 \\ x^2 + 2 & \text{para } x \leq 3 \end{cases}$$

encuentre $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Solución En este caso, $f(x)$ está definida por dos fórmulas diferentes, una para $x \leq 3$ y otra si $x > 3$. De modo que debemos calcular los límites laterales por separado.

Puesto que $f(x) = 2x + 5$ para $x > 3$, en el caso del límite por la derecha encontramos que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (2x + 5) = 2(3) + 5 = 11$$

De manera similar, si $x < 3$, tenemos que $f(x) = x^2 + 2$ y por tanto, por lo que respecta al límite por la izquierda,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2 + 2) = 3^2 + 2 = 11$$

Ya que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 11$, se sigue que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe y es igual a 11.

La gráfica de $f(x)$ en este caso aparece en la figura 12. Obsérvese que la forma de la gráfica cambia en $x = 3$, pero no presenta un salto en este punto. ☛ **23**

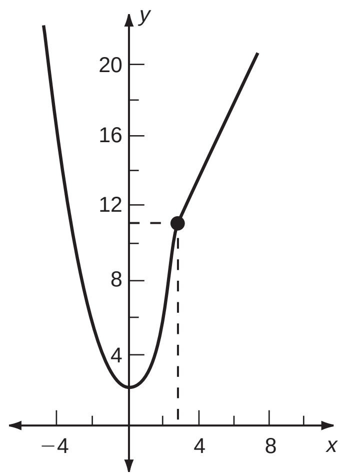


FIGURA 12

☛ **23.** Dada

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 4x & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3 - 4x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

determine $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si existen.

Respuesta $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Recordemos la definición de continuidad de una función dada en la sección 1-2.

DEFINICIÓN Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en el punto $x = c$ si se cumplen las tres condiciones siguientes.

1. $f(x)$ está definida en $x = c$. Esto es, $f(c)$ está bien definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si no se satisface cualquiera de estas tres condiciones, se dice que la función es **discontinua** en $x = c$. Si los dos límites de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha y por la izquierda son diferentes, decimos que $f(x)$ presenta una **discontinuidad de salto** en $x = c$.

EJEMPLO 4 La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. Observemos que $f(0) = |0| = 0$, de modo que la condición 1 se cumple. Asimismo, $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe dado que, cuando x tiende a cero, $|x|$ se aproxima el límite cero. Por último, la condición 3 se satisface, puesto que $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $f(0)$ son iguales a cero. La gráfica de $y = |x|$ se aprecia en la figura 13. Es claro que la gráfica pasa por $x = 0$ sin ruptura alguna. Presenta un pico (o cambio de pendiente) en $x = 0$, pero esto no la hace discontinua.

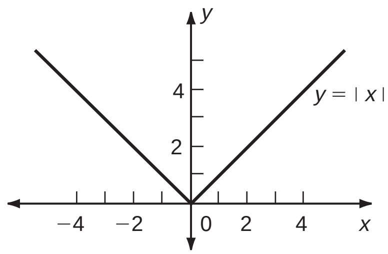


FIGURA 13

En el ejemplo 2, estudiamos la función $f(x) = |x|/x$. Esta función es discontinua en $x = 0$ porque $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe: los límites por la derecha y por la izquierda son distintos. La gráfica presenta un salto de -1 a $+1$ cuando x pasa por 0. Otro ejemplo de una función discontinua se da en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

¿Es continua $f(x)$ en $x = 3$?

Solución

Condición (1) Es claro que, $f(x)$ está definida en $x = 3$ y $f(3) = 5$

Condición (2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

$$= \lim_{x\to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Condición (3) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$ y $f(3) = 5$ no son iguales.

☛ **24.** ¿Para qué valores de h y k la siguiente función es continua en $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ h & \text{si } x = 2 \\ 2x + k & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

En este caso, las primeras dos condiciones se cumplen, pero la tercera condición no se satisface, de modo que la función dada es discontinua en $x = 3$. Esto se advierte en la figura 14. La gráfica de $f(x)$ se rompe en $x = 3$ y el punto aislado (3, 5) de la gráfica no está unido continuamente al resto de la gráfica. ☛ **24**

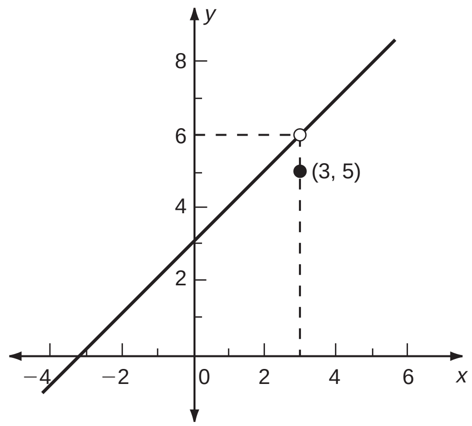


FIGURA 14

A primera vista parecería que las funciones discontinuas son de poca importancia en los problemas prácticos. Sin embargo, éste no es el caso, como el siguiente ejemplo de muestra.

EJEMPLO 6 ***(Función de costo del azúcar)*** Un mayorista vende azúcar a 50¢ el kilo en el caso de cantidades hasta de 100 kilos. Si se trata de cantidades entre 100 y 200 kilos la tarifa es de 45¢ el kilo y para órdenes por encima de los 200 kilos el precio es de 40¢ el kilo. Sea $y = f(x)$ el costo en pesos de x kilos de azúcar. Entonces si $x \leq 100$, $y = (0.5)x$. Para $100 < x \leq 200$, el costo es de \$0.45 por kilo, de modo que $y = 0.45x$. Por último, si $x > 200$, $y = 0.4x$. La gráfica de esta función aparece en la figura 15. Es claro que la función es discontinua en $x = 100$ y $x = 200$.

En la sección 1-3, definimos el término diferenciabilidad: se dice que una función $f(x)$ es diferenciable en el punto x si la derivada

Respuesta $h = 0$, $k = -4$

☛ **25.** *(Más difícil)* Utilizando la definición de $f'(0)$ como un límite, demuestre que la función $f(x) = x|x|$ es diferenciable en $x = 0$

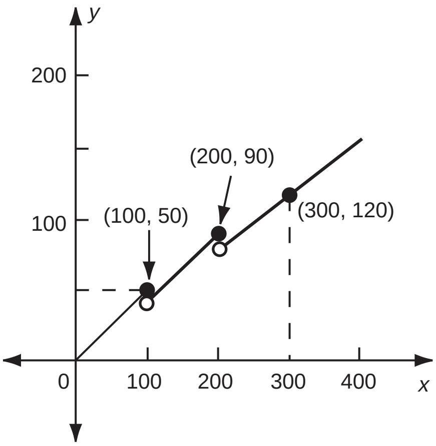


FIGURA 15

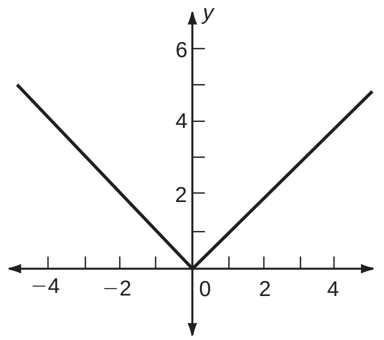


FIGURA 16

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existe en ese punto.

EJEMPLO 7 Demuestre que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.

Solución Debemos considerar $x = 0$, de modo que $f(x) = f(0) = 0$ y $f(x + \Delta x) = f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = |\Delta x|$. Así que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = |\Delta x| - 0 = |\Delta x|$$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Pero en el ejemplo 2, analizamos este límite y demostramos que no existe. De hecho, los límites por la derecha y por la izquierda existen pero son distintos.

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

Por tanto, f no es diferenciable en $x = 0$.

La gráfica de $y = |x|$ se observa en la figura 16. Si $x > 0$, la gráfica tiene una pendiente constante de 1; mientras que si $x < 0$ tiene una pendiente constante de -1. Si $x = 0$, no existe pendiente dado que la gráfica presenta un pico en este valor de x. Ésta es la razón de que $|x|$ no sea diferenciable en $x = 0$. ☛ **25**

Respuesta $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x|\Delta x| - 0|0|}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x|$, que existe y es igual a cero.

Una función $y = f(x)$ es diferenciable en cierto valor de x si su gráfica es "suave" en el punto correspondiente (x, y), por lo que entendemos que la gráfica tie-

ne una línea tangente bien definida con una pendiente bien definida. Si la gráfica presenta un pico en el punto (x, y), se sigue que $f(x)$ no es diferenciable en tal valor x. En el ejemplo anterior se da una de tales funciones.

EJEMPLO 8 ***(Impuesto sobre la renta)*** En el mítico país de Erehwon, los habitantes afortunados no pagan impuesto sobre la renta en sus primeros \$10,000 de ingresos gravables.* Las tasas de impuestos graduadas para niveles de ingresos más altos se dan en la tabla 5. Denotamos con I los ingresos gravables y con T la cantidad gravada. Exprese T como una función de I, dibuje la gráfica de esta función y estudie su diferenciabilidad.

TABLA 5

Ingresos gravables	Tasa de impuesto
\$10,001−\$20,000	20%
\$20,001−\$30,000	30%
Más de \$30,000	40%

Solución Si $0 \leq I \leq 10{,}000$, $T = 0$. Cuando $10{,}000 < I \leq 20{,}000$, la cantidad por la cual I excede a 10,000 se grava en un 20%. Por consiguiente, en este rango,

$$T = 0.2(I - 10{,}000) = 0.2I - 2000$$

Cuando $I = 20{,}000$, $T = 0.2(20{,}000 - 10{,}000) = 2000$, de modo que el impuesto a \$20,000 es de \$2000.

En el caso, de que $20{,}000 < I \leq 30{,}000$, la cantidad por la que I sobrepasa 20,000 se grava en un 30%. Así que, en este rango,

$$T = 2000 + 0.3(I - 20{,}000) = 0.\,3I - 4000$$

Cuando $I = 30{,}000$, $T = 0.3(30{,}000) - 4000 = 5000$, de modo que el impuesto es de \$5000.

Continuando en esta forma, construimos una tabla de valores de T como una función de I (véase la tabla 6) y la gráfica aparece en la figura 17. ☛ **26**

☛ **26.** Existe una propuesta para "racionalizar" la estructura de impuestos en Erehwon gravando con el 25% todos los ingresos por arriba de \$10,000 y hasta e incluyendo \$30,000 y con 40% a todos los ingresos por encima de \$30,000. Construya la nueva versión de la tabla 6 en este caso.

Respuesta

I	T
$I \leq 10{,}000$	0
$10{,}000 < I \leq 30{,}000$	$0.25I - 2500$
30,000	5000
$I > 30{,}000$	$0.4I - 7000$

TABLA 6

I	T
$I \leq 10{,}000$	0
$10{,}000 < I \leq 20{,}000$	$0.2I - 2000$
20,000	2000
$20{,}000 < I \leq 30{,}000$	$0.3I - 4000$
30,000	5000
$I > 30{,}000$	$0.4I - 7000$

La gráfica consta de varios segmentos lineales. Es claro que la cantidad gravada es una función continua de los ingresos gravables, pero no es diferenciable en

*1 Dólar de Erehwon = 5 U.S. dólares.

☛ **27.** *(Más difícil)* Demuestre que $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$. (*Sugerencia:* Vuelva a la definición de la derivada, $f'(0)$).

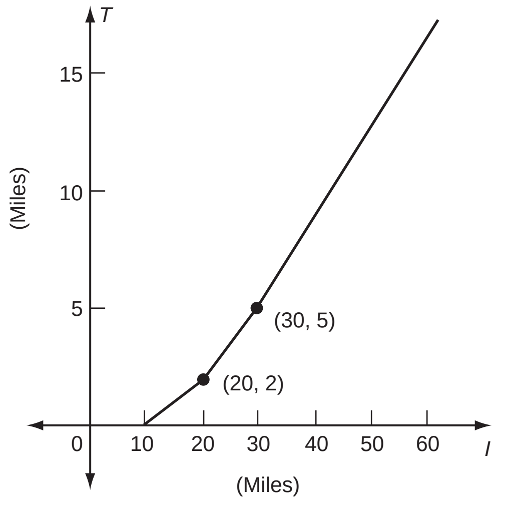


FIGURA 17

los puntos en que la gráfica presenta esquinas. Esto ocurre en los valores de I que marcan las divisiones de la escala de impuestos graduada. Entre estos puntos divisorios, T es diferenciable, y su derivada representa la tasa de impuestos marginal.

Respuesta $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0^{1/3}}{\Delta x}$
$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{-2/3}$
que no existe. (*No* es suficiente decir que f no es diferenciable en $x = 0$ ya que $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, que no existe cuando $x = 0$. Todo esto muestra que no existe $\lim_{x \to 0} f'(x)$ y esto no es lo mismo que $f'(0)$).

Otro caso en que una función no es diferenciable surge cuando la línea tangente en cierto punto resulta ser vertical. En tal caso, la pendiente de la línea tangente no está definida en el punto en cuestión, de modo que la función no es diferenciable en ese valor de x. Por ejemplo, dejamos como ejercicio probar que la función $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$. ☛ **27**

Observemos que en el ejemplo 7 tenemos una función que está definida y es continua para todos los valores de x, pero no siempre es diferenciable. En $x = 0$, $f(x) = |x|$ es continua pero no diferenciable. Es claro que, por consiguiente, *el hecho de que una función sea continua no implica que sea diferenciable*. Sin embargo, la afirmación recíproca es cierta: *si* f(x) *es diferenciable en un punto* x = c, *se sigue que es continua en* x = c. Así que, diferenciabilidad implica continuidad, pero no al revés. No daremos una demostración de este resultado, aunque es muy importante.

EJERCICIOS 1-6

(1-4) Utilice la gráfica de $f(x)$ de la página 490 para estimar los siguientes límites.

1. *a*) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to 2} f(x)$

2. *a*) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -3} f(x)$

3. *a*) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to 1} f(x)$

4. *a*) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(5-16) Calcule los siguientes límites laterales.

5. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1}$ **6.** $\lim_{x \to 1/2^-} \sqrt{1 - 2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 4/3^+} \sqrt{4 - 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -1^-} \sqrt{x + 1}$

9. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

10. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x + 1}{|x + 1|}$

11. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x - 3|}{9 - x^2}$

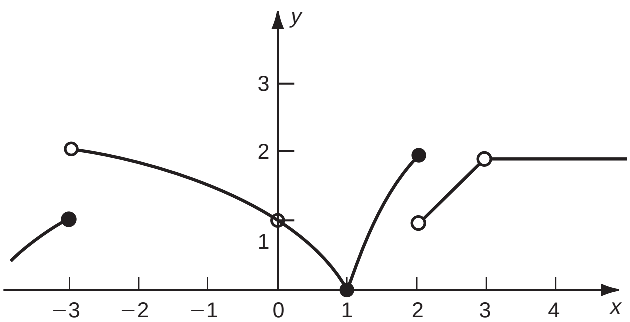
12. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{|x - 2|}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$

14. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x - 1}{x + 1}$

15. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2 - x^2}{|x - 1|}$

16. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^3}$



(17-22) Estudie la continuidad de las siguientes funciones en $x = 0$ y bosqueje sus gráficas.

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$

18. $g(x) = \sqrt{x^2}$

19. $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$

20. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

21. $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

22. $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(23-28) Analice la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados y bosqueje sus gráficas.

23. $f(x) = x^2 + 4x + 7, \quad x = 1$

24. $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}; \quad x = 1$

25. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}; \; x = 3$

26. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{para } x \neq 2 \\ 4 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad x = 2$

27. $f(x) = \begin{cases} 5x + 7 & \text{para } x > 2 \\ 2x + 3 & \text{para } x \leq 2 \end{cases}; \quad x = 2$

28. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{para } x < 1 \\ 10 - 2x & \text{para } x > 1 \end{cases}; \quad x = 1$

(29-35) Encuentre los valores de x (si los hay) para los cuales las siguientes funciones no son continuas.

29. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - x - 6}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 4}$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(36-37) Encuentre el valor de h en los siguientes ejercicios, de modo que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \neq 1 \\ h & \text{si } x = 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - hx & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(38-41) Determine los valores de x para los cuales las funciones siguientes no son diferenciables.

*38. $f(x) = x^{2/3}$

*39. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ x & \text{para } x > 0 \end{cases}$

*40. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$

*41. $f(x) = (x - 1)^{1/2}$

42. *(Función de costo de la electricidad)* Una compañía de luz fija una tarifa de 10¢ por unidad de electricidad para las primeras 50 unidades utilizadas por un usuario doméstico cada mes y de 3¢ por unidad en el caso de cantidades por encima de ésta. Si $c(x)$ denota el costo de x unidades por mes, estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $c(x)$ y bosqueje su gráfica.

43. *(Costo de un empleado)* Denotemos con $f(x)$ el costo por semana que una empresa gasta en el contrato de un empleado que trabaja x horas por semana. Este costo consta de (1) un costo fijo de \$20, (2) un sueldo de \$6 por hora durante las primeras 35 horas, (3) un salario extra de \$9 la hora por horas laboradas más allá de las 35 pero sin llegar a las 45 horas, y (4) un salario extraordinario de \$12 por horas laboradas sobrepasando las 45. Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ y dibuje su gráfica.

44. *(Impuesto sobre la renta)* En cierto país las tasas de impuestos graduadas son como siguen: 10% en los primeros 2000 denarios (la unidad monetaria); 25% en los siguientes 4000, y 40% en cualquier ingreso adicional. Exprese la cantidad de impuesto sobre la renta como una función del ingreso y dibuje la gráfica de esta función.

45. *(Impuesto sobre la renta)* En el país del ejercicio 44 se ha propuesto cambiar el grupo de impuestos a lo siguiente: no hay impuesto en los primeros 2000 denarios, 30% en los siguientes 4000 y 50% en cualquier ingreso adicional. Exprese el cambio en el impuesto sobre la renta individual como una función de su ingreso y dibuje la gráfica de la función.

46. *(Función de costo discontinua)* Para niveles de producción superiores a las 1000 unidades semanales, la función de costo de una compañía es $C(x) = 5000 + 8x$, donde x es el nivel de producción. Si $x > 1000$ se debe abrir una nueva línea de montaje y la función de costo se vuelve $C(x) = 9000 + 6x$. Si las unidades son vendidas a \$16 cada una, construya la función de utilidades de la empresa. Haga la gráfica de esta función y analice su continuidad.

47. *(Tarifas postales)* Una carta de primera clase tiene un costo de l2¢ por gramo o fracción menor. Denotemos con $f(x)$ el costo de enviar una carta que pesa x gramos. Analice la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ y bosqueje su gráfica $0 < x \leq 8$.

REPASO DEL CAPÍTULO 1

Términos, símbolos y conceptos importantes

1.1 Incremento, Δx, Δy
Tasa de cambio promedio de y con respecto a x: $\Delta y/\Delta x$
Velocidad promedio.

1.2 Velocidad instantánea.
Límite (o valor límite): $\lim_{x\to c} f(x)$
Funciones continuas.

1.3 Derivada: Para $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}y, y', f'(x)$

Diferenciabilidad, diferenciación.
Pendiente de la recta tangente.

1.4 Fórmulas para las derivadas de potencias.

1.5 Costo marginal, $C'(x)$. Costo promedio, $\overline{C}(x) = C(x)/x$
Ingreso marginal, $R'(x)$. Utilidad marginal, $P'(x)$
Productividad marginal, rendimiento marginal, tasa marginal de impuestos.
Propensión marginal al ahorro y al consumo.

1.6 Límites laterales:
límites por arriba (por la derecha), $\lim_{x\to c+} f(x)$;
límite por abajo (por la izquierda), $\lim_{x\to c-} f(x)$;
Continuidad, discontinuidad, discontinuidad de salto.

Fórmulas

$\Delta x = x_2 - x_1$

Si $y = f(x)$, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Velocidad promedio $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Velocidad instantánea $= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Teoremas sobre límites:

$$\lim_{x\to c} (mx + b) = mc + b$$

$$\lim_{x\to c} bf(x) = b \lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$$

$$\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Para $y = f(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Fórmula para la potencia: Si $y = x^n$ $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Teoremas de diferenciación:

$\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$, en donde c es una constante.

$\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

$P(x) = R(x) - C(x)$, $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si el límite de una función existe en un punto, entonces la función debe estar definida en ese punto.

b) Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

c) Si una función tiene derivada en un punto, entonces, en ese punto la función está definida.

d) La derivada de un producto de funciones es igual al producto de las derivadas.

e) Si $f(x) = |x|$, entonces $f'(0) = 0$

f) Si y es una función de x, entonces el valor de Δy (el incremento de y) debe ser positivo.

g) El significado de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ es que $f(x)$ está cerca de A cuando x se aproxima a a por la izquierda.

h) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ también existe.

i) Si una función es continua en un punto, entonces es diferenciable en ese punto.

j) Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto.

k) Si la función $f(x)$ no está definida en $x = c$, entonces no existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = \pm 1$

2. Determine Δy cuando $y = 2^x$ y $\Delta x = 1$

3. Determine Δy cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$, en el caso en que $y = x^2 + 2x - 5$

4. *(Función de costo)* Para la función de costo $C(x) = 2500 + 8x$, determine el incremento en el costo cuando la producción se incrementa de 50 a 55 unidades. Calcule el costo promedio por unidad adicional.

5. *(Función de costo)* Para la función de costo $C(x) = 2000 + 5x + 0.02x^2$, determine el incremento en el costo cuando la producción se incrementa de 50 a 55 unidades. Calcule el costo promedio por unidad adicional.

6. *(Caída libre)* En el caso de un objeto que cae bajo la acción de la gravedad, calcule la velocidad promedio entre $t = 5$ y $t = 6$ segundos. ($t = 0$ es el instante en que se suelta el objeto).

(7-20) Evalúe los siguientes límites.

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x + 3}$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

12. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$

13. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

14. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

15. $\lim\limits_{x \to -12} \dfrac{x^2 + x - 132}{x + 12}$

16. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + x - 30}$

17. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + x - 30}$

***18.** $\lim\limits_{x \to 24} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 7}{\sqrt{x + 1} - 5}$

19. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3x - 5}}{x - 2}$

(21-24) Calcule las derivadas de las funciones siguientes, usando la definición de la derivada como un límite.

21. $f(x) = (x - 1)^{1/2}$

22. $f(x) = (x - 1)^{-1/2}$

23. $f(x) = (x - 1)^{-2}$

24. $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

(25-36) Calcule las derivadas de las funciones siguientes con respecto al argumento dado.

25. $x^2\sqrt{x}$

26. x^{e^2}

27. $\dfrac{(x - 2)(x + 2)}{\sqrt{x}}$

***28.** $\dfrac{(x^2 - 4)(x + 2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

29. $(p^3 - 3p)(p^2 + 1)$

30. $\dfrac{(p-3)(p+5)}{p^2}$

***31.** $\dfrac{u}{u^2 - 1}$

32. $\sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[3]{m^2}$

***33.** $\dfrac{(y^2+1)(y+5)}{3y^2}$

34. $(u^2 + 2u - 15)(u^2 - u - 30)$

***35.** $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

***36.** $\dfrac{u^2}{1 + \frac{u+1}{u-1}}$

(37-40) Determine el costo marginal de cada una de las siguientes funciones de costo.

37. $C(x) = 800 + 5x^2$

38. $C(x) = 0.1x^3 - 2x^2 + 10x - 2500$

39. $C(x) = 0.2x^2 + 8x + 500$

40. $C(x) = 0.001x^3 - 0.01x^2 + 25x + 700$

(41-42) Determine la utilidad marginal dada cada una de las siguientes ecuaciones de demanda.

41. $2x + 25p = 2000$

42. $x^2 + 200p = 500$

(43-44) Calcule la utilidad marginal en los problemas 41 y 42, si la función de costo es $C(x) = 1500 + 8x$.

45. *(Precio marginal)* Si la función de demanda está dada por $p = f(x)$, entonces dp/dx se denomina *función de precio marginal*. La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 2000 - 5x - x^2$. Determine el precio marginal a un nivel de demanda de 15 unidades.

46. *(Precio marginal)* La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 25/(x+1)$. Determine la función de precio marginal.

47. *(Demanda marginal)* Si la relación de demanda está dada por $x = f(p)$, entonces dx/dp se denomina la *demanda marginal*. Si la ecuación de demanda de cierto producto es $p^2 + 2x = 50$, determine la demanda marginal a un nivel de precio de $p = 2$. Interprete el resultado.

48. *(Productividad física)* La *productividad física p* se define como la producción física de un número dado de trabajadores o máquinas y es, entonces, una función del número x de trabajadores o máquinas. En el caso de cierta empresa, $p = 200(x + 1)^2 - 100$. Determine la productividad física marginal dp/dx cuando $x = 2$.

(49-51) Investigue si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican.

49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ -\dfrac{1}{6} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}, \quad x = 2$

50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ \dfrac{5}{8} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}, \quad x = 3$

51. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x = -2$

52. Determine el valor de a si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 7 & \text{si} \quad x = 2, \end{cases}$$

es continua en $x = 2$

53. Si $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x}$ para $x \neq -1$ y $f(x)$ es continua en $x = -1$, determine $f(-1)$

54. *(Costo de un empleado)* Sea $c(x)$ el costo que tiene una empresa en el contrato de un empleado que trabaja x horas en una semana. Este costo consta de (1) un costo fijo de \$30, (2) un sueldo de \$8 por hora para las primeras 40 horas, (3) un sueldo extra de \$12 la hora por cada hora laborada por encima de 40 y hasta la 50 y (4) un salario extraordinario de \$15 por cada hora laborada, por arriba de la hora 50. Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $c(x)$ y dibuje su gráfica.

55. *(Tasa de interés)* En un estado el impuesto a la venta se establece de la manera siguiente.

Para ventas menores de \$1500 el impuesto es de 3%. Para cantidades de \$3500 o más, y hasta \$6500 el impuesto es 5% y para cantidades mayores a \$6500, el impuesto es de 8%. Construya la gráfica de la tasa de impuesto como una función del monto de la venta, y analice su continuidad y diferenciabilidad.

CASO DE ESTUDIO

PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

En el caso que se planteó al inicio del capítulo, que trataba con el número de infectados por cierta enfermedad, se tenía el modelo

$$I(t) = 10000 - 4500(t^{-1/2} + 1), \text{ para } t \geq 1$$

La primera pregunta, "¿cuántos casos se tienen en la primera semana?", se puede responder ya sea por medio de la gráfica, o bien, con el cálculo de $I(1)$; por lo que

a) El número de enfermos en la semana 1 es I(1) = 1000.

El aumento de casos de la semana 4 a la semana 6 no es más que $\Delta(I) = I(6) - I(4)$, es decir,

b) El aumento de casos de la semana 4 a la semana 6 es igual a

$$I(6) - I(4) \approx 413 \text{ casos}$$

Ahora bien, la rapidez de propagación promedio de la enfermedad, del tiempo t al Δt, como se vio en la sección 11.1, está dada por

$$\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \frac{I(t + \Delta t}{\Delta t}$$

Así que para responder la tercera pregunta:

c) En promedio, ¿qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 1 a la 2?

Se sustituye $t = 1$, $\Delta t = 1$ en la expresión anterior y se obtiene

Rapidez promedio de propagación, $\dfrac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \dfrac{I(2) - I(1)}{1} \approx$ 1318 individuos/semana.

La pregunta, "¿qué tan rápido se propaga la enfermedad en la semana 9?", es diferente a la anterior, pues aquí se pide la rapidez instantánea, es decir, se debe analizar cuando $\Delta t \to 0$. Por lo que si aplicamos las fórmulas estudiadas en este capítulo a I(t), se obtiene

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(10{,}000 - 4500(t^{-1/2} + 1) = \frac{4500}{2}\ t^{-3/2}$$

Por tanto,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{2250}{\sqrt{t^{-3}}}$$

Así que,

d) y *e*) En la semana 9 la enfermedad se propaga con una rapidez de

$$\frac{dI(9)}{dt} = \frac{2250}{27} \approx 83.33 \text{ individuos/semana}$$

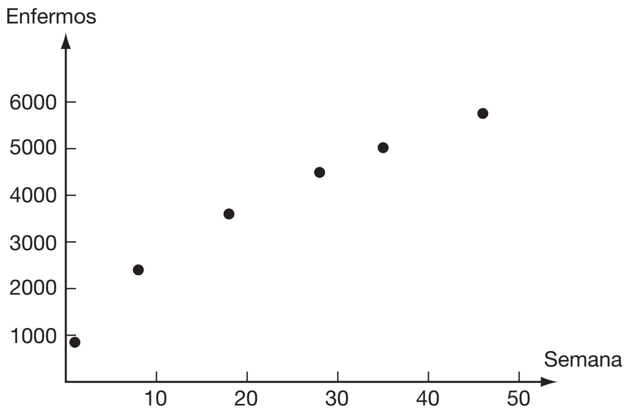
y en la semana 50,

$$\frac{dI(9)}{dt} = \frac{2250}{\sqrt{50^3}} \approx 6.36 \text{ individuos/semana}$$

Así, la doctora Socorro recopiló información en la población y en realidad el número de enfermos, en algunas semanas fue la siguiente

Semana	Núm. enfermos
1	848
8	2400
18	3600
28	4490
35	5020
46	5755

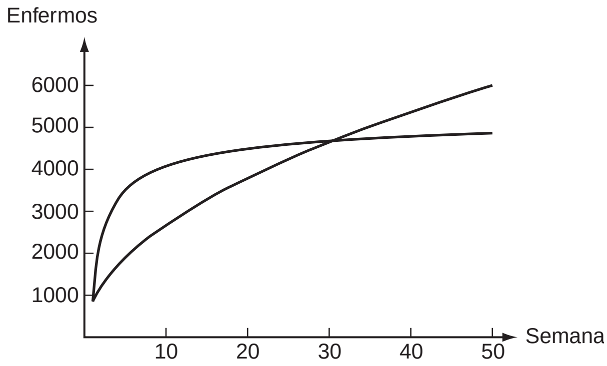
La gráfica de los puntos aparece a continuación,



Con estos puntos y técnicas estadísticas, que analizará en otros cursos, se determinó que un modelo más adecuado para el número de enfermos en la semana t es

$$E(t) = 6000\sqrt{\frac{t}{50}}, \text{ para } 1 \leq t \leq 50$$

Con base en este modelo, responda las mismas preguntas que para el primer modelo. Por otro lado, analice ambos modelos y diga que sucede a la larga, es decir, qué sucede cuando t es 100, 1000, 10000, etcétera. La gráfica de ambas funciones se muestra a continuación.



¿Puede identificar cuál es la gráfica de cada una de las funciones, $I(t)$ y $E(t)$?

CAPÍTULO 2

Cálculo de derivadas

Propensión marginal al ahorro

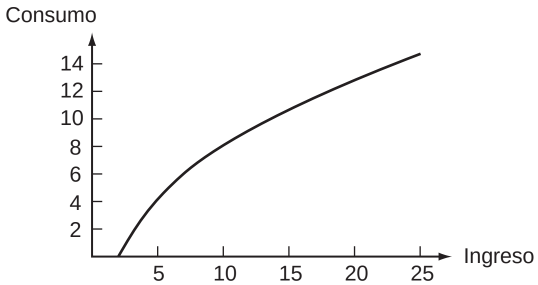
Al igual que los individuos, una población tiene ingresos y gastos. Ahora bien, en forma simplificada, se puede decir que el destino de estos ingresos son dos; el primero, los gastos en bienes, servicios, etcétera y, si queda algo, el segundo destino es el ahorro. Como se vio en el capítulo anterior, si C es la cantidad total gastada por la población e I es el ingreso total recibido, entonces,

$$S = I - C$$

es la cantidad ahorrada. Considere una población que, con base en información previa, su función de consumo se puede modelar mediante

$$C(I) = 2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I), \text{ para } I \geq 2$$

con I en miles de millones de dólares. La gráfica de esta función aparece a continuación.



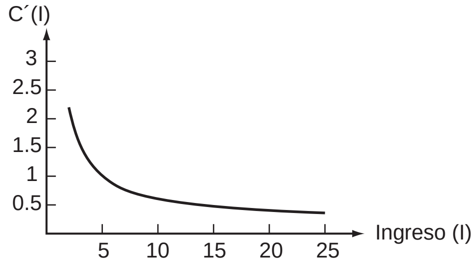
Esta gráfica, como era de esperarse, *dice* que si el ingreso aumenta, entonces, el gasto en consumo también aumenta.

a) Pero, ¿qué tan rápido aumenta el consumo con respecto al aumento del ingreso?

b) Y si, como se dijo al inicio, el otro destino de los ingresos es el ahorro, ¿esta población tiende a ahorrar más o menos cuando el ingreso aumenta?

c) Si el ingreso total de la población es de 25 mil millones de dólares, ¿cuál es la propensión marginal a ahorrar? ¿Y cuál es la propensión marginal a consumir?

Para ayudarle a responder estas preguntas, le será útil analizar la derivada de la función $C(I)$ con respecto de I. Después de estudiar este capítulo, y repasar la sección 1.5, *Análisis marginal*, responda las preguntas anteriores. A continuación se muestra la gráfica de $\dfrac{dC(I)}{dI}$, la cual le ayudará a responder las preguntas que se plantearon.



TEMARIO

■ 2-1 DERIVADAS DE PRODUCTOS Y COCIENTES

En esta sección, probaremos y explicaremos el uso de dos importantes teoremas que representan técnicas útiles cuando se requiere derivar funciones complicadas.

TEOREMA 1 (LA REGLA DEL PRODUCTO) Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones de x diferenciables, se sigue que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

Esto es,

$$\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$$

En términos verbales, *la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.*

EJEMPLO 1 Calcule y' si $y = (5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7)$

Solución La función dada y puede escribirse como un producto $y = uv$ si hacemos

$$u = 5x^2 - 3x \quad \text{y} \quad v = 2x^3 + 8x + 7$$

Así, por los métodos de la sección 11-4, advertimos que

$$u' = 10x - 3 \quad \text{y} \quad v' = 6x^2 + 8$$

Por consiguiente, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} y' &= uv' + vu' \\ &= (5x^2 - 3x)(6x^2 + 8) + (2x^3 + 8x + 7)(10x - 3) \\ &= 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21 \end{aligned}$$

Observe el procedimiento aquí:

1. Identifique u y v tal que $y = uv$.

2. Calcule u' y v'.

3. Utilice la regla del producto para determinar y'.

En el ejemplo 1, en realidad no necesitábamos la regla del producto para calcular la derivada de la función dada. Pudimos calcular y' eliminando los paréntesis del lado derecho y expresando a y como una suma de potencias de x.

$$\begin{aligned} y &= (5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7) \\ &= 10x^5 - 6x^4 + 40x^3 + 11x^2 - 21x \end{aligned}$$

☛ **1.** Utilice la regla del producto para derivar las funciones siguientes:
a) $(2x - 1)(x^2 + 1)$
b) $(3t^2 + 2t + 1)(t^2 - 2)$
c) $x^2 g(x)$

$$y' = 10(5x^4) - 6(4x^3) + 40(3x^2) + 11(2x) - 21(1)$$
$$= 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21$$

Los ejemplos que se dan a continuación también ilustran la utilización de la regla del producto aun cuando podrían resolverse empleando los métodos del capítulo 1. Sin embargo, más tarde nos toparemos con funciones para las que ese método alternativo no existe. En estos casos, será esencial utilizar la regla del producto con la finalidad de calcular las derivadas.

EJEMPLO 2 Dada $f(t) = (2\sqrt{t} + 1)(t^2 + 3)$, determine $f'(t)$.

Solución Usamos la regla del producto con $u = 2\sqrt{t} + 1 = 2t^{1/2} + 1$ y $v = t^2 + 3$. Entonces $u'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}t^{-1/2} = t^{-1/2}$ y $v'(t) = 2t$. Tenemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= uv' + vu' \\ &= (2t^{1/2} + 1)(2t) + (t^2 + 3)(t^{-1/2}) \\ &= 4t^{3/2} + 2t + t^{3/2} + 3t^{-1/2} \\ &= 5t^{3/2} + 2t + \frac{3}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$ ☛ **1**

Respuesta
a) $(2x - 1) \cdot 2x + 2 \cdot (x^2 + 1) = 6x^2 - 2x + 2$
b) $(3t^2 + 2t + 1) \cdot 2t + (6t + 2)(t^2 - 2) = 12t^3 + 6t^2 - 10t - 4$
c) $x^2 g'(x) + 2xg(x)$

La ecuación de demanda da el precio p en que una cantidad x de cierto artículo puede venderse durante cierto periodo. En general, podemos escribir $p = f(x)$. El ingreso originado en la venta de este número de artículos es

$$R = xp$$

Dado que R está expresado como el producto de dos cantidades, el ingreso marginal, que es la derivada de R con respecto a x, puede obtenerse mediante la regla del producto.

$$\frac{dR}{dx} = p\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(p) = 1 \cdot p + x\frac{dp}{dx} = p + x\frac{dp}{dx}$$

La derivada dp/dx puede calcularse a partir de la relación de la demanda. Es el cambio en el precio por unidad de aumento en la demanda que se necesita para producir un cambio muy pequeño en la demanda.

☛ **2.** Calcule el ingreso marginal para la relación de demanda $p = 10 - 2x - \frac{1}{2}x^2$

EJEMPLO 3 ***(Ingreso marginal)*** Si la ecuación de demanda es lineal, tenemos

$$p = a - bx$$

donde a y b son dos constantes positivas. Así, $dp/dx = -b$ y el ingreso marginal es

$$\frac{dR}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} = a - bx + x(-b) = a - 2bx$$

Observemos que el ingreso marginal en este ejemplo puede calcularse directamente.

$$R = xp = x(a - bx) = ax - bx^2$$

En consecuencia, $R'(x) = a - 2bx$, como antes. ☛ **2**

Respuesta $R'(x) = p + x(-2 - x) = 10 - 4x - \frac{3}{2}x^2$

☛ **3.** Utilice la regla del cociente para derivar las siguientes funciones:

a) $\dfrac{x}{x-1}$ *b*) $\dfrac{2t+5}{2t-5}$

c) $\dfrac{1-u^3}{1+u^3}$

Observación La regla del producto se extiende de manera directa al producto de más de dos funciones. Para el producto de tres funciones se transforma en

$$(u\upsilon w)' = u'\upsilon w + u\upsilon' w + u\upsilon w'$$

TEOREMA 2 (REGLA DEL COCIENTE) Si $u(x)$ y $\upsilon(x)$ son dos funciones diferenciables de x, se sigue que

$$\boxed{\frac{du}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{d\upsilon}{dx}}{\upsilon^2}}$$

o bien,

$$\boxed{\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon^2}}$$

Esto es, *la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

EJEMPLO 4 Calcule y' si

$$y = \frac{x^2+1}{x^3+4}$$

Solución Primero necesitamos seleccionar u y υ tales que $y = u/\upsilon$. En este caso: $u = x^2 + 1$ y $\upsilon = x^3 + 4$. Entonces, tenemos que $u' = 2x$ y $\upsilon' = 3x^2$. Finalmente, de la regla del cociente tenemos

$$y' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2} = \frac{(x^3+4)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{(x^3+4)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 8x - (3x^4 + 3x^2)}{(x^3+4)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 8x}{(x^3+4)^2} \quad ☛ \ 3$$

Respuesta

a) $\dfrac{(x-1)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

b) $\dfrac{(2t-5)\cdot 2 - (2t+5)\cdot 2}{(2t-5)^2} = \dfrac{-20}{(2t-5)^2}$

c) $\dfrac{(1+u^3)\cdot(-3u^2) - (1-u^3)(3u^2)}{(1+u^3)^2} = \dfrac{-6u^2}{(1+u^3)^2}$

EJEMPLO 5 (Ingreso *per capita*) El producto nacional bruto (PNB) de cierto país está aumentando con el tiempo de acuerdo con la fórmula $I = 100 + t$ (miles de millones de dólares). La población en el instante t es $P = 75 + 2t$ (millones). Encuentre la tasa de cambio del ingreso *per capita* en el instante t.

Solución El ingreso *per capita*, que denotamos por y, es igual al PNB dividido entre el tamaño de la población:

$$y = \frac{I}{P} = \frac{100+t}{75+2t} \qquad \text{(miles de dólares)}$$

Para derivar esto utilizamos la regla del cociente con $y = u/\upsilon$, en donde $u = 100 + t$ y $\upsilon = 75 + 2t$. Entonces, $du/dt = 1$ y $d\upsilon/dt = 2$. Con base en la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2} = \frac{(75+2t)\cdot 1 - (100+t)\cdot 2}{(75+2t)^2} = \frac{-125}{(75+2t)^2} \quad ☛ \ 4$$

☛ **4.** En el ejemplo 5, calcule la tasa de crecimiento *per capita* si el crecimiento de la población se reduce a $P = 75 + t$ millones en el instante t.

Respuesta $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-25}{(75+t)^2}$

EJEMPLO 6 Determine dy/dx si $y = \dfrac{(x+1)(x^3-2x)}{x-1}$

Solución Primero escriba $y = u/v$, como un cociente, con $u = (x+1)(x^3 - 2x)$ y $v = x - 1$. Entonces, de la regla del cociente,

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Inmediatamente tenemos $v' = 1$, pero para encontrar u' utilizamos la regla del producto. Escribimos $u = u_1v_1$ en donde $u_1 = x + 1$ y $v_1 = x^3 - 2x$. Entonces, $u_1' = 1$ y $v_1' = 3x^2 - 2$, de modo que

$$\begin{aligned} u' = u_1v_1' + v_1u_1' &= (x+1)(3x^2-2) + (x^3-2x)\cdot 1 \\ &= 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-1)(4x^3+3x^2-4x-2) - (x+1)(x^3-2x)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Sea $C(x)$ la función de costo de cierto artículo (esto es, $C(x)$ es el costo de fabricar y vender una cantidad x de los artículos en cuestión). La derivada $C'(x)$ da el costo marginal. La razón $C(x)/x$ es igual al costo total dividido entre la cantidad producida y de esta manera representa el costo promedio por unidad producida de estos artículos. La derivada de esta razón con respecto a x se denomina el **costo promedio marginal**. Da el incremento en el costo promedio por artículo por cada incremento de una unidad en la cantidad producida.

Con el objetivo de calcular el costo marginal promedio de la función de costo, debemos derivar la razón $C(x)/x$. Para esto, podemos usar la regla del cociente.

$$\begin{aligned} \text{Costo promedio marginal} = \frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) &= \frac{x\dfrac{d}{dx}C(x) - C(x)\dfrac{d}{dx}x}{x^2} \\ &= \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] \end{aligned}$$

Observe que en esta expresión final los paréntesis cuadrados representan la diferencia entre el costo marginal, $C'(x)$ y el costo promedio, $C(x)/x$. Por tanto, concluimos que el *costo promedio marginal es igual al costo marginal menos el costo promedio todo dividido entre la cantidad producida.* En particular, el costo promedio marginal es cero cuando el costo marginal y el costo promedio son iguales.

EJEMPLO 7 **(*Costo promedio marginal*)** Calcule el costo promedio marginal para la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

cuando $x = 100$.

Solución $C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$ y así

$$C'(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40 = 10$$

$$C(100) = 0.001(100)^3 - 0.3(100)^2 + 40(100) + 1000 = 3000$$

En consecuencia, el costo promedio marginal cuando $x = 100$ es

$$\frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{100}\left[10 - \frac{3000}{100}\right] = -0.2$$

☛ **5.** Encuentre el costo marginal, costo promedio y costo marginal promedio para la función de costo $C(x) = 5 + x + 2x^2$
Verifique que
$\overline{C}'(x) = x^{-1}[C'(x) - \overline{C}(x)]$

Así, cuando $x = 100$, el costo promedio por unidad decrece en 0.2 por cada unidad adicional producida. (También podemos calcular esta respuesta haciendo $\overline{C}(x) = C(x)/x$, y después derivar la expresión resultante). ☛ **5**

Demostraciones de los teoremas

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Sea $y = u \cdot v$. Entonces,

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) \\ &= uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \\ &= y + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \end{aligned}$$

Restamos y de ambos lados.

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{vx} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(Observe que las partes *a*) y *c*) del teorema 3 de la sección 1-2 se aplicaron). El último término de la derecha es cero ya que, $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, de modo que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

como se requería.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Sea $y = u/v$. Cuando x se incrementó a $x + \Delta x$, y se incrementa a $y + \Delta y$, u a $u + \Delta u$, y v a $v + \Delta v$, por lo que

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

Restamos $y = u/v$ a ambos lados.

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

Respuesta
$C'(x) = 1 + 4x$,
$\overline{C}'(x) = 5x^{-1} + 1 + 2x$,
$\overline{C}'(x) = -5x^{-2} + 2$

Dividiendo entre Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Si ahora tomamos los límites cuando $\Delta x \to 0$, de modo que $\Delta y/\Delta x \to dy/dx$, $\Delta u/\Delta x \to du/dx$ y $\Delta v/\Delta x \to dv/dx$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{du}{dx}}{v(v + 0)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

dado que el otro incremento Δv en el denominador tiende a cero. Así que, con esto probamos el teorema.

EJERCICIOS 2-1

(1-12) Usando la regla del producto, calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable respectiva.

1. $y = (x + 1)(x^3 + 3)$

2. $y = (x^3 + 6x^2)(x^2 - 1)$

3. $u = (7x + 1)(2 - 3x)$

4. $u = (x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1)$

5. $f(x) = (x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$

6. $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

7. $f(x) = (3x + 7)(x - 1)^2$

8. $y = (t^2 + 1)\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

9. $u = \left(y + \dfrac{3}{y}\right)(y^2 - 5)$

10. $g(t) = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)\left(5t^2 - \dfrac{1}{t^2}\right)$

11. $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 1)(2x - 3)$

12. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 1)(x^3 + 7)$

(13-16) *(Ingreso marginal)* Usando la regla del producto, calcule el ingreso marginal de las siguientes relaciones de demanda.

13. $x = 1000 - 2p$

14. $p = 40 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

15. $x = 4000 - 10\sqrt{p}$

16. $p = 15 - 0.1x^{0.6} - 0.3x^{0.3}$

17. *(Tasa de cambio del PNB)* El ingreso *per cápita* promedio en cierto país al tiempo t es igual a $W = 6000 + 500t + 10t^2$. (W está en dólares y t en años.) El tamaño de la población en el instante t (en millones) es $P = 10 + 0.2t + 0.01t^2$. Calcule la tasa de cambio del PNB en el instante t. (*Sugerencia*: PNB $=$ tamaño de la población $\times$ ingreso *per capita*).

18. *(Tasa de cambio del PNB)* Repita el ejercicio 17 en el caso en que $W = 1000 + 60t + t^2$ y $P = 4 + 0.1t + 0.01t^2$.

(19-30) Use la regla del cociente con el objetivo de calcular las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

19. $y = \dfrac{3}{2x + 7}$

20. $f(t) = \dfrac{5t}{2 - 3t}$

21. $y = \dfrac{u}{u + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 3}$

23. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

24. $g(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 3}$

25. $y = \dfrac{t^2 - 7t}{t - 5}$

26. $y = \dfrac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$

27. $x = \dfrac{\sqrt{u} + 1}{\sqrt{u} - 1}$

28. $t = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

29. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

30. $y = \dfrac{1}{(t + 1)^2}$

31. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)(2x + 3)}{3x - 1}$ **32.** $g(t) = \dfrac{(t + 3)(3t^2 + 5)}{2 - 3t}$

33. $y = \dfrac{(2u^3 + 7)(3u^2 - 5)}{u^2 + 1}$ **34.** $y = \dfrac{(t + 1/t)(t^2 + 7t)}{3t + 4}$

(35-38) Determine la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica.

35. $y = (3x^2 + 7)(x + 2)$ en $(-1, 10)$

36. $y = x + 1/x)(x^2 - 1)$ en $x = 1$

37. $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$ en $(3, 3)$

38. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ en $x = -2$

39. Determine los puntos sobre la curva $f(x)= \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en donde las rectas tangentes son horizontales.

40. Determine los puntos sobre la curva $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 5}$ en donde las rectas tangentes son horizontales.

41. Determine los puntos sobre la curva $y = \dfrac{x - 3}{x + 3}$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de $\frac{1}{6}$.

42. Determine los puntos sobre la curva $y = (x + 1/x)(x^2 + 6x)$ en donde las rectas tangentes tengan una pendiente de -8 unidades.

(43-44) *(Costo promedio marginal)* Encuentre los costos marginales de las funciones de costo siguientes (*a, b* y *c* son constantes).

43. $C(x) = a + bx$ **44.** $C(x) = a + bx^n$

45. *(Ingreso per cápita)* Si el PNB de una nación al tiempo t es $I = 10 + 0.4t + 0.01t^2$ (en miles de millones de dólares) y el tamaño de la población (en millones) es $P = 4 + 0.1t + 0.01t^2$, determine la tasa de cambio del ingreso *per capita.*

46. Mediante la regla del cociente *demuestre* que $(d/dx)(x^{-7}) = -7x^{-8}$. (*Sugerencia*: Escriba $x^{-7} = 1/x^7$).

***47.** Generalice el ejercicio 46 para probar que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ cuando n es cualquier entero negativo. (*Sugerencia*: Escriba $x^n = 1/x^m$, en donde $m = -n$).

48. *(Salario real)* El salario real de cierto grupo de trabajadores aumentó de acuerdo con la fórmula $W(t) = 3 + \frac{1}{2}t$ entre 1970 y 1980, donde t es el tiempo transcurrido en años a partir de 1970. Durante este tiempo, el índice de precios al consumidor estuvo dado por $I(t) = 100 + 3t + \frac{1}{2}t^2$. El salario real es igual a $100\ W(t)/I(t)$ cuando se ajusta por la inflación. Calcule la razón de cambio de este salario real en 1970, 1975 y 1980.

49. *(Granja piscícola)* El peso de cierto lote de peces está dado por $W = nw$, donde n es el tamaño del lote y w es el peso promedio de cada pez. Si n y w cambian con el tiempo de acuerdo con las fórmulas $n = (2t^2 + 3)$ y $w = (t^2 - t + 2)$, encuentre la razón de cambio de W con respecto al tiempo.

50. *(Física)* La temperatura absoluta T de un gas está dada por $T = cPV$, donde P es la presión, V el volumen y c es alguna constante que depende de la masa del gas. Si $P = (t^2 + 1)$ y $V = (2t + t^{-1})$ como funciones del tiempo t, encuentre la razón de cambio de T con respecto a t.

51. *(Biología)* La densidad de algas en un estanque de agua es igual a n/V, donde n es el número de algas y V es el volumen de agua en el estanque. Si n y V varían con el tiempo t de acuerdo con las fórmulas $n = \sqrt{t}$ y $V = \sqrt{t} + 1$, calcule la razón de cambio de la densidad.

52. *(Ecología)* Sea x el tamaño de cierta población de depredadores y y el tamaño de la población que le sirve de alimento. Como funciones del tiempo t, $x = t^2 + 4$ y $y = 2t^2 - 3t$. Sea u el número de presas por cada depredador. Encuentre la razón de cambio de u.

■ 2-2 LA REGLA DE LA CADENA

Sea $y = f(u)$ una función de u y $u = g(x)$ una función de x. Entonces, podemos escribir

$$y = f[g(x)]$$

que representa y como una función de x, denominada la *función composición de* f *y* g. Se denota por $(f \circ g)(x)$.

Las derivadas de funciones compuestas pueden calcularse mediante el teorema siguiente. Se dará una demostración al final de esta sección.

TEOREMA 1 (REGLA DE LA CADENA) Si y es una función de u y u es una función de x, entonces

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

La regla de la cadena representa la que es probablemente la más útil de todas las herramientas de diferenciación, como pronto se hará evidente. Es un recurso que se utiliza con frecuencia al manejar el cálculo diferencial y el lector deberá dominar su aplicación tan pronto como sea posible. Cuando la usamos al derivar una función complicada, es necesario reconocer que la función dada se puede escribir como la composición de dos funciones más simples. Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior.

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx cuando $y = (x^2 + 1)^5$

Solución Podríamos resolver este problema desarrollando $(x^2 + 1)^5$ como un polinomio en x. Sin embargo, es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

Observe que y puede expresarse como la composición de dos funciones en la siguiente forma:

$$y = u^5 \quad \text{donde} \quad u = x^2 + 1$$

Se sigue que

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

☛ **6.** Derive las funciones siguientes. Indique cómo descompuso cada función
a) $y = (1 - x^2)^3$
b) $y = \sqrt{2x + 1}$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2x = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4$$ ☛ **6**

Si $y = f(u)$, otra manera de escribir la regla de la cadena es

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx}$$

(dado que $f'(u) = dy/du$). En particular, si $f(u) = u^n$, $f'(u) = nu^{n-1}$. Así tenemos el caso siguiente de la regla de la cadena.

$$\boxed{\text{Si} \quad y = [u(x)]^n, \quad \text{entonces } \frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}}$$

Respuesta
a) $y = u^3, \quad u = 1 - x^2,$
$$\frac{dy}{dx} = -6x(1 - x^2)^2$$
b) $y = \sqrt{u} = u^{1/2}, \quad u = 2x + 1,$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

La composición puede pensarse como tener diferentes capas que deben desprenderse una por una. La capa exterior de la función corresponde a la parte que debe calcularse al último al evaluarla. Por ejemplo, si $y = (x^2 + 1)^5$, la parte *exterior*

de la función es la quinta potencia y la parte *interior* es $(x^2 + 1)$. Al evaluar y para un valor particular de x, debemos evaluar en primer término la parte interior, $x^2 + 1$, y luego elevar a la quinta potencia. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces la *interior* $= x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ y $y = (\textit{interior})^5 = 5^5 = 3125$.

Al derivar una función compuesta, debemos derivar primero la capa exterior de la función, y después multiplicar por la derivada de la parte interior. En estos términos verbales podemos reformular la regla de la cadena en la siguiente forma:

> Si $y = f(\textit{interior})$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = f'(\textit{interior}) \cdot$ (derivada del *interior* con respecto a x)
>
> Si $y = (\textit{interior})^n$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = n(\textit{interior})^{n-1} \cdot$ (derivada del *interior* con respecto a x)

Aquí *interior* significa cualquier función diferenciable de x.

Por ejemplo, volviendo a $y = (x^2 + 1)^5$, pudimos tomar el *interior* como $x^2 + 1$ y $y = f(\textit{interior}) = (\textit{interior})^5$. Se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5(\textit{interior})^4 \cdot \frac{d}{dx}(\textit{interior})\\ &= 5(x^2 + 1)^4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1)\\ &= 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4\end{aligned}$$

lo que da la misma respuesta que antes.

EJEMPLO 2 Dada $f(t) = 1/\sqrt{t^2 + 3}$, calcule $f'(t)$

Solución Sea $u = t^2 + 3$, de modo que $y = f(t) = 1/\sqrt{u} = u^{-1/2}$. Se sigue que

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{2}u^{-3/2} = -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2}$$

Así que, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}\\ &= -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2} \cdot 2t = -t(t^2 + 3)^{-3/2}\end{aligned}$$

En **forma alternativa**, podemos resolver directamente,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 3}} = (t^2 + 3)^{-1/2}$$

Aquí el *interior* es $(t^2 + 3)$ y el *exterior* es la potencia $-\frac{1}{2}$. Usando la fórmula de la potencia para derivar la parte exterior, tenemos

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-1/2-1} \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 3)$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2 + 3)^{-3/2} \cdot 2t = t(t^2 + 3)^{-3/2}$$

EJEMPLO 3 Dada $y = (x^2 + 5x + 1)(2 - x^2)^4$, calcule dy/dx.

Solución Primero escribimos y como un producto, $y = uv$, en donde $u = x^2 + 5x + 1$ y $v = (2 - x^2)^4$. De inmediato, tenemos $u' = 2x + 5$, pero para encontrar v' debemos utilizar la regla de la cadena. Para esto, la parte *interior* $= (2 - x^2)$ y la parte *exterior* de v es la potencia cuarta. Así,

$$v' = \frac{d}{dx}(2 - x^2)^4 = 4(2 - x^2)^3 \cdot \frac{d}{dx}(2 - x^2)$$
$$= 4(2 - x^2)^3 \cdot (-2x) = -8x(2 - x^2)^3$$

Entonces, finalmente, de la regla del producto,

$$y' = uv' + vu' = (x^2 + 5x + 1)[-8x(2 - x^2)^3] + (2 - x^2)^4(2x + 5)$$

Entonces, factorizando:

$$\frac{dy}{dx} = (2 - x^2)^3[-8x(x^2 + 5x + 1) + (2x + 5)(2 - x^2)]$$
$$= (2 - x^2)^3[10 - 4x - 45x^2 - 10x^3] \quad ☛ \ \mathbf{7}$$

☛ **7.** Derive las funciones siguientes:
a) $y = x\sqrt{2x + 1}$
b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x + 1}}$

EJEMPLO 4 Determine dy/dx si $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3$

Solución Aquí tenemos una alternativa de cómo dividir esta función. Podemos escribir y como una función compuesta,

$$y = u^3, \quad u = \frac{x - 1}{x + 1} \tag{1}$$

y luego utilizar la regla de la cadena. De manera alterna, podemos escribir $y = u/v$ en donde $u = (x - 1)^3$ y $v = (x + 1)^3$ y luego utilizar la regla del cociente. O una tercera alternativa es escribir $y = uv$ en donde $u = (x - 1)^3$ y $v = (x + 1)^{-3}$ y utilizar la regla del producto. Usaremos el primero de estos métodos, pero usted podría verificar que los otros métodos dan la misma respuesta.

De las ecuaciones (1), por medio de la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2\frac{du}{dx} = 3\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2\frac{du}{dx}$$

Respuesta
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{(2x + 1)^{3/2}}$

Para determinar du/dx escribimos $u = u_1/v_1$ en donde $u_1 = x - 1$ y $v_1 = x + 1$. Entonces, por medio de la regla del cociente

$$\frac{du}{dx} = \frac{v_1 u_1' - u_1 v_1'}{v_1^2} = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

☛ **8.** Resuelva el ejemplo 4 utilizando la regla del cociente o la regla del producto.

Así, finalmente,

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{2}{(x+1)^2} = 6\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \quad ☛ \mathbf{8}$$

EJEMPLO 5 ***(Utilidad marginal)*** Un fabricante de calzado puede utilizar su planta para producir zapatos para dama o caballero. Si él fabrica x (en miles de pares) zapatos para caballero y y (en miles de pares) zapatos para dama a la semana, entonces, x y y están relacionados por la ecuación

$$2x^2 + y^2 = 25$$

(Ésta es la ecuación de transformación del producto). Si la utilidad es de \$10 por cada par de zapatos, calcule la utilidad marginal con respecto a x si $x = 2$.

Solución La utilidad semanal P en miles de dólares está dada por

$$P = 10x + 10y$$

dado que cada mil pares de zapatos se traducen en diez mil dólares de utilidad, así $(x + y)$ miles de pares darán $10(x + y)$ miles de dólares de utilidad. Pero

$$y^2 = 25 - 2x^2$$

o bien,

$$y = \sqrt{25 - 2x^2}$$

Por consiguiente, podemos expresar P sólo en términos de x como

$$P = 10x + 10\sqrt{25 - 2x^2}$$

La utilidad marginal con respecto a x no es otra cosa que la derivada dP/dx. Mide el incremento en la utilidad por unidad de incremento en x cuando x, la producción de calzado para caballeros, sufre un pequeño incremento. Esto es,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}[10x + 10(25 - 2x^2)^{1/2}]$$

Con el objetivo de derivar el segundo término, debemos aplicar la regla de la cadena con *interior* $= (25 - 2x^2)$

$$\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2} = \tfrac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(25 - 2x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(25 - 2x^2)^{-1/2}(-4x)$$
$$= -2x(25 - 2x^2)^{-1/2}$$

Respuesta El primer paso es:
Regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^3 \cdot 3(x-1)^2 - (x-1)^3 \cdot 3(x+1)^2}{[(x+1)^3]^2}$$

Regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-3} \cdot 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \cdot [-3(x+1)^{-4}]$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dx} &= 10 + 10\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2}\\ &= 10 + 10[-2x(25 - 2x^2)^{-1/2}]\\ &= 10 - 20x(25 - 2x^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

Si $x = 2$, el valor de y es

$$y = \sqrt{25 - 2x^2} = \sqrt{25 - 2(4)} = 17 = 4.1$$

Por tanto, la empresa está produciendo 2000 pares de zapatos para caballero y 4100 pares de zapatos para dama por semana. Su utilidad semanal es

$$P = 10(x + y) = 10(2 + 4.1) = 61$$

(o \$61,000). La utilidad marginal es

$$\frac{dP}{dx} = 10 - 20(2)[25 - 2(4)]^{-1/2} = 10 - \frac{40}{\sqrt{17}} = 0.30$$

Así que un incremento de Δx miles de pares de zapatos para caballero produce un incremento aproximado de (0.30) Δx miles de dólares en la utilidad.

Tasas relacionadas

Sea $y = f(x)$ y supongamos que x varía como una función del tiempo t. Así, dado que y es una función de x, y también variará con el tiempo. Aplicando la regla de la cadena, es posible encontrar una expresión para la tasa en que y varía en términos de la tasa a la cual x varía. Debido a que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$$

☛ **9.** Suponga que $y = \sqrt{x + 2}$ Encuentre dy/dt si $x = 2$ y $dx/dt = 0.5$

tenemos una relación directa entre las dos tasas dy/dt y dx/dt. Ésta se denomina la ecuación de **tasas relacionadas**. ☛ ***9***

EJEMPLO 6 (*Tasas relacionadas*) Una empresa tiene la función de costo $C(x) = 25 + 2x - \frac{1}{20}x^2$, en donde x es el nivel de producción. Si éste es igual a 5 actualmente y está creciendo a una tasa de 0.7 por año, calcule la tasa en que los costos de producción se están elevando.

Solución Sabemos que $dx/dt = 0.7$ (cuando el tiempo se mide en años). El costo marginal está dado por

$$\frac{dC}{dx} = 2 - \frac{x}{10}$$

Por consiguiente,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(2 - \frac{x}{10}\right)\frac{dx}{dt}$$

Respuesta 0.125

☛ **10.** Repita el ejemplo 6 para la función de costo $C(x) = 12 + 5\sqrt{x} + 3x$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos

$$\frac{dC}{dt} = \left(2 - \frac{5}{10}\right)(0.7) = 1.05$$

Así que los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1.05 por año. ☛ **10**

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA La demostración de la regla de la cadena, cuando se presenta en forma detallada, es un poco más complicada que la dada aquí. Por tanto, incluimos una demostración que, si bien cubre la mayoría de los casos que consideraremos, tiene algunas restricciones en su rango de aplicabilidad.

Sea Δx un incremento en x. Puesto que u y y son funciones de x, variarán siempre que x lo haga, de modo que denotaremos sus incrementos por Δu y Δy. Por tanto, a condición de que $\Delta u \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Hacemos ahora que $\Delta x \to 0$. En este límite, también tenemos que $\Delta u \to 0$ y que $\Delta y \to 0$, y así

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= \left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= \left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

como se requería.

La razón de que esta demostración esté incompleta estriba en la suposición de que $\Delta u \neq 0$. Para la mayoría de las funciones $u(x)$, nunca se dará el caso de que Δu se haga cero si Δx es muy pequeño (pero $\Delta x \neq 0$). Sin embargo, es posible que una función $u(x)$ pueda tener la peculiaridad de que Δu se haga cero repetidas veces a medida que $\Delta x \to 0$. Cuando se presentan tales funciones, la demostración dada deja de ser válida. Es posible modificar la demostración con la finalidad de cubrir casos como éste, pero no lo haremos aquí.

Respuesta $(\frac{1}{2}\sqrt{5} + 3)(0.7) \approx 2.88$

EJERCICIOS 2-2

(1-36) Calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

1. $y = (3x + 5)^7$

2. $y = \sqrt{5 - 2t}$

3. $u = (2x^2 + 1)^{3/2}$

4. $x = (y^3 + 7)^6$

5. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^4}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$

7. $h(t) = \sqrt{t^2 + a^2}$

8. $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$

9. $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$

10. $y = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^{10}$

11. $y = \left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)^5$

12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + 9}}$

13. $y = (x^2 + 1)^{0.6}$

14. $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$

15. $u = \sqrt[3]{t^3 - \dfrac{1}{t^3}}$

16. $y = \sqrt{1 + x \ln 2}$

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

18. $g(x) = (x^4 + 16)^{1/4}$

19. $G(u) = (u^2 + 1)^3(2u + 1)$

20. $H(y) = (2y^2 + 3)^6(5y + 2)$

21. $f(x) = (x + 1)^3(2x + 1)^4$

22. $g(x) = (3x - 1)^5(2x + 3)^4$

23. $f(x) = x^3(x^2 + 1)^7$

24. $u = x^2 \sqrt{x^3 + a^3}$

25. $y = [(x + 1)(x + 2) + 3]^4$

26. $u = [(y - 1)(2y + 3) + 7]^5$

27. $y = \left(\dfrac{3x + 2}{x - 1}\right)^7$

28. $y = \left(\dfrac{t}{t + 1}\right)^6$

29. $y = \left(\dfrac{u^2 + 1}{u + 1}\right)^3$

30. $y = \sqrt{\dfrac{3x + 7}{5 + 2x}}$

31. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^2}{x + 1}$

32. $x = \dfrac{t^2 + 1}{(t + 1)^3}$

33. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

34. $y = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$

35. $x = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 4}}$

36. $Z = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{x + 2}$

37. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = (2x + 1)^4(2 - 3x)^3$

38. Encuentre $f'(1)$ si $f(x) = (x - 1)^7(x^2 + 3)^4$

(39-42) Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto que se indica.

39. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $(4, 5)$

40. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 16}$ en $x = 5$

41. $(x) = (x - 2/x)^4$ en $x = 2$

42. $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 16}}$ en $x = -3$

(43-44) *(Costo marginal)* Determine el costo marginal para las siguientes funciones de costo.

43. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

44. $C(x) = 20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

(45-46) *(Costo promedio marginal)* Calcule el costo promedio marginal de las funciones de costo de los ejercicios 43 y 44.

(47-48) *(Ingreso marginal)* Determine el ingreso marginal de las siguientes relaciones de demanda.

47. $p = \sqrt{100 - 0.1x - 10^{-4}x^2}$

48. $x = 1000(8 - p)^{1/3}$

49. *(Tasa de incremento del costo)* La función de costo de un fabricante es

$$C(x) = 2000 + 10x - 0.1x^2 + 0.002x^3$$

Si el nivel de producción actual es $x = 100$ y está creciendo a una tasa de 2 al mes, calcule la tasa en que los costos de producción están creciendo.

50. *(Tasa de incremento del ingreso)* El fabricante del ejercicio 49 tiene una función de ingreso dada por $R(x) = 65x - 0.05x^2$. Determine la tasa en que está creciendo el ingreso y la tasa en que la utilidad aumenta.

51. *(Tasa de cambio del ingreso)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $2p + x = 300$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una. Si la demanda cambia a una tasa de 2 unidades por año cuando la demanda alcanza 40 unidades, ¿a qué tasa está cambiando el ingreso si la compañía ajusta su precio a la demanda cambiante?

52. *(Tasa de cambio de la utilidad)* En el ejercicio 51, los costos de la compañía son de $(225 + 60x)$ dólares para producir x unidades. Cuando el nivel de demanda alcanzó las 40 unidades y la demanda se incrementa a una tasa de 2 unidades por año, determine la tasa en que está cambiando la utilidad.

53. *(Contaminación de petróleo)* El área de una mancha circular de petróleo, que proviene de la ruptura de un oleoducto, crece a razón de 30 kilómetros cuadrados por hora. ¿Con cuánta rapidez crece el radio cuando éste es de 5 kilómetros?

54. Se está inflando un balón esférico. Si el radio es de 10 pulgadas y está creciendo a razón de 2 pulgadas cada 5 segundos, ¿con qué razón crece el volumen?

55. *(Productividad)* La productividad laboral unitaria P (producción por hora de trabajo) es una función del capital in-

vertido K en planta y maquinaria. Suponga que $P = 0.5K^2 + K - 5$, donde K está medido en millones de dólares y P en dólares por hora de trabajo. Si K es 10 y está creciendo a razón de 2 por año, ¿con qué rapidez está creciendo P?

***56.** *(Requerimiento laboral)* Una compañía observa que cuando el volumen de su producción semanal es x miles de unidades, el número de sus empleados es $N = 500(1 + 0.01x + 0.00005x^2)$. Si la producción semanal crece 5% al año, ¿a qué razón crece el número de empleados cuando se están produciendo 100,000 unidades semanales? ¿O cuando se producen 200,000 semanales?

57. *(Reacción química)* La razón R en la cual una reacción química progresa es igual a $\sqrt{T}$, donde T es la temperatura. Si T varía con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $T = (3t + 1)/(t + 2)$, encuentre la razón de cambio de T con respecto a t.

58. *(Germinación de semillas)* La proporción P de semillas que germinan depende de la temperatura T del suelo. Supongamos que bajo ciertas condiciones $P = T^7$ y que T varía con respecto a la profundidad de x debajo de la superficie como $T = (x^2 + 3)/(x + 3)$. Encuentre la razón de cambio de P con respecto a la profundidad.

59. *(Nuevas viviendas)* El número de nuevas viviendas por año N (millones) depende de la tasa hipotecaria de interés anual r de acuerdo con la fórmula

$$N(r) = \frac{50}{100 + r^2}$$

a) Si actualmente r es 10 y se incrementa a una tasa de 0.25 por mes, ¿cuál es la tasa de cambio de N?

b) Si $r(t) = 12 - \dfrac{8t}{t + 24}$, en donde t es el tiempo en meses, calcule la tasa de cambio de N en $t = 6$.

■ 2-3 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En la figura 1 aparece la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ en el caso típico en que $a > 1$. Cuando $x = 0$, $y = a^0 = 1$, de modo que la gráfica pasa por el punto (0, 1) para cualquier valor de a. La pendiente de la gráfica al cruzar el eje y en este punto varía, dependiendo de a: cuanto más grande sea el valor de a, mayor será la pendiente en $x = 0$.

Escojamos el valor particular de a tal que la pendiente de la gráfica en $x = 0$ sea igual a 1. Para este valor de a, la gráfica está inclinada hacia arriba y su pendiente forma un ángulo de 45° con la horizontal al cruzar el eje y. La condición que debe satisfacerse es que la derivada $f'(0)$ debe ser igual a 1. De esta manera, puesto que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

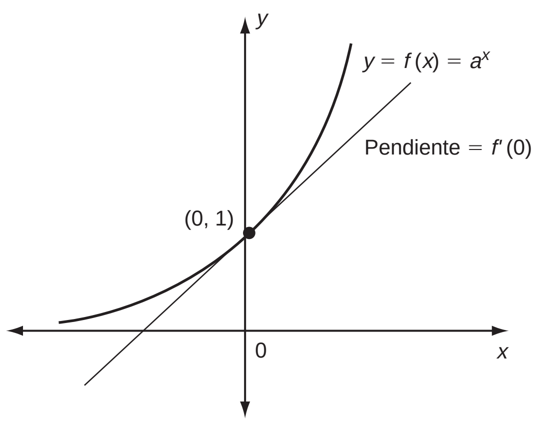


FIGURA 1

☛ **11.** Utilice su calculadora con $\Delta x = 0.001$ o 0.0001 para encontrar los valores aproximados del límite en la ecuación (1) cuando $a = 2$, cuando $a = 2.5$ y cuando $a = 3$

tenemos que

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - a^0}{\Delta x}$$

Ya que $a^0 = 1$, la condición $f'(0) = 1$ se reduce a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \tag{1}$$

Esta condición determinará el valor de a para nosotros. Resulta que el valor de a que satisface esta condición es $a = e = 2.71828\ldots$, la base de las funciones exponencial y logaritmo naturales. La demostración de esta afirmación está más allá del alcance del libro; sin embargo, la tabla 1 nos convence bastante de su validez. Sabemos que $e = 2.7183$ hasta cuatro cifras decimales, y en la tabla calculamos los valores de la cantidad $[(2.7183)^{\Delta x} - 1]/\Delta x$ para una serie de valores de Δx empezando con $\Delta x = 1$ y decreciendo hasta $\Delta x = 0.0001$. Es claro que, a medida que Δx se hace más pequeño, la cantidad en cuestión está cada vez más cerca de 1. Por consiguiente, la ecuación (1) es casi exacta tomando $a = 2.7183$. Un cálculo más exacto demostraría que la cantidad $[(2.7183)^{\Delta x} - 1]/\Delta x$, en realidad se aproxima al valor límite 1.00000668 (hasta ocho cifras decimales) cuando $\Delta x \to 0$. ☛ **11**

En vez de tomar $a = 2.7183$, pudimos considerar aun una mejor aproximación del número irracional e (por ejemplo, $a = 2.718282$, que es correcto hasta siete cifras decimales). Así pues, al construir una tabla similar a la anterior, podríamos convencernos que el valor límite de $(a^{\Delta x} - 1)/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$ está aún más cerca de 1. (De hecho, con $a = 2.718282$, este valor límite es igual a 1.0000000631 hasta diez cifras decimales). Por ello podemos estar seguros de que la condición (1) se cumple eligiendo como base de la expresión exponencial a e.

Calculemos ahora la derivada de la función e^x para cualquier x. Haciendo $y = e^x$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

TABLA 1

Δx	$\frac{(2.7183)^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$
1	1.7183
0.1	1.0517
0.01	1.0050
0.001	1.0005
0.0001	1.000057

Respuesta 0.693, 0.916 y 1.099

Pero usando una propiedad básica de los exponentes, $e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x}$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$$

después de usar la ecuación (1) (con e en vez de a).

Así, tenemos el importante resultado de que la derivada de la función e^x es la función misma.

$$\boxed{\text{Si} \quad y = e^x, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = e^x}$$

La razón de que la función exponencial natural sea tan importante descansa en esta propiedad de que su derivada siempre es igual a la función misma. Es, excepto por un factor constante, la única función que posee esta propiedad. Es este hecho el que explica nuestro interés en el número e y en las expresiones exponenciales y logarítmicas que tienen a e como base.

EJEMPLO 1 Determine dy/dx si $y = xe^x$

Solución Para derivar la función xe^x, debemos aplicar la regla del producto dado que podemos escribir $y = uv$ con $u = x$ y $v = e^x$. Así,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dx} = e^x$$

☛ **12.** Derive

a) $y = x^3 e^x$ *b*) $y = \dfrac{e^x}{x + 1}$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (x)(e^x) + (e^x)(1) = (x + 1)e^x$$ ☛ **12**

EJEMPLO 2 Determine dy/dx si $y = e^{x^2}$

Solución Aquí separamos a y como una función compuesta, $y = e^u$ en donde $u = x^2$. (Nuevamente, para ver esto, piense como evalúa y. Lo último que calcularía sería la función exponencial, de modo que ésta es la parte exterior). Entonces,

$$\frac{dy}{du} = e^u, \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

así, con base en la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

Por el mismo método que utilizamos en el ejemplo 2, la regla de la cadena nos permite derivar funciones compuestas del tipo $e^{u(x)}$, en donde $u(x)$ es cualquier función de x diferenciable. Obtenemos lo siguiente:

Respuesta *a*) $x^2(x + 3)e^x$

b) $\dfrac{xe^x}{(x + 1)^2}$

$$\boxed{\text{Si} \quad y = e^{u(x)}, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = e^{u(x)}u'(x)}$$

En forma verbal podemos decir

$$\frac{d}{dx}\, e^{\text{interior}} = e^{\text{interior}} \frac{d}{dx}\,(\textit{interior})$$

☛ **13.** Derive
a) $y = e^{3x}$ *b*) $y = e^{x^3 - 3x^2}$
c) $y = xe^{1/x}$

en donde *interior* es cualquier función de x diferenciable. ☛ **13**

Un caso particular que es bueno recordar es $u(x) = kx$, en donde k es una constante. Para esto tenemos

$$\text{Si} \quad y = e^{kx} \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = ke^{kx} \tag{2}$$

EJEMPLO 3 ***(Utilidades y publicidad)*** Cierto artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad de \$10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1 - e^{-0.001x})$. Si P denota la utilidad neta por las ventas, calcule dP/dx e interprete esta derivada. Evalúe dP/dx si $x = 1000$ y cuando $x = 3000$.

Solución Puesto que cada artículo produce una utilidad de \$10, la utilidad bruta total originada por las ventas se obtiene multiplicando el número de ventas por \$10. La utilidad neta se obtiene, entonces, restando los costos de publicidad:

$$P = 10{,}000(1 - e^{-0.001x}) - x$$

Por tanto,

$$\frac{dP}{dx} = -10{,}000 \frac{d}{dx}\,(e^{-0.001x}) - 1 = -10{,}000(-0.001e^{-0.001x}) - 1$$

en donde hemos utilizado la ecuación (2) con k reemplazada por –0.001. Entonces,

$$\frac{dP}{dx} = 10e^{-0.001x} - 1$$

La interpretación de esta derivada es que mide la tasa de cambio de la utilidad neta con respecto a los gastos de publicidad. En otras palabras, dP/dx da el incremento en el número de dólares en la utilidad neta producida por un gasto adicional (en dólares) en publicidad.

Cuando $x = 1000$,

$$\frac{dP}{dx} = 10e^{-1} - 1 = 10(0.3679) - 1 = 2.679$$

De modo que si se gastan \$1000 en publicidad, cada dólar adicional produce un incremento de \$2.68 en la utilidad neta.

Si $x = 3000$,

$$\frac{dP}{dx} = 10(e^{-3}) - 1 = 10(0.0498) - 1 = -0.502$$

Respuesta *a*) $3e^{3x}$
b) $(3x^2 - 6x)e^{x^3 - 3x^2}$
c) $(1 - x^{-1})e^{1/x}$

Por tanto, cuando se gastan \$3000 en publicidad, un gasto adicional en dólares produce de esta manera una disminución de \$0.50 en la utilidad neta. En este caso, es claro que el fabricante no debería hacer más publicidad (el costo de publicidad extra incrementaría en exceso el valor de las ventas adicionales que se generarían). De hecho, cuando $x = 3000$, ya se está gastando de más en publicidad.

EJEMPLO 4 ***(Crecimiento de la población)*** Una población crece de acuerdo con el modelo logístico tal que en el instante t su tamaño y está dado por

$$y = y_m(1 + Ce^{-kt})^{-1}$$

con y_m, C y k constantes. Calcule la tasa de crecimiento de la población en el instante t.

Solución La tasa de crecimiento requerida es dy/dt. Observemos que y es una función compuesta de t de la forma

$$y = y_m\,(interior)^{-1}, \qquad interior = 1 + Ce^{-kt}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y_m\,(-1)(interior)^{-2}\,\frac{d}{dt}\,(interior)\\ &= -y_m(1 + Ce^{-kt})^{-2}\,\frac{d}{dt}\,(1 + Ce^{-kt})\\ &= -y_m(1 + Ce^{-kt})^{-2}(-kCe^{-kt})\\ &= \frac{ky_mCe^{-kt}}{(1 + Ce^{-kt})^2}\end{aligned}$$

Nuevamente la ecuación (2) se ha utilizado para derivar e^{-kt}

Calculemos ahora la derivada de la función $y = \ln x$, la función logaritmo natural.

Si $y = \ln x$, entonces $x = e^y$. Derivemos esta segunda ecuación con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Pero, por la regla de la cadena, vemos que

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(e^y)\cdot\frac{dy}{dx} = e^y\frac{dy}{dx},$$

puesto que $(d/dy)(e^y) = e^y$. Por tanto, $e^y(dy/dx) = 1$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Concluyendo:

$$\boxed{\text{Si} \quad y = \ln x, \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

EJEMPLO 5 Calcule dy/dx si $y = \ln(x + c)$ en donde c es una constante.

☛ **14.** Derive

a) $y = x \ln x$

b) $y = x \ln (x + 1)$

c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Solución Tenemos que y es una función compuesta, con $y = \ln u$ y $u = x + c$. Así que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{u}\right) \cdot (1) = \frac{1}{x + c}$$ ☛ **14**

En general, la regla de la cadena nos permite derivar cualquier función compuesta de la forma $y = \ln u(x)$ de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot u'(x) = \frac{1}{u}u'(x)$$

Así, si $y = \ln u(x)$, entonces $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

De manera alternativa, en forma verbal,

$$\frac{d}{dx} \ln (\textit{interior}) = \frac{1}{\textit{interior}} \frac{d}{dx} (\textit{interior})$$

en donde *interior* indica cualquier función de x diferenciable.

EJEMPLO 6 Derive $\ln (x^2 + x - 2)$

Solución Aquí tomamos *interior* $= (x^2 + x - 2)$

$$\frac{d}{dx} \ln (x^2 + x - 2) = \frac{1}{(x^2 + x - 2)} \frac{d}{dx}(x^2 + x - 2)$$

$$= \frac{1}{(x^2 + x - 2)}(2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \ln x/x^2$, determine $f'(1)$

Solución Escribimos $f(x) = u/v$ en donde $u = \ln x$ y $v = x^2$. Entonces, $u' = 1/x$ y $v' = 2x$. De la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{x^2(1/x) - (\ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Por tanto,

$$f'(1) = \frac{1 - 2 \ln 1}{1^3} = 1$$

ya que $\ln 1 = 0$

Respuesta *a*) $1 + \ln x$

b) $\dfrac{x}{x + 1} + \ln (x + 1)$

c) $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

☛ **15.** Derive
a) $y = \ln[(x + 1)^2]$
b) $y = [\ln(x + 1)]^2$
c) $y = \ln[\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}]$

Cuando requerimos derivar el logaritmo de un producto o cociente de varias expresiones, a menudo es de utilidad simplificar la función dada aplicando, en primer término, las propiedades de logaritmos.

EJEMPLO 8 Calcule dy/dx cuando $y = \ln(e^x/\sqrt{x + 1})$

Solución Primero simplificamos y utilizando las propiedades de logaritmos

$$y = \ln\left(\frac{e^x}{\sqrt{x + 1}}\right) = \ln(e^x) - \ln(\sqrt{x + 1}) = x \ln e - \frac{1}{2}\ln(x + 1)$$

Por consiguiente (dado que $\ln e = 1$),

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x + 1) = 1 - \frac{1}{2(x + 1)}$$

Una solución alterna a este problema es escribir $y = \ln u$, en donde $u = e^x/\sqrt{x + 1}$, y luego utilizar la regla de la cadena para escribir $y' = (1/u)u'$. Lo dejamos para que se convenza por usted mismo de que este enfoque conduce a cálculos *mucho* más difíciles que los que acabamos de hacer. ☛ **15**

Respuesta *a*) $\dfrac{2}{x + 1}$

b) $\dfrac{2\ln(x + 1)}{x + 1}$

c) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

EJEMPLO 9 Determine dy/dx si $y = \log x$.

Solución Para derivar los logaritmos comunes, los expresamos en términos de logaritmo natural por medio de la fórmula de cambio de base.

$$y' = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Así pues,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} = \frac{0.4343}{x}$$

puesto que $1/\ln(10) = 1/2.3026\ldots = 0.4343\ldots$

☛ **16.** Derive
a) $y = \log_2 x$
b) $y = \ln(2^x)$ *c*) $y = 2^x$

Observe que en este ejemplo tuvimos que expresar el logaritmo común en términos de logaritmo natural antes de derivarlo. Esto también debe hacerse con los logaritmos de cualquier otra base, tales como $\log_a x$. Estas funciones deben expresarse en primer término como logaritmos naturales. De manera similar, una función exponencial general a^x debe escribirse como e^{kx} ($k = \ln a$) antes de derivarla. ☛ **16**

Ahora que hemos presentado las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica, resumimos las tres formas de la regla de la cadena que serán de mayor utilidad. En la tabla 2, *interior* representa cualquier función de x diferenciable.

Respuesta *a*) $\dfrac{1}{x \ln 2}$

b) $\ln 2$ *c*) $2^x \ln 2$

TABLA 2 ***Resumen de la regla de la cadena***

$f(x)$	$f'(x)$
$[u(x)]^n$	$n[u(x)]^{n-1}\,u'(x)$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}u'(x)$
$\ln u(x)$	$\dfrac{1}{u(x)}\,u'(x)$

o bien,

$f(x)$	$f'(x)$
$(interior)^n$	$n\,(interior)^{n-1}\,\dfrac{d}{dx}\,(interior)$
$e^{interior}$	$e^{interior}\,\dfrac{d}{dx}\,(interior)$
$\ln\,(interior)$	$\dfrac{1}{interior}\,\dfrac{d}{dx}\,(interior)$

EJERCICIOS 2-3

(1-66) Calcule dy/dx para cada una de las siguientes funciones.

1. $y = 7e^x$

2. $y = e^7$

3. $y = e^{3x}$

4. $y = \dfrac{1}{e^x}$

5. $y = e^{x^2}$

6. $y = e^{x^3+1}$

7. $y = e^{\sqrt{x}}$

8. $y = e^{1/x}$

9. $y = xe^x$

10. $y = xe^{-x^2}$

11. $y = x^2e^{-x}$

12. $y = \dfrac{e^x}{x}$

13. $y = \dfrac{x+1}{e^x}$

14. $y = \dfrac{e^{x^3}}{e^{x^2}}$

15. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x}$

16. $y = e^{x^2} + (x^2)^e$

17. $y = \dfrac{e^x}{x+2}$

18. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

19. $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

20. $y = 3\ln x$

21. $y = \dfrac{\ln x}{7}$

22. $y = \ln 2$

23. $y = \ln 3 + \sqrt{\log 4}$

24. $y = (\ln 3)(\ln x)$

25. $y = \dfrac{\ln x}{\ln 7}$

26. $y = \ln(3x+7)$

27. $y = \ln(x^2+5)$

28. $y = \ln(1+e^x)$

29. $y = (\ln x)^5$

30. $y = \sqrt{\ln x}$

31. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

32. $y = \dfrac{1}{1+\ln x}$

33. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$

34. $y = x^2\ln x$

35. $y = x\ln x^2$

36. $y = x(\ln x - 1)$

37. $y = x^2\ln(x^2+1)$

38. $y = x\ln(x+1)$

39. $y = e^x\ln x$

40. $y = e^x\ln(x^2+1)$

41. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

42. $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

43. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

44. $y = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

45. $y = \ln(3^{x^2})$

46. $y = \log(e^x)$

47. $y = x^2\log(e^x)$

48. $y = \dfrac{\log(e^x)}{x}$

49. $y = \dfrac{x^2}{\ln 3^x}$

50. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

51. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

52. $y = \ln\left[\dfrac{(x+2)e^{3x}}{x^2+1}\right]$

53. $y = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right]$

54. $y = \dfrac{\ln x^3}{\ln x^2}$

(*Sugerencia:* Utilice la fórmula de cambio de base en los ejercicios 55-66).

55. $y = a^x$

56. $y = 3^{x^2+1}$

57. $y = \log_a x$

58. $y = \log_3(x + 1)$

59. $y = \dfrac{\ln x}{\log x}$

60. $y = \dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$

61. $y = (\log_3 x)(\log_x 2)$

62. $y = \log_x x^2$

63. $y = \log_x(x + 1)$

64. $y = xa^{x^2}$

65. $y = x^2 \log x$

66. $y = \dfrac{\log x}{x}$

67. Encuentre $f'(1)$ si $f(x) = e^x \ln x$

68. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = e^{2x} \ln (x + 1)$

(69-72) Determine una ecuación de la recta tangente a las gráficas de las siguientes funciones en el punto indicado.

69. $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ en $(0, 0)$

70. $y = x \ln x$ en $x = 1$

71. $y = \ln (x^2 + 1)$ en $x = 0$

72. $y = \ln\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$ en $x = 0$

(73-76) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal para las siguientes relaciones de demanda.

72. $p = 5 - e^{0.1x}$

74. $p = 4 + e^{-0.1x}$

75. $x = 1000(2 - e^p)$

76. $x = 100 \ln (16 - p^2)$

(77-78) *(Costos marginales)* Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal para las siguientes funciones de costo.

77. $C(x) = 100 + x + e^{-0.5x}$

78. $C(x) = \sqrt{25 + x + \ln (x + 1)}$

79. *(Publicidad y ventas)* Para vender x unidades de su producto semanalmente, una compañía debe gastar A dólares semanales en publicidad, donde

$$A = 200 \ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$

Los objetos se venden a \$5 cada uno. La utilidad neta es entonces $R = 5x - A$. Calcule la razón de cambio de R con respecto a A.

80. *(Utilidad marginal)* Una compañía encuentra que su utilidad está dada por $R = 2pe^{-0.1p}$ cuando su producto está cotizado en p dólares por unidad. Encuentre la utilidad marginal con respecto al precio cuando p es

a) \$5 *b)* \$10 *c)* \$15

81. *(Ley de difusión de Fick)* De acuerdo con la ley de Fick, la difusión de un soluto a través de la membrana de una célula está gobernada por la ecuación $c'(t) = k[c_s - c(t)]$, donde $c(t)$ es la concentración del soluto en la célula, c_s es la concentración en el medio que la rodea y k es la constante que depende del tamaño de la célula y de las propiedades de la membrana. Pruebe que la función

$$c(t) = c_s + Ce^{-kt}$$

satisface esta ecuación para cualquier constante C. Relacione C con la concentración inicial $c(0)$.

***82.** *(Función de supervivencia)* El porcentaje de abejas que mueren durante el invierno de cierto grupo de colmenas es una función de la temperatura promedio. Supongamos que $p = 100e^{-0.1e^{0.1T}}$ donde T es la temperatura (en grados Celsius) y p es el porcentaje de abejas muertas. Si T decrece a razón de 2°C por semana, calcule la razón en la cual cambia p cuando $t = -10$°C.

83. *(Acidez)* El pH de una solución está definido como

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}]$$

donde [H] es la concentración de iones de hidrógeno. Es una medida de acidez, con pH = 7 la solución es neutral. Calcule los valores de $d\text{pH}/d[\text{H}]$ cuando $[\text{H}] = 10^{-4}$, 10^{-7} y 10^{-10}.

84. *(Medicina)* Después de una inyección, la concentración de cierta droga en la sangre de un paciente, cambia de acuerdo con la fórmula $c = pt^2e^{-kt}$, donde p y k son constantes. Calcule la razón de crecimiento de la concentración en el tiempo t.

***85.** *(Crecimiento de una población)* Cierta población crece de acuerdo con la fórmula

$$y = y_m(1 - Ce^{-kt})^3$$

en donde y_m, C y k son constantes. Calcule la tasa de crecimiento en el instante t y pruebe que

$$\frac{dy}{dt} = 3ky^{2/3}(y_m^{1/3} - y^{1/3})$$

***86.** *(Difusión de información)* La proporción p de médicos que han oído algo acerca de una nueva droga t meses después de que salió a la venta satisface la ecuación

$$\ln p - \ln(1 - p) = k(t - C)$$

en donde k y C son constantes. Exprese p como una función de t y calcule dp/dt. Demuestre que

$$\frac{dp}{dt} = kp\,(1 - p)$$

***87.** Pruebe que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ para cualquier número real n y $x > 0$. (*Sugerencia*: Escriba $x^n = e^{n \ln x}$).

■ 2-4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si $y = f(t)$ es una función del tiempo t, entonces, como hemos visto, la derivada $dy/dt = f'(t)$ representa la tasa en que y cambia. Por ejemplo, si $s = f(t)$ es la distancia recorrida por un móvil, $ds/dt = f'(t)$ da la tasa de cambio de la distancia o, en otras palabras, la *velocidad* instantánea del móvil. Denotaremos esta velocidad con v. Así que v también es una función de t, y (por regla) puede derivarse y resultar así la derivada dv/dt.

Al incrementarse la velocidad de un móvil, decimos que se *acelera*. Por ejemplo, cuando presionamos el pedal de aceleración de un automóvil, provocamos que aumente su velocidad, esto es, que vaya más aprisa. Supongamos que en un periodo de 5 segundos, el automóvil acelera de una velocidad de 20 pies/segundo (que es alrededor de 14 millas por hora) a 80 pies/segundo (55 millas por hora). El incremento en la velocidad es $\Delta v = 60$ pies/segundo y el incremento de tiempo $\Delta t =$ 5 segundos, de modo que la aceleración promedio está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60}{5} = 12 \text{ pies/segundo/segundo (o pies/segundo}^2\text{)}$$

Para un objeto en movimiento, a menudo nos interesa la *aceleración instantánea*, que se define como el límite de la aceleración promedio $\Delta v/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$. En otras palabras, la aceleración instantánea es la derivada dv/dt. Nos da la tasa instantánea en que la velocidad está cambiando.

Así que, con la finalidad calcular la aceleración, debemos derivar s y luego derivar el resultado una vez más. Tenemos que

$$\text{Aceleración} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

La aceleración se denomina la *segunda derivada* de s con respecto a t y por lo regular se denota con $f''(t)$ o por d^2s/dt^2.

En problemas en que intervienen objetos móviles, la segunda derivada, la aceleración, es una cantidad de mucha importancia. Por ejemplo, el grado de seguridad del sistema de frenos de un automóvil depende de la desaceleración que pueda lograr (la desaceleración no es otra cosa que una aceleración negativa). O los efectos fisiológicos del lanzamiento de un cohete en un astronauta dependen del nivel de aceleración a que esté sujeto. De mayor importancia, una de las leyes básicas de la

mecánica establece que cuando una fuerza actúa sobre un objeto, le produce una aceleración, y la magnitud de ésta es directamente proporcional al grado de la fuerza. Así pues, la aceleración interviene en las leyes básicas del movimiento de manera esencial.

Examinaremos las derivadas de orden superior en un contexto más abstracto. Sea $y = f(x)$ una función dada de x con derivada $dy/dx = f'(x)$. Con toda corrección, llamaremos a ésta la **primera derivada** de y con respecto a x. Si $f'(x)$ es una función de x diferenciable, su derivada se conoce como la **segunda derivada** de y con respecto a x. Si la segunda derivada es una función de x diferenciable, su derivada se denomina la **tercera derivada** de y, etcétera.

La primera y todas las derivadas de orden superior de y con respecto a x en general se denotan por uno de los tipos de notación siguientes:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad \ldots, \quad y^{(n)}$$

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x)$$

De la definición de las derivadas de orden más alto, es claro que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

etcétera.

EJEMPLO 1 Calcule la primera derivada y las de orden superior de $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

Solución Sea $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1) = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

La segunda derivada de y se obtiene derivando la primera derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^3 - 15x^2 + 14x) = 36x^2 - 30x + 14$$

Derivando otra vez, obtenemos la tercera derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(36x^2 - 30x + 14) = 72x - 30$$

Continuando este proceso, tenemos

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(72x - 30) = 72$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \frac{d}{dx}(72) = 0$$

☛ **17.** Calcule las derivadas hasta la de tercer orden:
a) $y = x^6$ *b*) $y = x^{-2}$
c) $y = x^2 \ln x$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

etcétera. ☛ **17**

En este ejemplo particular, todas las derivadas de orden más alto que la cuarta derivada son cero. Esto ocurre porque la cuarta derivada es una constante.

Respuesta
a) $y' = 6x^5$, $y'' = 30x^4$, $y''' = 120x^3$
b) $y' = -2x^{-3}$, $y'' = 6x^{-4}$, $y''' = -24x^{-5}$
c) $y' = 2x \ln x + x$, $y'' = 2 \ln x + 3$, $y''' = 2x^{-1}$

EJEMPLO 2 Calcule la segunda derivada de $f(t) = e^{t^2+1}$

Solución Con el propósito de calcular la segunda derivada, usamos la regla de la cadena. Así que

$$f'(t) = e^{t^2+1} \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 1) = e^{t^2+1} \cdot 2t = 2te^{t^2+1}$$

Ahora $f'(t)$ es el producto de dos funciones $u = 2t$ y $v = e^{t^2+1}$. Con la finalidad de calcular $f''(t)$, aplicaremos la regla del producto.

$$f''(t) = 2t\,\frac{d}{dt}(e^{t^2+1}) + e^{t^2+1}\,\frac{d}{dt}(2t) = 2t\left[e^{t^2+1}\,\frac{d}{dt}(t^2 + 1)\right] + e^{t^2+1}(2)$$

en donde usamos la regla de la cadena para derivar $v = e^{t^2+1}$

En consecuencia,

$$f''(t) = 2t[e^{t^2+1} \cdot 2t] + 2e^{t^2+1} = 2e^{t^2+1}(2t^2 + 1)$$

EJEMPLO 3 ***(Caída libre)*** Un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad desde una posición de reposo una distancia de $s = 16t^2$ a los t segundos. Calcule su aceleración.

Solución La velocidad después de t segundos es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(16t^2) = 32t \text{ pies/segundo}$$

Obtenemos la aceleración derivando de nuevo:

☛ **18.** Si la distancia recorrida en t segundos es $s = 12t - t^3$, calcule la distancia, velocidad y aceleración cuando $t = 1$, $t = 2$, y $t = 3$

$$\text{Aceleración} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(32t) = 32 \text{ pies/segundo}^2$$

Observe que es independiente de t: un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad tiene una aceleración constante de 32 pies/segundo^2. ☛ **18**

Respuesta
11, 9 y -6 en $t = 1$
16, 0 y -12 en $t = 2$
9, -15 y -18 en $t = 3$

Si $C(x)$ es la función de costo de un fabricante (el costo de producir x artículos), entonces, la primera derivada $C'(x)$ da el costo marginal, esto es, el costo por artículo adicional de un pequeño incremento en la producción. La segunda derivada $C''(x)$ representa la tasa de cambio del costo marginal con respecto al incremento de la producción. Tendremos más que decir sobre la interpretación de esta cantidad en el próximo capítulo; mientras tanto, el siguiente ejemplo ilustrará ciertos aspectos de su significado.

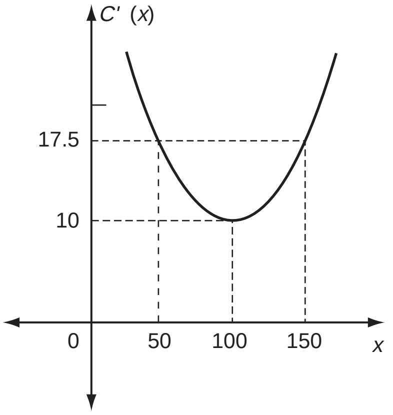


FIGURA 2

EJEMPLO 4 ***(Análisis de la función de costo)*** Para la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

el costo marginal es

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 40$$

La segunda derivada es

$$C''(x) = 0.006x - 0.6 = 0.006(x - 100)$$

Si $x = 150$, el costo marginal es $C'(150) = 17.5$. Más aún,

$$C''(150) = 0.006(150 - 100) = 0.3$$

Podemos interpretar que este resultado significa que cada unidad adicional producida conduce a un incremento de 0.3 en el costo marginal.

Observe que en este ejemplo, $C''(x) < 0$ cuando $x < 100$. Esto significa que si $x < 100$, el incremento en la producción lleva a un decrecimiento en el costo marginal. La gráfica de $C'(x)$ es una función de x que se inclina hacia abajo cuando $x < 100$. (Véase la figura 2). Sin embargo, si $x > 100$, la gráfica de $C'(x)$ se inclina hacia arriba, de modo que su pendiente, $C''(x)$, es positiva. En este caso, el incremento en la producción causa un incremento en el costo marginal.

EJERCICIOS 2-4

(1-4) Calcule las derivadas primera y de orden superior de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente correspondiente.

1. $y = 3x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 12$

2. $u = (t^2 + 1)^2$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$

4. $y(u) = (u^2 + 1)(3u - 2)$

5. Encuentre y'' si $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

6. Encuentre $f'''(t)$ si $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

7. Determine $g^{(4)}(u)$ si $g(u) = \dfrac{1}{3u + 1}$

8. Encuentre $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ si $y = \sqrt{t^2 + 1}$

9. Encuentre $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ si $u = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

10. Encuentre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ si $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $(x \neq 1)$

11. Encuentre y''' si $y = \ln x$

12. Encuentre $y^{(4)}$ si $y = x \ln x$

13. Determine $y^{(4)}$ si $y = xe^x$

14. Encuentre y'' si $y = e^{x^2}$

15. Determine y'' si $y = \ln [(x + 1)(x + 2)]$

16. Encuentre y''' si $y = x^3 + e^{2x}$

17. Encuentre y'' si $y = (x + 1)e^{-x}$

18. Encuentre y'' si $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

19. Si $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, donde a, b, m son constantes, entonces, pruebe que $d^2y/dx^2 = m^2y$

20. Si $y = x + 1/x$ entonces pruebe que $x^2y'' + xy' - 2 = 0$

21. *(Velocidad y aceleración)* Calcule la velocidad y la aceleración de un móvil para cada distancia dada s recorrida al tiempo t.

a) $s = 9t + 16t^2$

b) $s = 3t^3 + 7t^2 - 5t$

22. *(Velocidad y aceleración)* Suponga que la distancia s recorrida al tiempo t está dada por $s = t(3 - t)$.

a) ¿En qué instantes es cero la velocidad?

b) ¿Cuál es el valor de la aceleración cuando la velocidad es cero?

(23-24) *(Tasa de costo marginal)* Calcule el costo marginal y la tasa de cambio del costo marginal con respecto al volumen de producción en el caso de las siguientes funciones de costo.

23. $C(x) = 500 + 30x - 0.1x^2 + 0.002x^3$

24. $C(x) = 500 + 20x - 2x \ln x + 0.01x^2$

25. *(Tasa de costo promedio marginal)* Si $\overline{C}(x)$ es la función de costo promedio, demuestre que

$$\overline{C}''(x) = \frac{C'''(x)}{x} - \frac{2C'(x)}{x^2} + \frac{2C(x)}{x^3}$$

26. *(Tasa de ingreso marginal)* Si $R(x)$ es la función de ingreso, pruebe que

$$R''(x) = 2p'(x) + xp''(x)$$

en donde $p = p(x)$ es el precio como una función de la demanda.

***27.** *(Crecimiento de población)* Una población crece de acuerdo con la ecuación logística $y = y_m/(1 + Ce^{-kt})$, donde y_m, C y k son constantes. Calcule la razón con la cual cambia la razón de crecimiento de la población.

REPASO DEL CAPÍTULO 2

Términos, símbolos y conceptos clave

2.1 Regla del producto. Regla del cociente. Costo marginal promedio.

2.2 Regla de la cadena. Tasas relacionadas.

2.3 Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica.

2.4 Segunda derivada; aceleración. Derivadas tercera, cuarta y de orden superior.

Fórmulas

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \text{o} \quad (uv)' = uv' + vu'$$

Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{o bien,} \quad \left(\frac{u}{v}\right)^1 = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Ingreso marginal:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(px) = p + x\frac{dp}{dx}$$

Costo marginal promedio:

$$\frac{d\overline{C}}{dx} = \frac{1}{x}[C'(x) - \overline{C}(x)], \quad \text{en donde} \quad \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Regla de cadena: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Tasas relacionadas: Si $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Formas de la regla de la cadena:

Si $y = [u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$

Si $y = e^{kx}$, entonces $\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$

Si $y = e^{u(x)}$, entonces $\frac{dy}{dx} = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$

Si $y = \ln u(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

b) La derivada de un cociente de funciones, siempre que la función en el denominador no sea igual a cero, es el cociente de las derivadas.

c) La segunda derivada de una función lineal siempre es cero, sin importar en dónde se evalúe.

d) $\frac{d}{dx}(e^x) = xe^{x-1}$

e) $\frac{d}{dx}(x^e) = (e-1)x^e$

f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$

g) Si la aceleración de un móvil es cero, entonces su velocidad también es cero.

h) Si $y = [u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$

i) Si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $\frac{d^n}{dx^n}[p(x)]$ es una constante.

j) $\frac{d}{dx}(log(e)) = \frac{1}{e}$

k) Si $y = u(x)$, entonces $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$

(2-25) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones.

2. $y = (3x + 7)(5 - x^2)$

3. $y = (x^2 + 1)(x^2 - 3x^2)$

4. $y = \frac{3x^2 - 1}{1 + x}$

5. $y = \frac{e^x}{x - 1}$

6. $y = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^3}$

7. $y = \frac{\sqrt{4x + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

8. $y = \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

9. $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{\ln(x)}$

10. $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

***11.** $y = x^x$

***12.** $y = 2^x$

13. $y = x^3 e x^2$

14. $y = x\sqrt{x^2 + 9}$

15. $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{e^x}$

16. $y = \sqrt{\frac{e^{x^2} - 1}{1 + x}}$

17. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

18. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

19. $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

20. $y = (x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 10x + 20)^3$

21. $y = x^3 e^{-2x}$

22. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

23. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

24. $y = \frac{4x - 5}{6x^2 + 2x}$

25. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 - x}}$

(26-30) Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto que se indica.

26. $f(x) = e^{-x}$, en $x = 0$

27. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1 + 2x}}$, en $x = 4$

28. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, en $x = 1$

29. $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$, en $x = 0$

30. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x}}$, en $x = 3$

(31-34) Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para cada una de las siguientes funciones.

31. $y = e^{x^2}$

32. $y = (x^2 - 1)^3(x + 1)^2$

33. $y = \sqrt[3]{x^2 + 9}$

34. $y = \ln(\ln(x^2))$

(35-36) *(Ingreso marginal)* Calcule el ingreso marginal para cada una de las siguientes relaciones de demanda. a y b son constantes positivas.

35. $p = a - b \ln x$

36. $x = a - b \ln p$

(37-38) *(Costo marginal)* Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal de las siguientes funciones de costo.

37. $C(x) = 50 + 0.2x + x \ln(x)$

38. $C(x) = 40 + 25x + 0.01x^2$

39. *(Precio marginal)* La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 250/(x^2 + 1)$. Calcule el precio marginal a un nivel de demanda de 3 unidades.

40. *(Precio marginal)* Si x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una, en donde $\dfrac{x}{20} + \ln\left(\dfrac{p}{10} + 1\right) = 2$, $(0 \le x \le 40)$, calcule el precio marginal.

41. *(Demanda marginal)* Con la relación de demanda del problema anterior, calcule la demanda marginal a un nivel de precio de $p = 2$. Interprete su resultado.

42. *(Demanda marginal)* La demanda de cierto artículo está dada por la relación $2p^2 + x^2 = 3000$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una. Determine la demanda marginal a un nivel de precio de 20 dólares. Interprete su resultado.

43. *(Productividad física marginal)* La productividad física de cierta empresa está dada por $p = 500(3x + 2)^2 - 2000$, donde x es el número de máquinas en funcionamiento. Determine la productividad física marginal cuando están en funcionamiento 8 máquinas. Interprete el resultado.

44. *(Objeto en movimiento)* La distancia d recorrida por un objeto en movimiento, en el instante t, está dada por $d = (2t + 1)(t + 1)^{3/2}$. Determine la velocidad instantánea en el instante t.

45. *(Objeto en movimiento)* La distancia h recorrida por un objeto en movimiento, en el instante t, está dada por $h = 49t - 4.9t^2$

a) Determine la velocidad instantánea en el instante t.

b) Determine la aceleración del objeto en el instante t.

c) ¿Para qué valores de t la velocidad del objeto es igual a cero.

46. *(Crecimiento de una población)* Si la población de cierta especie de zorros en un bosque se puede modelar mediante la función

$$P(t) = \frac{50{,}0000}{100 + 4900e^{-0.075t}}$$

donde t se mide en semestres. Determine la razón de cambio de la población con respecto al tiempo.

47. *(Crecimiento de una población)* Con respecto al problema anterior. Determine la razón de cambio al inicio del año 24 y al inicio del año 36; ¿al inicio de cuál de estos dos años, la población crece con mayor rapidez?

48. *(Epidemia)* Durante una epidemia el número de individuos afectados en el instante t, en semanas, está dado por $I(t) = 200t^6e^{-t} + 20$. Determine el valor de t para el cual $I'(t) = 0$. ¿Cuál es el número de individuos infectados para ese valor de t? Aproxime su respuesta al entero más cercano.

49. *(Epidemia)* Con respecto al problema anterior, responda las siguientes preguntas:

a) Al inicio, $t = 0$, ¿cuántos individuos estaban enfermos?

b) Determine la razón de cambio instantánea del número de individuos enfermos.

c) ¿Cuál es la razón de cambio en la semana 5?

d) ¿Cuál es la razón de cambio en la semana 7?

CASO DE ESTUDIO

PROPENSIÓN MARGINAL AL AHORRO

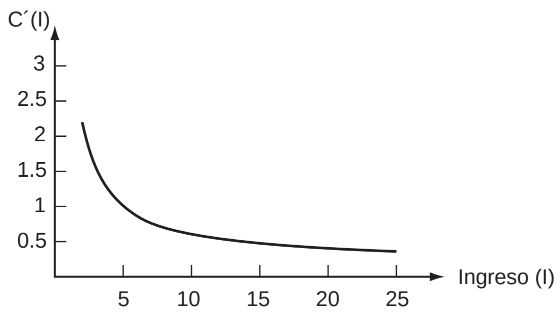
Al inicio del capítulo, para una población se analizaba la función de consumo cuya expresión está dada por

$$C(I) = 2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I), \text{ para } I \geq 2$$

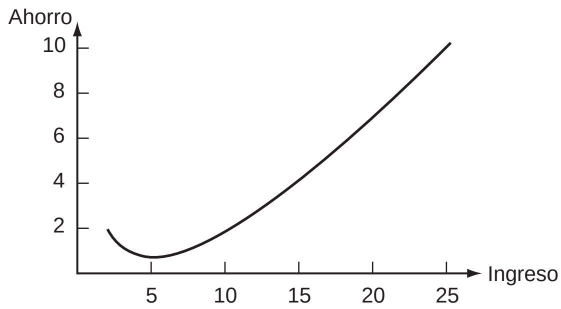
Si se observa la primera gráfica, del inicio de capítulo, el consumo aumenta conforme el ingreso aumenta. Esto se puede fundamentar si se considera la derivada $\dfrac{dC(I)}{dI}$, que proporciona el cambio del consumo con respecto del ingreso. De acuerdo con las fórmulas desarrolladas en este capítulo se tiene

$$\frac{dC(I)}{dI} = 0.2 + \frac{4}{I}, \text{ para } I \geq 2$$

Para $I \geq 2$ la derivada anterior es positiva, por lo que la función $C(I)$ es creciente, así que la pregunta ***a*)**, ¿qué tan rápido aumenta el consumo con respecto al aumento del ingreso?, tiene como respuesta la siguiente: el consumo aumenta de acuerdo con la función $0.2 + \dfrac{4}{I}$. A continuación se reproduce la gráfica.



Como puede observarse en la figura, el aumento en el consumo es cada vez menor conforme el ingreso aumenta. El ahorro, que está dado mediante la expresión $S = I - C$, tiene como gráfica:



De acuerdo con la gráfica, se tiene que el ahorro decrece conforme el ingreso aumenta y luego empieza a crecer nuevamente a partir de un ingreso de 5 mil millones. Esto se confirma si se analiza la función de ahorro $S(I)$

$$\begin{aligned} S(I) &= I - C(I) \\ &= I - [2.4 + 0.2I + 4\ln(0.25I)] \end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{dS(I)}{dI} = 0.8 - \frac{4}{I}$$

y

$$\frac{dS(I)}{dI} = 0, \text{ para } I = 5$$

Como $S'(I) < 0$ para $2 \leq I < 5$ y $S'(I) > 0$ para $5 \leq I$, se concluye que la función de ahorro es decreciente en el intervalo $(2, 5)$ y creciente en el intervalo $(5, \infty)$, con lo que se responde la segunda pregunta. Finalmente, si el ingreso es de 25 mil millones, entonces, de acuerdo con la sección 1.5,

Propensión marginal al consumo:

$$\frac{dC}{dI} = 0.2 + \frac{4}{I}, \text{ para } I = 25$$

$$\frac{dC}{dI} = 0.2 + \frac{4}{25}$$

así que, la propensión marginal al consumo es igual a 0.36, mientras que la propensión marginal al ahorro es igual a $1 - 0.36 = 0.64$.

Reproduzca el análisis anterior si la función de consumo está dada por

$$0.02I^2 + 4e^{1-4/I} - 1.5, \text{ para } I \in [2, 25]$$

Compare los resultados obtenidos en ambos casos y comente sus observaciones con sus compañeros.

CAPÍTULO 3

Optimización y bosquejo de curvas

Optimización del costo de producción

El costo de producción de prácticamente cualquier artículo, se obtiene como resultado del valor de dos funciones. Por un lado está la función de *costos fijos*, que no depende de la cantidad de artículos que se producen; entre estos costos fijos están la renta del local, el costo de maquinaria y herramientas, etcétera. Mientras que por otro lado están, los llamados *costos variables*, que comprenden el costo de: mano de obra, materias primas, energía, etcétera. Este costo variable depende del número, x, de unidades producidas, en consecuencia, el costo total está dado por la función

$$C(x) = F + V(x)$$

donde F es el costo fijo, mientras que $V(x)$ es la función de costos variables. Ahora bien, para que la producción sea rentable, además de tener ganancias se busca reducir los costos lo más posible, es decir, se busca tener los costos totales mínimos. Intuitivamente, la función de costos variables es una función con valores positivos cuando se producen x unidades, entonces el costo mínimo sería no producir, a menos que se tengan restricciones adicionales, como por ejemplo tener que producir una cantidad mínima de unidades o alguna otra. En realidad, en muchos casos lo que se trata de minimizar es el *costo unitario* que es el costo por unidad producida, éste se obtiene mediante

$$U(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Ahora, suponga que Raúl García Espino es el administrador de una empresa que se dedica a la fabricación de muebles de cómputo, cada mes debe fabricar 50 muebles y al mes puede producir a lo más 450 muebles. Por otro lado, con base en estudios realizados, él determina que la función de costos variables, en este rango de valores de producción, está dada por

$$V(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

cuando se producen x *cientos* de muebles y $V(x)$. Por otro lado, los costos fijos mensuales son de \$20,000.
Determine

a) El costo mínimo total
b) El costo mínimo total unitario

Después de estudiar los temas de este capítulo, responda lo anterior y compare sus respuestas con las que se proporcionan al final del capítulo.

TEMARIO

■ 3-1 LA PRIMERA DERIVADA Y LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

En esta sección, consideraremos el significado de la primera derivada de una función en relación con su gráfica.

DEFINICIÓN Se dice que una función $y = f(x)$ es una **función creciente** sobre un intervalo de valores de x si y crece al incrementarse la x. Esto es, si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera en el intervalo dado con $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Una función $y = f(x)$ se dice que es una **función decreciente** sobre un intervalo de su dominio si y decrece al incrementarse la x. Es decir, si $x_2 > x_1$ son dos valores de x en el intervalo dado, entonces $f(x_2) < f(x_1)$.

Las partes *a*) y *b*) de la figura 1 ilustran una función creciente y otra decreciente, respectivamente. La gráfica sube o baja, respectivamente, al movernos de izquierda a derecha.

TEOREMA 1

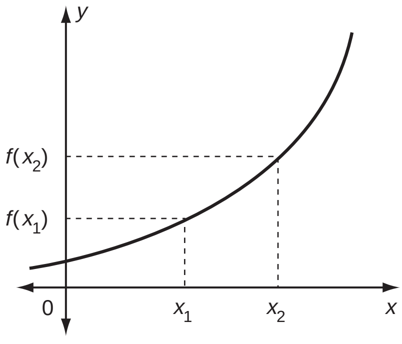
a) Si $f(x)$ es una función creciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \geq 0$

b) Si $f(x)$ es una función decreciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \leq 0$

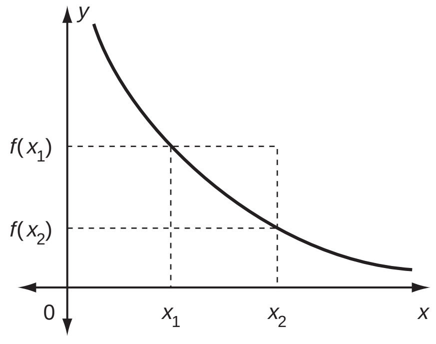
DEMOSTRACIÓN *a*) Sean x y $x + \Delta x$ dos valores de la variable independiente, con $y = f(x)$ y $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ los valores correspondientes de la variable dependiente. Se sigue que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Debemos considerar dos casos, según que $\Delta x > 0$ o $\Delta x < 0$. Están ilustrados en las figuras 2 y 3.



a) $x_2 > x_1$; $f(x_2) > f(x_1)$



b) $x_2 > x_1$; $f(x_2) < f(x_1)$

FIGURA 1

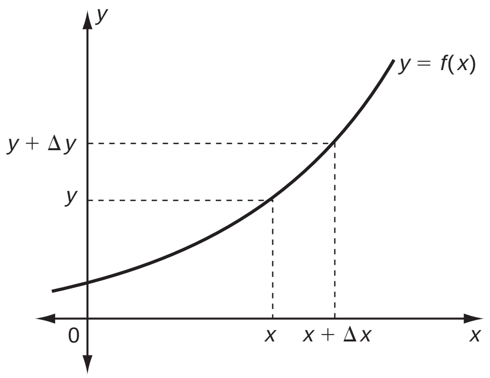


FIGURA 2

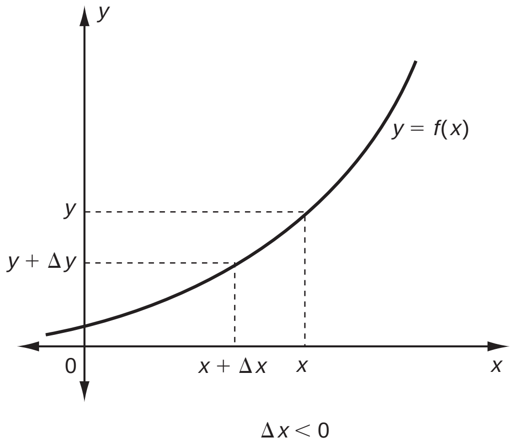


FIGURA 3

Si $\Delta x > 0$, entonces $x + \Delta x > x$. Por consiguiente, dado que $f(x)$ es una función creciente, $f(x + \Delta x) > f(x)$, y así que $\Delta y > 0$. En consecuencia, tanto Δx como Δy son positivos, de modo que $\Delta y/\Delta x > 0$.

La segunda posibilidad es que $\Delta x < 0$. Entonces, $x + \Delta x < x$ y así $f(x + \Delta x) < f(x)$. De aquí $\Delta y < 0$. En este caso, tanto Δx como Δy son negativos, de modo que otra vez $\Delta y/\Delta x > 0$.

Así que en ambos casos, $\Delta y/\Delta x$ es positiva. La derivada $f'(x)$ es el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, y dado que $\Delta y/\Delta x$ siempre es positiva, es claro que es imposible aproximarse a un número negativo como valor límite. En consecuencia, $f'(x) \geq 0$, como se establece en el teorema.

La demostración de la parte *b*), cuando $f(x)$ es una función decreciente, es muy similar y se deja como ejercicio.

Este teorema tiene una proposición recíproca, que puede establecerse de la siguiente manera.

TEOREMA 2

a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en algún intervalo, entonces f es una función creciente de x sobre tal intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en algún intervalo, entonces f es una función decreciente de x sobre tal intervalo.

Observación Observe que en el teorema 2, las desigualdades son estrictas.

La demostración de este teorema no se dará. Sin embargo, es un resultado intuitivamente evidente. En la parte *a*), por ejemplo, el hecho de que $f'(x) > 0$ significa, geométricamente, que la tangente a la gráfica en cualquier punto tiene pendiente positiva. Si la gráfica de $f(x)$ siempre está inclinada hacia arriba al movernos a la derecha, entonces es claro que y debe crecer a medida que x aumenta. En forma análoga, en la parte *b*), si $f'(x) < 0$, entonces la gráfica está inclinada hacia abajo y y decrece cuando x aumenta.

Estos teoremas se usan para determinar los intervalos en que una función crece o decrece (esto es, cuando la gráfica sube o baja).

☛ **1.** Por medio del examen del signo de f' decida para qué valores de x las funciones siguientes son crecientes o decrecientes

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 4x$

c) $f(x) = x^3$

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

crece o decrece.

Solución Dado que $f(x) = x^2 - 2x + 1$, tenemos que $f'(x) = 2x - 2$. Ahora $f'(x) > 0$ implica que $2x - 2 > 0$, esto es, $x > 1$. En consecuencia, $f(x)$ es creciente en todos los valores de x dentro del intervalo definido por $x > 1$. De manera similar, $f'(x) < 0$ implica que $2x - 2 < 0$, esto es, $x < 1$. La función decrece si $x <$ l.

La gráfica de $y = f(x)$ aparece en la figura 4. (Observe que $f(1) = 0$, de modo que el punto (1, 0) está sobre la gráfica). Si $x < 1$, la gráfica está inclinada hacia abajo, y para $x > 1$, está inclinada hacia arriba. ☛ **1**

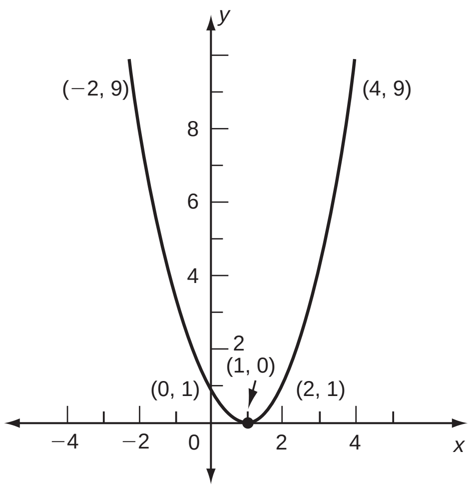


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Determine los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

crece o decrece.

Solución Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Con el objetivo de determinar el intervalo en que $f(x)$ crece, hacemos $f'(x) > 0$, esto es,

$$3(x - 1)(x + 1) > 0$$

Este tipo de desigualdad cuadrática cuyo procedimiento consiste en examinar los signos de los factores $(x - 1)$ y $(x + 1)$. Éstos se ilustran en la figura 5. El factor $(x - 1)$ es positivo si $x > 1$ y negativo en el caso de que $x < 1$. Mientras que $(x + 1)$ es positivo si $x > -1$ y negativo para $x < -1$.

Estos dos números dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada uno de estos intervalos, $f'(x)$ tiene signo constante y sólo cambia de signo en $x = \pm 1$, en donde es cero. Así que sólo seleccionamos un punto de prueba en cada intervalo y calculamos el signo de $f'(x)$ en cada punto de prueba. Los resultados se dan en la tabla 1.

Respuesta *a*) Creciente para $x > 0$, decreciente para $x < 0$ *b*) creciente para $x > -2$, decreciente para $x < -2$ *c*) creciente para $x < 0$ y para $x > 0$

TABLA 1

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Punto de prueba	-2	0	2
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$	$3(0)^2 - 3 = -3 < 0$	$3(2)^2 - 3 = 9 > 0$
f	Creciente	Decreciente	Creciente

☛ **2.** ¿Para qué valores de x las siguientes funciones son crecientes o decrecientes?
a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = x^{-1} + x$
c) $f(x) = 2 \ln x - x^2$

Vemos que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, así que f es una función creciente de x en cada uno de esos intervalos. En $(-1, 1)$, $f'(x) < 0$, así f es una función decreciente en ese intervalo. La gráfica de f se muestra en la figura 5. ☛ **2**

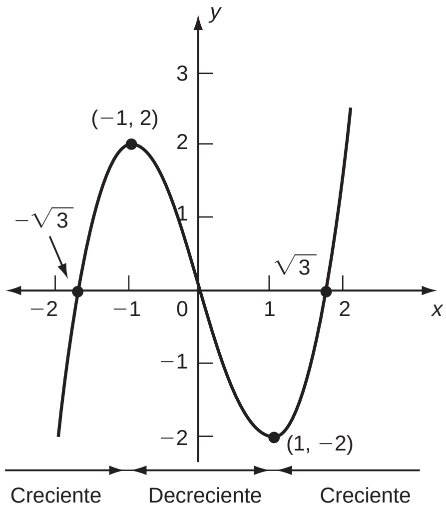


FIGURA 5

EJEMPLO 3 ***(Análisis de las funciones de costo, ingreso y utilidad)*** En el caso de la función de costo $C(x) = 500 + 20x$ y la relación de demanda $p = 100 - x$, determine las regiones en que la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad son funciones crecientes o decrecientes de x.

Solución Puesto que $C(x) = 500 + 20x$, $C'(x) = 20$ siempre es positiva. De ahí que la función de costo sea una función creciente de x para todos los valores de x. La función de ingreso es

$$R(x) = xp = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Así pues, el ingreso marginal es

$$R'(x) = 100 - 2x$$

De modo que $R'(x) > 0$ si $100 - 2x > 0$, esto es, cuando $x < 50$. En el caso de que $x > 50$, $R'(x) < 0$. Así que la función de ingreso es una función creciente de x si $x < 50$ y es una función decreciente de x para $x > 50$.

La función de utilidad es

$$P(x) = R(x) - C(x) = 100x - x^2 - (500 + 20x) = 80x - x^2 - 500$$

Respuesta *a*) Creciente para $x < 0$ y $x > 2$, decreciente para $0 < x < 2$
b) creciente para $x < -1$ y $x > 1$, decreciente para $-1 < x < 0$ y $0 < x < 1$
c) creciente para $0 < x < 1$ y decreciente para $x > 1$
(El dominio sólo es $x > 0$).

☛ **3.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si la ecuación de demanda se cambia a $p = 120 - 2x$

Por consiguiente, $P'(x) = 80 - 2x$ y $P'(x) > 0$ cuando $80 - 2x > 0$ o $x < 40$; en forma alternativa, $P'(x) < 0$ si $x > 40$. De modo que la función de utilidad es una función creciente de x si $x < 40$, y es una función decreciente de x para $x > 40$. Las gráficas de las tres funciones aparecen en la figura 7. ☛ **3**

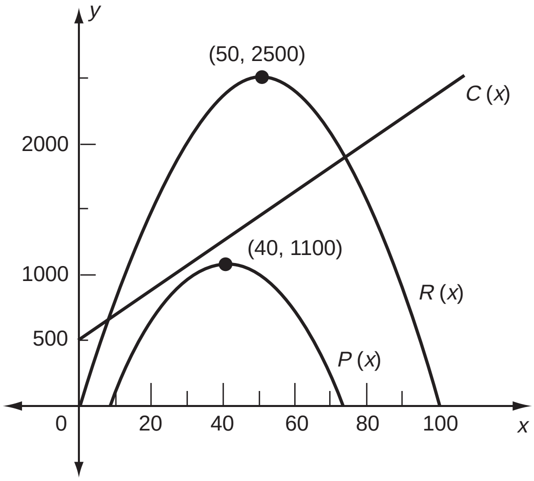


FIGURA 6

El tipo de comportamiento que estas tres funciones presentan es bastante típico de las funciones generales de costo, ingreso y utilidad. La función de costo por lo regular es una función creciente de la cantidad de bienes producidos (casi siempre cuesta más producir más, si bien ocurren excepciones con ciertas políticas de precios en el caso de materias primas). De manera similar, la función de ingreso es, en general, una función creciente para pequeños volúmenes de ventas pero, por lo regular, se transforma en una función decreciente cuando consideramos grandes volúmenes de ventas. La función de utilidad tiene este mismo comportamiento de crecimiento para x pequeña y decrece en el caso de que x sea grande.

Respuesta R crece para $0 < x < 30$, decrece para $x > 30$. P crece para $0 < x < 25$, decrece para $x > 25$

EJERCICIOS 3-1

(1-24) Determine los valores de x en los cuales las funciones siguientes son: *a*) crecientes; *b*) decrecientes.

1. $y = x^2 - 6x + 7$

2. $y = x^3 - 12x + 10$

3. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

4. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$

5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

8. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

9. $y = x + \ln x$

10. $y = x - e^x$

11. $y = x \ln x$

12. $y = xe^{-x}$

13. $y = x^5 - 5x^4 + 1$

14. $y = x^7 - 7x^6$

15. $y = x^2 - 4x + 5$

16. $y = x^3 - 3x + 2$

17. $y = 5x^6 - 6x^5 + 1$

18. $y = x^4 - 2x^2$

19. $y = x^{2/3}$

20. $y = x^{1/5}$

21. $y = \ln x$

22. $y = e^{-2x}$

23. $y = \dfrac{2}{x}$

24. $y = \dfrac{-1}{x}$

(25-28) *(Análisis de funciones de costo, ingreso y utilidad)* Para las siguientes funciones de costo y relaciones de demanda, determine las regiones en que *a*) la función de costo, *b*) la función de ingreso y *c*) la función de utilidad son crecientes o decrecientes.

25. $C(x) = 2000 + 10x; \quad p = 100 - \frac{1}{2}x$

26. $C(x) = 4000 + x^2; \quad p = 300 - 2x$

27. $C(x) = C_0 + kx; \quad p = a - bx$ (a, b, k y C_0 son constantes positivas).

28. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$; $p = a - (b/x)\sqrt{100 + x^2}$. (Suponga que $b > a > 0$).

29. *(Análisis del costo marginal)* El costo de producir x miles de unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 2500 + 9x - 3x^2 + 2x^3$. ¿En qué nivel de producción el costo marginal es

a) creciente? *b*) decreciente?

30. Repita el ejercicio 29 si $C(x) = 2000 + 15x - 6x^2 + x^3$

31. *(Análisis del ingreso marginal)* Dada la relación de demanda $p = 600 - x^2$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre cuándo el ingreso marginal sea:

a) creciente. *b*) decreciente.

32. Repita el ejercicio 31 para la relación de demanda $P = 50e^{-x/20}$

33. *(Costo marginal y promedio)* Para la función de costo $C(x) = 6 + 2x(x + 4)/(x + 1)$, pruebe que los costos marginal y promedio siempre son decrecientes para $x > 0$.

34. *(Ingreso marginal)* Para la relación de demanda $p = 50 - \ln(x + 1)$, pruebe que el ingreso marginal siempre es decreciente para $x > 0$.

35. *(Costo promedio creciente)* Demuestre que la función de costo promedio $\bar{C}(x)$ es una función creciente cuando el costo marginal excede al costo promedio.

36. *(Felicidad material)* Sea $H(x)$ la cantidad de felicidad que un individuo obtiene por poseer x unidades de algún bien. Un modelo usado a veces para esta cantidad es $H(x) = A \ln(1 + x) - Bx$, donde A y B son constantes positivas con $A > B$. Calcule $H(0)$. Pruebe que $H(x)$ es una función creciente para valores pequeños de x pero eventualmente se convierte en una función decreciente. Encuentre el valor de x en el cual $H(x)$ sea máxima.

■ 3-2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Muchas de las aplicaciones importantes de derivadas incluyen encontrar los valores máximo y mínimo de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que obtiene un fabricante depende del precio que cobra por el producto y el fabricante está interesado en conocer el precio que hace que su ganancia sea máxima. El precio **óptimo** (o **mejor** precio) se obtiene por medio de un proceso llamado **maximización** u **optimización** de la función de utilidad. De una manera similar, una compañía de bienes raíces puede estar interesada en generar el ingreso máximo por renta; una compañía ferroviaria puede necesitar conocer la velocidad promedio a la cual los trenes deben viajar para minimizar el costo por milla de operación; o un economista puede desear conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa máxima de crecimiento de la economía. Sin embargo, antes de ver las aplicaciones tales como éstas, analizaremos la teoría de máximos y mínimos.

DEFINICIONES *a*) Se dice que una función $f(x)$ tiene un **máximo local** en $x = c$ si $f(c) > f(x)$ para toda x suficientemente cerca de c.

Así los puntos P y Q en las gráficas en la figura 7 corresponden a máximos locales de las funciones correspondientes.

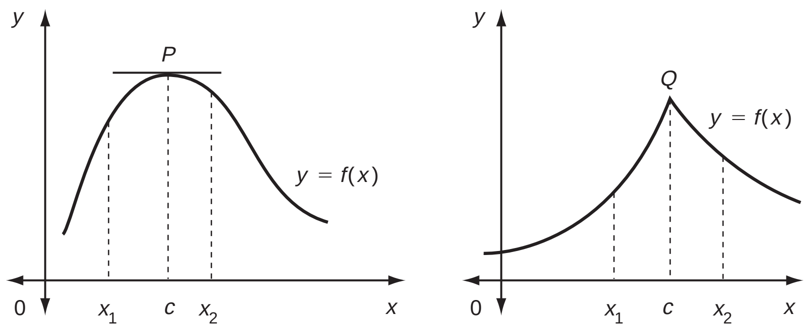


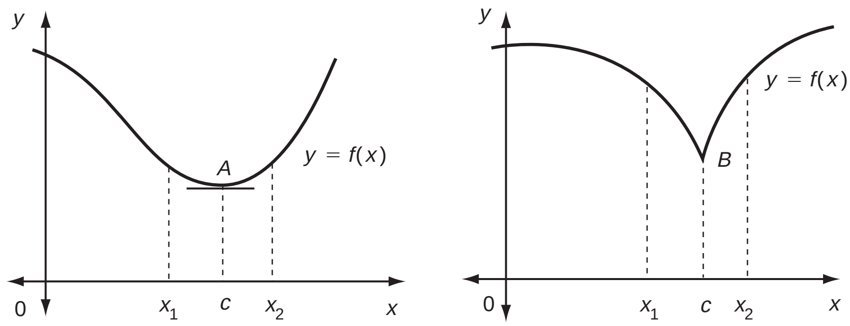
FIGURA 7

b) Se dice que una función $f(x)$ tiene un **mínimo local** en $x = c$ si $f(c) < f(x)$ para toda x suficientemente cerca de c.

Los puntos A y B en las gráficas de la figura 8 corresponden a mínimos locales.

c) El término **extremo** se utiliza para denotar a un máximo local o bien a un mínimo local.

Una función puede tener más de un máximo local y más de un mínimo local, como se muestra en la figura 9. Los puntos A, C y E en la gráfica corresponden a



a) *b*)

FIGURA 8

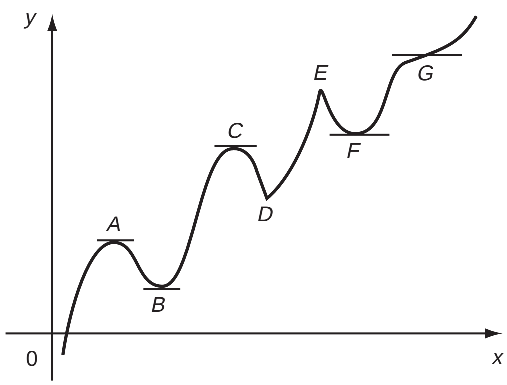
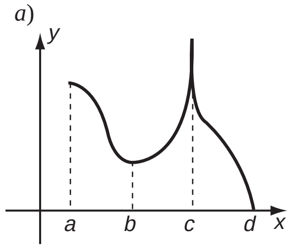


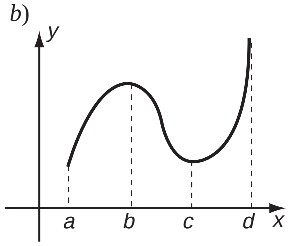
FIGURA 9

☛ **4.** Proporcione los valores de x en los que las gráficas siguientes tienen máximos o mínimos locales.

a)



b)



Respuesta *a*) Máximo local en *a* y *c*, mínimo local en *b*; *b*) mínimo local en *a*, máximo local en *b*.

☛ **5.** ¿Cuáles son los puntos críticos de la función f si
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = |x - 1|$?

Respuesta *a*) $x = 0$ *b*) $x = 1$

puntos en donde la función tiene máximos locales, y los puntos *B*, *D* y *F* corresponden a puntos en donde la función tiene mínimos locales. ☛ **4.**

Un *valor máximo o mínimo* (locales) de una función es la ordenada (coordenada *y*) del punto en el que la gráfica tiene un máximo o mínimo local. *Un valor mínimo local de una función puede ser mayor que un valor máximo local*. Esto puede verse fácilmente de la gráfica anterior, en donde la ordenada en *F* es mayor que la ordenada en *A*.

DEFINICIÓN El valor $x = c$ se denomina **punto crítico** para una función continua f si $f(c)$ está bien definida y si o $f'(c) = 0$ o $f'(x)$ no existe en $x = c$.

En el caso cuando $f'(c) = 0$, la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en $x = c$. Esta posibilidad se ilustra en la parte *a*) de la figura 10. El segundo caso, cuando $f'(c)$ no existe, ocurre cuando la gráfica tiene una esquina en $x = c$ (véase la parte *b*) de la figura 10) o cuando la tangente a la gráfica se vuelve vertical en $x = c$ (de modo que $f'(x)$ se hace infinitamente grande cuando $x \to c$). (Véase la parte *c*) de la figura 10). ☛ **5**

Enfatizamos el hecho de que para que *c* sea punto crítico, $f(c)$ debe estar bien definida. Por ejemplo, considere $f(x) = x^{-1}$, cuya derivada es $f'(x) = -x^{-2}$.

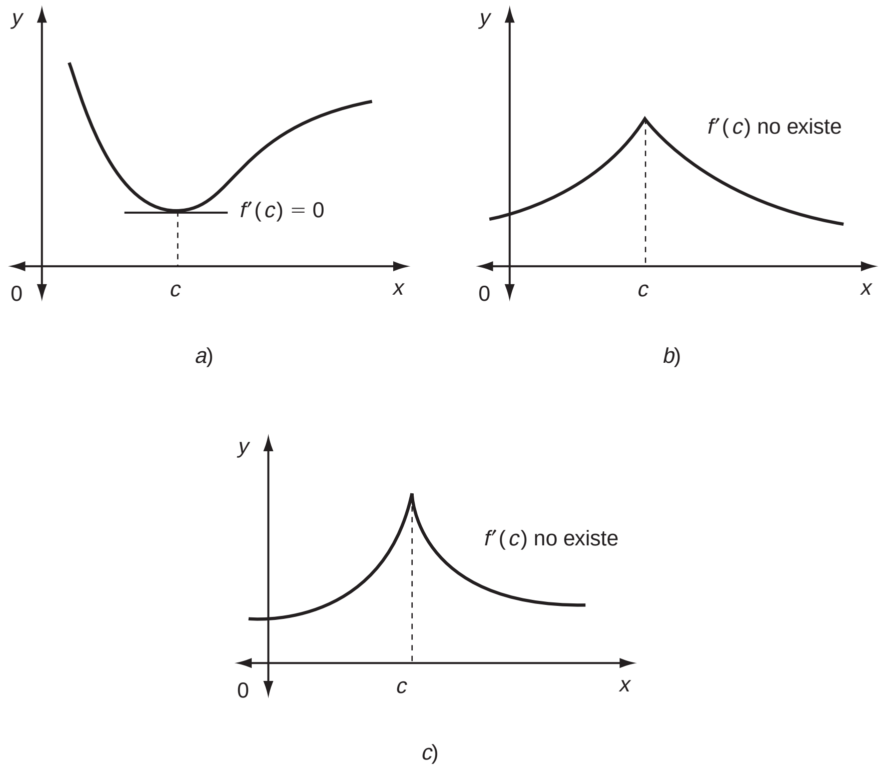


FIGURA 10

Claramente, $f'(x)$ no está acotada cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es un punto crítico para esta función ya que $f(0)$ no existe.

Es claro de las gráficas de la figura 10 que los extremos locales de una función ocurren sólo en puntos críticos. Pero no todo punto crítico de una función corresponde a un mínimo local o a un máximo local. El punto P en la parte *a*) de la figura 11, en donde la tangente es horizontal, es un punto crítico pero no es punto máximo local ni punto mínimo local. Los puntos Q y R en las partes *b*) y *c*) son puntos críticos en los que $f'(c)$ no existe, pero no son extremos de $f(x)$.

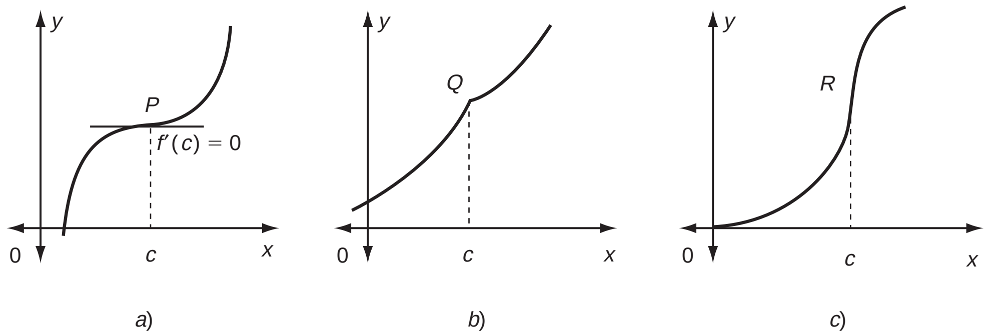


FIGURA 11

Dentro de poco, desarrollaremos ciertas pruebas que nos permitirán distinguir aquellos puntos críticos que son extremos locales de aquellos que no lo son. Primero examinaremos los puntos críticos por medio de algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3(2x^3 - 3x)$$

Solución Tenemos $f(x) = 2x^6 - 3x^4$. Diferenciando, obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 - 12x^3 = 12x^3(x^2 - 1)$$

Es claro que $f'(x)$ existe para toda x, de modo que los únicos puntos críticos son aquellos en los que $f'(x)$ se hace cero:

$$f'(x) = 12x^3(x^2 - 1) = 0$$

así que

$$x^3 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x^2 - 1 = 0$$

De modo que los puntos críticos son $x = 0, \pm 1$

EJEMPLO 2 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^4(x - 1)^{4/5}$$

Solución Diferenciando, por medio de la regla del producto,

$$f(x) = 4x^3(x - 1)^{4/5} + x^4(\tfrac{4}{5})(x - 1)^{-1/5}$$

$$= \frac{4}{5} x^3(x - 1)^{-1/5} [5(x - 1) + x]$$
$$= \frac{4}{5} x^3(x - 1)^{-1/5} (6x - 5)$$

Ahora $f'(x) = 0$ cuando $x^3 = 0$ o $6x - 5 = 0$, así tenemos puntos críticos en $x = 0$ y $x = \frac{5}{6}$. Sin embargo, observe que $f'(x)$ se hace infinitamente grande cuando $x \to 1$ como consecuencia de la potencia negativa. Como $f(1)$ está bien definida (de hecho $f(1) = 0$), $x = 1$ debe ser un punto crítico del tipo en el que $f'(x)$ no existe.

EJEMPLO 3 Determine los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

Solución Utilizamos la regla del producto.

$$f(x) = 3x^2e^{-x^2} + x^3(-2xe^{-x^2})$$
$$= x^2 e^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

☛ **6.** ¿Cuáles son los puntos críticos de la función f, si
a) $f(x) = x^3 + 3x^2$
b) $f(x) = x^4 - 8x^2$
c) $f(x) = x(x - 4)^{1/3}$?

Respuesta *a*) $x = 0, -2$
b) $x = 0, 2, -2$ *c*) $x = 3, 4$

El factor e^{-x^2} nunca es cero. Por tanto, $f'(x) = 0$ cuando $x^2 = 0$ o cuando $3 - 2x^2 = 0$; esto es, cuando $x = 0$ o cuando $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. De modo que la función dada tiene tres puntos críticos: $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ☛ **6**

Prueba de la primera derivada

No todos los puntos críticos son extremos locales; varios ejemplos de puntos críticos que no son extremos locales se ilustraron en la figura 11. El siguiente teorema proporciona la primera de las dos pruebas que pueden utilizarse para decidir si un punto crítico dado es un máximo local o mínimo local, o ninguno de éstos.

TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA) Sea $x = c$ un punto crítico de la función f. Entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para x justo antes de c y $f'(x) < 0$ justo después de c, entonces c es un máximo local de f. (Véase la parte *a*) de la figura 12. Los símbolos $(+)$, $(-)$ o (0) junto a cada parte de la gráfica indica el signo de f').

b) Si $f'(x) < 0$ para x justo antes de c y $f'(x) > 0$ justo después de c, entonces c es un mínimo local de f. (Véase la parte *b*) de la figura 12).

c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para x justo antes de c y para x justo después de c, entonces c no es un extremo local de f. (Véase la parte *c*) de la figura 12).

☛ **7.** Las siguientes funciones tienen un punto crítico en $x = 0$. Aplique la prueba de la primera derivada para determinar la naturaleza de este punto.
a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^{1/3}$
d) $f(x) = x^{4/3}$

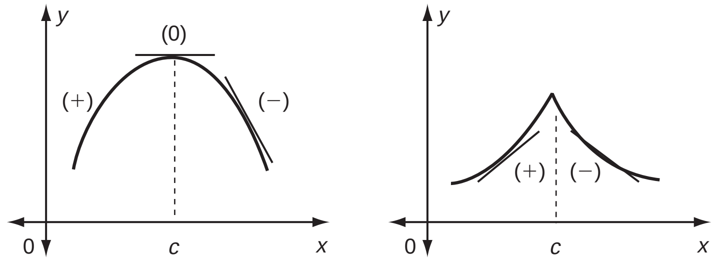
Respuesta *a*) No es un extremo local
b) mínimo local
c) no es un extremo local
d) mínimo local

Observación En la parte *a*) del teorema, f cambia de creciente a decreciente cuando x se mueve a la derecha pasando por c. En la parte *b*), f cambia de decreciente a creciente cuando pasa por c. En la parte *c*), f es creciente en ambos lados de c o decreciente en ambos lados. ☛ **7**

EJEMPLO 4 Determine los extremos locales de f, en donde $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$

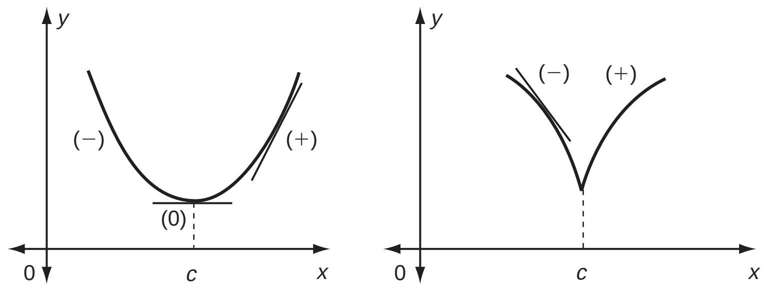
Solución En este caso,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$



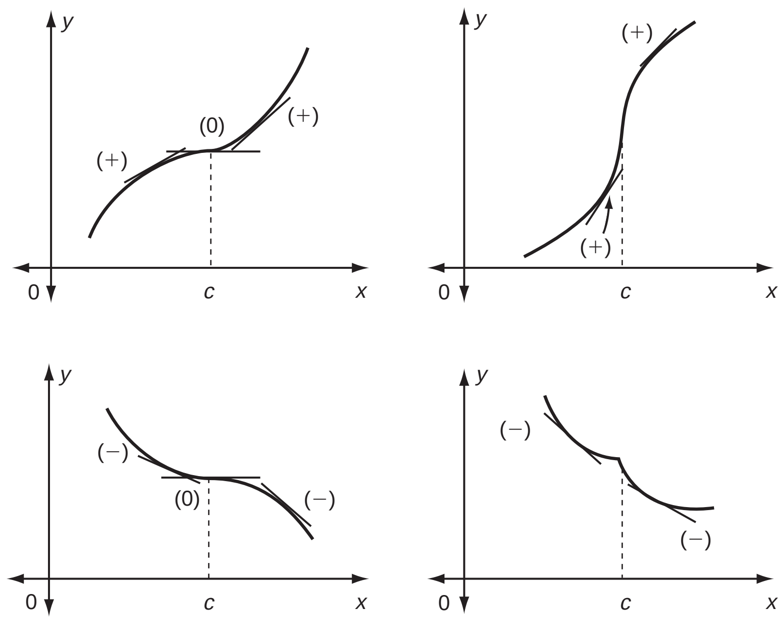
Máximo local en $x = c$

a)



Mínimo local en $x = c$

b)



$x = c$ no es un extremo local

c)

FIGURA 12

f' existe para toda x, así los puntos críticos están dados por $f'(x) = 0$. Esto es, $4x^2(x - 3) = 0$, o $x = 0$ y $x = 3$. Estos puntos críticos dividen la recta real en los tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, \infty)$. Como de costumbre, determinamos el signo de f' en cada intervalo eligiendo un punto de prueba. Los resultados están en la tabla 2.

TABLA 2

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Punto de prueba	-1	1	4
$f'(x) = 4x^2(x - 3)$	$4(-1)^2(-1 - 3)$ $= -16 < 0$	$4(1)^2(1 - 3)$ $= -8 < 0$	$4(4)^2(4 - 3)$ $= 64 > 0$
f	Decreciente	Decreciente	Creciente

En $x = 0$, f' es negativa en ambos lados, de modo que $x = 0$ no es un extremo local. Para $x = 3$, f' es negativa a la izquierda (f es decreciente) y positiva a la derecha (f es creciente). Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = 3$ es un mínimo local de f.

EJEMPLO 5 Determine los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$.

Solución Primero encontramos los puntos críticos. Con base en la regla del producto tenemos

$$f(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}(x - 5) + x^{2/3} \cdot 1 = \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2)$$

$f' = 0$ cuando $x = 2$ y f' está indefinida cuando $x = 0$. Así existen dos puntos críticos; a saber, $x = 0$ y $x = 2$. Estos puntos dividen la recta real en los tres intervalos, $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Seleccionando un punto de prueba, como de costumbre, en cada uno de estos intervalos, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 3.

TABLA 3

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Punto de prueba	-1	1	8
$f(x) = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2)$	$\frac{5}{3}(-1)^{-1/3}(-3) = 5 > 0$	$\frac{5}{3}(1)^{-1/3}(-1) = -\frac{5}{3} < 0$	$\frac{5}{3}(8)^{-1/3}(6) = 5 > 0$
f	Creciente	Decreciente	Creciente

Así, justo antes de $x = 0$, f' es positiva, mientras que justo después de $x = 0$ es negativa. Por tanto, por la parte *a*) del teorema 1, $x = 0$ es un máximo local de f. Justo antes de $x = 2$, f' es negativa, mientras que justo después de $x = 2$ es positiva. Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = 2$ es un mínimo local de f.

EJEMPLO 6 Determine los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^4/(x - 1)$.

Solución Primero encontramos los puntos críticos. De la regla del cociente tenemos

$$f(x) = \frac{(x - 1) \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^3(3x - 4)}{(x - 1)^2}$$

Para un punto crítico, $f'(x) = 0$; por lo que $x = 0$ o $\frac{4}{3}$. (Observe que $x = 1$ no es un punto crítico ya que $f(1)$ no está definida).

En este caso, debemos tener un poco de cuidado ya que el dominio de la función no es toda la recta real. Debemos considerar los cuatro intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \frac{4}{3})$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$, puesto que $x = 1$ no pertenece al dominio. Seleccionando un punto de prueba como es usual en cada uno de estos intervalos, obtenemos el resultado que se muestra en la tabla 4.

TABLA 4

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \infty)$
Punto de prueba	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	2
$f'(x)$	$\frac{(-1)^3(-7)}{(-2)^2} > 0$	$\frac{(\frac{1}{2})^3(-\frac{5}{2})}{(-\frac{1}{2})^2} < 0$	$\frac{(\frac{7}{6})^3(-\frac{3}{6})}{(\frac{1}{6})^2} < 0$	$\frac{(2)^3(2)}{(1)^2} > 0$
f	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Así, justo antes de $x = 0$, f' es positiva, mientras que poco después de $x = 0$ es negativa. Por tanto, por la parte *a*) del teorema 1, $x = 0$ es un máximo local de f. Justo antes de $x = \frac{4}{3}$, f' es negativa mientras que justo después de $x = \frac{4}{3}$ es positiva. Por tanto, por la parte *b*) del teorema 1, $x = \frac{4}{3}$ es un mínimo local de f.

Es muy importante en este tipo de ejemplo utilizar diferentes puntos de prueba para examinar f' después de 0 y antes de $\frac{4}{3}$ ya que el intervalo completo entre estos dos puntos críticos no está en el dominio de la función. ☛ **8**

☛ **8.** Determine los extremos locales de
a) $f(x) = 12x - x^3$
b) $f(x) = 2x^4 - x^2$
c) $f(x) = x^{2/3}(x - 10)$

Respuesta *a*) Mínimo local en -2, máximo local en $x = 2$
b) mínimos locales en $x = \pm\frac{1}{2}$, máximo local en $x = 0$
c) máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 4$

Resumen para la determinación de extremos locales por medio de la prueba de la primera derivada

Paso 1. Encuentre $f'(x)$ y determine los puntos críticos, esto es, los puntos en donde $f'(x)$ es cero o no existe.

Paso 2. Los puntos críticos dividen al dominio de f en varios intervalos. En cada intervalo seleccione un punto de prueba y calcule $f'(x)$ en ese punto. Si el valor es positivo, entonces f es una función creciente en todo el intervalo correspondiente. Si el valor de $f'(x)$ en el punto de prueba es negativo, entonces f es decreciente en el intervalo entero.

Paso 3. Si f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de un punto crítico, entonces ese punto es un máximo local. Si f' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de un punto crítico, entonces ese punto es un mínimo local. Si f' tiene el mismo signo en ambos lados de un punto crítico, entonces ese punto no es un extremo local.

EJERCICIOS 3-2

(1-20) Determine los puntos críticos para las siguientes funciones.

1. $x^2 - 3x + 7$

2. $3x + 5$

3. $2x^3 - 6x$

4. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

5. $x^4 - 2x^2$

6. $x^4 - 4x^3 + 5$

7. $x^2(x - 1)^3$

8. $(x - 1)^2(x - 2)^3$

9. $\dfrac{3x + 1}{3x}$

10. $x^2 + x^{-2}$

11. $\dfrac{x^2}{x-1}$

12. $x^{2/3} - x^{1/3}$

13. $x^{4/5} - 2x^{2/5}$

14. $x(x-1)^{1/3}$

15. $\dfrac{(x-1)^{1/5}}{x+1}$

16. xe^{-3x}

17. $x^3 \ln x$

18. $\dfrac{\ln x}{x}$

19. $2 + |x - 3|$

20. $|x^2 - 3x + 2|$

(21-36) Determine los valores de x en los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones.

21. $f(x) = x^2 - 12x + 10$

22. $f(x) = 1 + 2x - x^2$

23. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$

24. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

25. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$

26. $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 5$

27. $y = x^3 - 18x^2 + 96x$

28. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

29. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$

30. $y = x^4 - 4x^3 + 3$

31. $f(x) = x^3(x-1)^2$

32. $f(x) = x^4(x+2)^2$

33. $f(x) = x^{4/3}$

34. $f(x) = x^{1/3}$

35. $f(x) = x \ln x$

36. $f(x) = xe^{-x}$

(37-52) Determine los valores máximo y mínimo locales de las siguientes funciones.

37. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 15$

38. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3ax^2 \ (a > 0)$

39. $f(x) = xe^x$

40. $f(x) = xe^{-2x}$

41. $f(x) = x^3(x-1)^{2/3}$

42. $f(x) = x^4(x-1)^{4/5}$

43. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

44. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

45. $f(x) = |x - 1|$

46. $f(x) = 2 - |x|$

47. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

48. $f(x) = |6 + x - x^2|$

49. $f(x) = e^{|x|}$

50. $f(x) = e^{x-|x|}$

51. $f(x) = (x-2)^{4/3}$

52. $f(x) = (x+1)^{7/5} + 3$

53. Demuestre que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ no tiene máximo ni mínimo locales en $x = 1$.

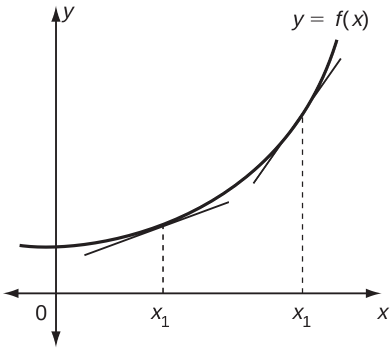
54. Demuestre que $f(x) = x + 1/x$ tiene un valor máximo local y un valor mínimo local, pero que el valor máximo es menor que el valor mínimo.

■ 3-3 LA SEGUNDA DERIVADA Y LA CONCAVIDAD

En las secciones anteriores vimos que el signo de la primera derivada tiene un significado geométrico, que es de gran utilidad cuando necesitamos obtener una idea cualitativa de la gráfica de una función. Se abordará ahora la segunda derivada, la cual, como veremos, también tiene una importante interpretación geométrica.

Considere una función $f(x)$ cuya gráfica tiene la forma general que se aprecia en la figura 13. La pendiente de la gráfica es positiva, $f'(x) > 0$, de modo que f es una función creciente. Más aún, la gráfica tiene la propiedad de que al movernos hacia la derecha (esto es, cuando x crece), la pendiente de la gráfica se hace más pronunciada. Es decir, la derivada $f'(x)$ también es una función creciente de x. La gráfica de $f'(x)$ debe tener la forma indicada cualitativamente en la figura 14.

Ahora, por el teorema 2 de la sección 3-1, f' es una función creciente de x, si su derivada es positiva, esto es, si $f''(x) > 0$. Así, si $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$, enton-



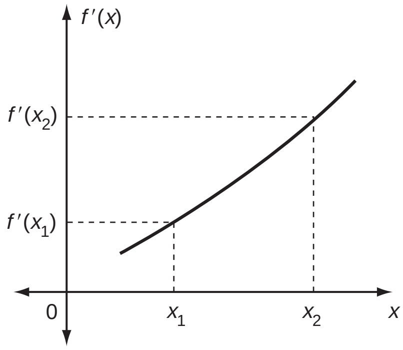
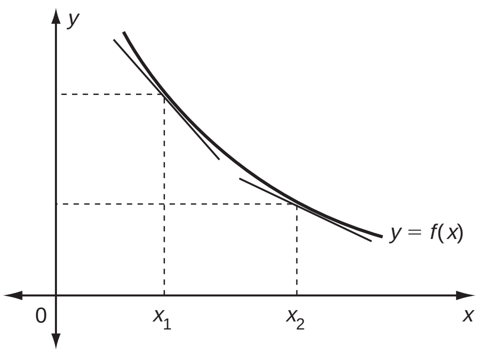


FIGURA 13

FIGURA 14

ces la gráfica de f debe tener la forma general que se muestra en la figura 13. Tiene que ascender hacia la derecha y la pendiente se hace cada vez más pronunciada conforme aumenta x.

Analicemos ahora una función f cuya gráfica tiene la forma que se observa en la figura 15. La pendiente de la gráfica es negativa, $f'(x) < 0$, por lo que f es una función decreciente. Además, la gráfica que se muestra tiene la propiedad de que cuando nos movemos hacia la derecha la pendiente se hace menos pronunciada. Esto es, conforme x aumenta, la derivada f' aumenta a partir de valores negativos grandes hacia cero, como se indica en la figura 16.



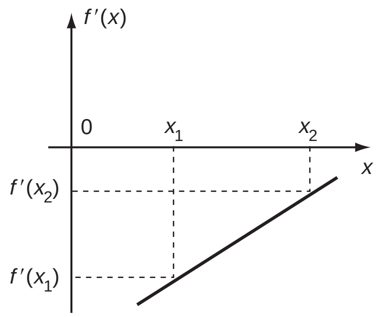


FIGURA 15

FIGURA 16

Nuevamente, f', aunque negativa, es una función creciente de x y esto garantiza si $f''(x) > 0$. Así pues, si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f debe tener la forma general que se muestra en la figura 15. Debe inclinarse hacia abajo a la derecha y la pendiente se hace menos pronunciada conforme x aumenta.

La propiedad geométrica que caracteriza ambos tipos de gráficas es que son **cóncavas hacia arriba**.* Concluimos, por tanto, que si $f''(x) > 0$ en algún intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

*Una curva es *cóncava hacia arriba* si dados dos puntos sobre la curva el segmento rectilíneo que los une queda por completo por encima de la curva. Una curva es cóncava hacia abajo si tal segmento rectilíneo siempre queda por debajo de la curva.

☛ **9.** Determine los intervalos en donde $f''(x)$ es positiva y aquellos en donde es negativa en los siguientes casos:
a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^4$
c) $f(x) = x^3 + 3x^2$

Ahora consideremos la posibilidad alternativa, esto es, que la gráfica de $f(x)$ sea **cóncava hacia abajo**. Los casos que corresponden a los dos tipos ya considerados se observan en la figura 17. La parte *a*) ilustra el caso en que $f'(x) > 0$ pero la pendiente se hace menos pronunciada a medida que x aumenta. La parte *b*) ejemplifica el caso en donde $f'(x) < 0$ y la pendiente se hace cada vez más pronunciada (más negativa) cuando x aumenta.

En cada caso, $f'(x)$ es una función decreciente de x. Por el teorema 2 de la sección 3-1, f' es decreciente si $f''(x) < 0$ y ésta es, por lo tanto, una condición suficiente para que la gráfica de f sea cóncava hacia abajo. ☛ **9**

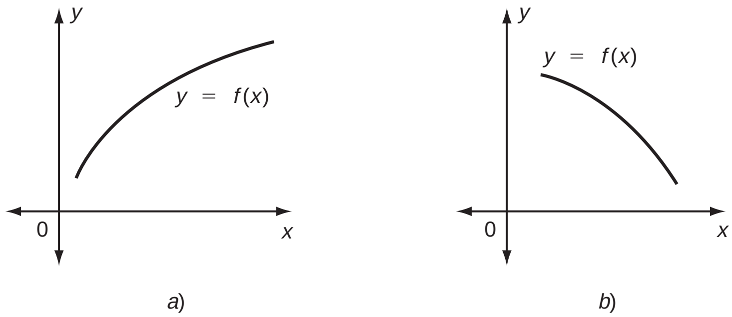


FIGURA 17

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de x en los cuales la gráfica de

$$y = \tfrac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$$

es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

Solución

$$y = \tfrac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$$
$$y' = \tfrac{4}{6}x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$y'' = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x + 2) = 2(x - 1)(x - 2)$$

Debemos determinar los puntos en donde $y'' > 0$ (cóncava hacia arriba) y $y'' < 0$ (cóncava hacia abajo). Primero, haciendo $y'' = 0$, obtenemos $2(x-1)(x-2) = 0$ obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. Estos puntos dividen la recta numérica en tres intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. En cada uno de estos intervalos y'' tiene signo constante, así que elegimos un punto de prueba conveniente y calculamos el signo de y'' en ese punto. Esto determina el signo de y'' en todo el intervalo. Los resultados están en la tabla 5.

TABLA 5

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Punto de prueba	0	$\frac{3}{2}$	3
$y'' = 2(x-1)(x-2)$	$2(-1)(-2) > 0$	$2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) < 0$	$2(2)(1) > 0$
Concavidad	Hacia arriba	Hacia abajo	Hacia arriba

Respuesta *a*) $f''(x)$ es positiva para $x > 0$, negativa para $x < 0$
b) positiva para toda $x \neq 0$
c) Positiva para $x > -1$, negativa para $x < -1$

☛ **10.** Determine los intervalos en donde las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba y en donde son cóncavas hacia abajo.
a) $f(x) = 24x^2 - x^4$
b) $f(x) = e^{-2x^2}$

Así que la función dada es cóncava hacia arriba si $x < 1$ o $x > 2$ y cóncava hacia abajo en el caso de que $1 < x < 2$. Estas propiedades se observan en la gráfica de la figura 18.

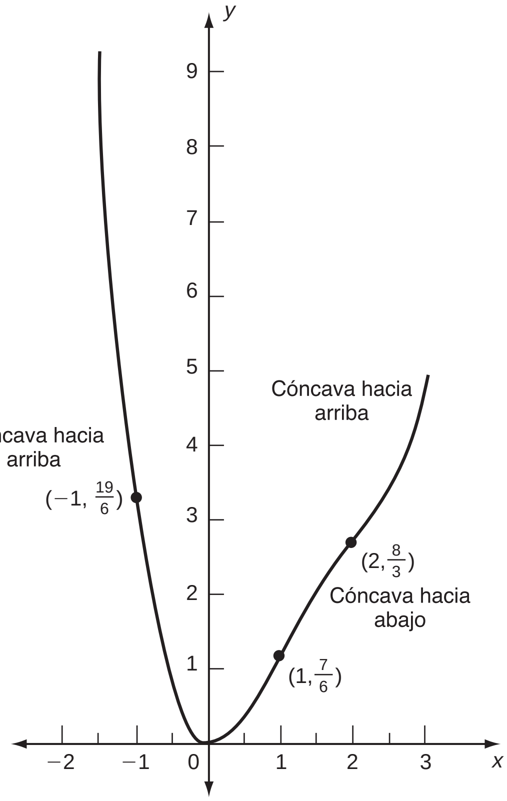


FIGURA 18

EJEMPLO 2 Examine la concavidad de la función de costo

$$C(x) = 2000 + 10x - 0.03x^2 + 10^{-4}x^3$$

Solución

$$C'(x) = 10 - 0.06x + (3 \times 10^{-4})x^2$$

$$C''(x) = -0.06 + (6 \times 10^{-4})x = (6 \times 10^{-4})(x - 100)$$

Observemos que si $x < 100$, $C''(x)$ es negativa, lo cual significa que la gráfica de la función de costo es cóncava hacia abajo. Cuando $x > 100$, $C''(x) > 0$ y la gráfica es en consecuencia cóncava hacia arriba. La gráfica de $C(x)$ tiene la forma que se advierte en la figura 19. ☛ **10**

Respuesta *a*) Cóncava hacia arriba para $-2 < x < 2$, cóncava hacia abajo para $x < -2$ o $x > 2$
b) cóncava hacia arriba para $x < -\frac{1}{2}$ o $x > \frac{1}{2}$, cóncava hacia abajo para $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

La función de costo del ejemplo 2 tiene una forma cualitativa que es bastante típica en tales funciones. Para valores pequeños de x, la función de costo por lo regular es cóncava hacia abajo. Esta propiedad se debe al hecho de que el incremen-

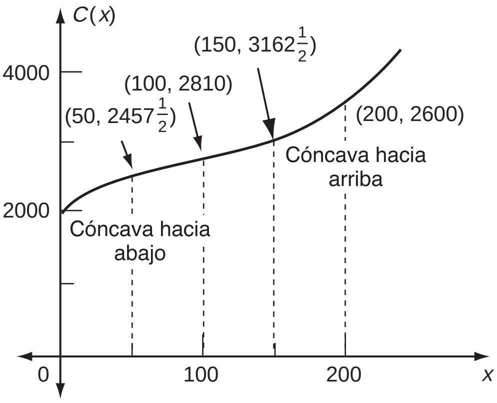


FIGURA 19

to de la producción introduce economías de escalas, de modo que el costo marginal $C'(x)$ decrece. Sin embargo, después de cierto nivel de producción se hace cada vez más costoso incrementar la producción porque, por ejemplo, debe adquirirse nueva maquinaria y pagar tiempo extra a los trabajadores. En esta etapa, el costo marginal empieza a incrementarse y la función de costo se hace cóncava hacia arriba.

Observe que la gráfica de $C(x)$ siempre se inclina hacia arriba al movernos a la derecha ($C'(x) > 0$).

EJEMPLO 3 Encuentre los valores de x para los cuales la función

$$f(x) = xe^{2x}$$

crece o decrece y es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo.

Solución

$$f(x) = xe^{2x}$$

$$f'(x) = (2x + 1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 4(x + 1)e^{2x}$$

Puesto que e^{2x} siempre es positivo, el signo de $f'(x)$ es el mismo que el de $(2x + 1)$. Así que, $f(x)$ crece si $2x + 1 > 0$, esto es, cuando $x > -\frac{1}{2}$, y $f(x)$ decrece si $2x + 1 < 0$, esto es, cuando $x < -\frac{1}{2}$.

De manera similar, el signo de $f''(x)$ es el mismo que el de $(x + 1)$. Por lo que $f(x)$ es cóncava hacia arriba si $x > -1$ y cóncava hacia abajo si $x < -1$.

DEFINICIÓN Un **punto de inflexión** de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Si $x = x_1$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = f(x)$, entonces, a un lado de x_1 la gráfica es cóncava hacia arriba, esto es, $f''(x) > 0$; y del otro lado de x_1, la gráfica es cóncava hacia abajo, es decir, $f''(x) < 0$. Así que al pasar de un lado al

otro de $x = x_1$, $f''(x)$ cambia de signo. En $x = x_1$ mismo, es necesario que $f''(x_1) = 0$ o que $f''(x_1)$ no exista ($f''(x)$ podría tender a infinito cuando $x \to x_1$).

En el ejemplo 1, la gráfica de $y = \frac{1}{6}x^4 - x^3 + 2x^2$ tiene puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 2$. Por ejemplo, si $x < 1$, la gráfica es cóncava hacia arriba; mientras que cuando x es poco mayor a 1, la gráfica es cóncava hacia abajo. De modo que $x = 1$ es un punto en donde la concavidad cambia, es decir, un punto de inflexión. Esto también se aplica a $x = 2$.

En el ejemplo 1 los puntos de inflexión están dados por $y'' = 0$. El ejemplo 4 ilustra la posibilidad alternativa.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de inflexión de $y = x^{1/3}$

Solución Tenemos que

$$y' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Ahora, si $x > 0$, $x^{5/3}$ es positiva, de modo que $y'' < 0$. Cuando $x < 0$, $x^{5/3}$ es negativa, por lo que $y'' > 0$. Así pues, la gráfica es cóncava hacia arriba si $x < 0$ y cóncava hacia abajo para $x > 0$. El valor $x = 0$, en el cual y también es cero, es por tanto un punto de inflexión. (Véase la figura 20). En este caso, y'' se hace indefinidamente grande cuando $x \to 0$, de modo que tenemos un punto de inflexión en el cual la segunda derivada no existe. (Obsérvese también que cuando $x \to 0$, y' tiende a infinito, por lo que la pendiente de la gráfica tiende a ser vertical en el origen para esta función particular). ☛ **11**

☛ **11.** Para las funciones siguientes, ¿$x = 0$ es un punto de inflexión?

a) $f(x) = x^5$
b) $f(x) = x^6$
c) $f(x) = x^{1/5}$
d) $f(x) = x^{4/3}$

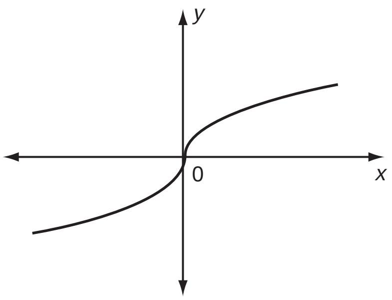


FIGURA 20

Observe que la tangente a la gráfica en un punto de inflexión siempre corta a ésta en tal punto. Se trata de una propiedad poco común de una tangente (por regla, la gráfica está situada por completo a un lado de la línea tangente cerca del punto de tangencia).

Respuesta *a*) Sí
b) no
c) sí
d) no

Prueba de la segunda derivada

En la sección 3-2, introdujimos la prueba de la primera derivada para distinguir entre aquellos puntos críticos que son máximos o mínimos locales, o ninguno de éstos. La segunda derivada proporciona una prueba alterna que puede utilizarse en ciertos casos. Cuando puede usarse, con frecuencia esta prueba es mucho más sencilla que la prueba de la primera derivada.

Considere el caso cuando aparece un extremo local en un punto crítico dado por $f'(x) = 0$, esto es, cuando la recta tangente es horizontal en el punto de la gráfica de f que corresponde al extremo. Entonces, si el punto es un máximo local, la gráfica es cóncava hacia abajo, y si el punto es un mínimo local, la gráfica es cóncava hacia arriba. Pero sabemos que siempre que $f''(x) < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo, y siempre que $f''(x) > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba. Esto conduce al siguiente teorema.

TEOREMA 1 (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA) Sea $f(x)$ dos veces diferenciable en el punto crítico $x = c$. Entonces,

a) $x = c$ es un máximo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) < 0$

b) $x = c$ es un mínimo local de f siempre que $f'(c) = 0$ y $f''(x) > 0$

EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo locales de

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

Solución Sea $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$

Para determinar los puntos críticos, hacemos $f'(x) = 0$:

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(3x - 2)(x + 2) = 0$$

Esto da $x = \frac{2}{3}$ o -2. Así,

$$f''(x) = 6x + 4$$

En $x = \frac{2}{3}$,

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 8 > 0$$

Por tanto, como $f''(x)$ es positiva cuando $x = \frac{2}{3}$, $f(x)$ tiene un mínimo local cuando $x = \frac{2}{3}$. El valor mínimo local está dado por

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 8 = -\frac{256}{27}$$

Cuando $x = -2$, $f''(-2) = 6(-2) + 4 = -8 < 0$. Por tanto, como $f''(x)$ es negativa cuando $x = -2$, $f(x)$ tiene un máximo local cuando $x = -2$. El valor máximo local está dado por

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$$

Así el único valor máximo local de $f(x)$ es 0, y ocurre cuando $x = -2$, el único valor mínimo local es $-\frac{256}{27}$, y aparece cuando $x = \frac{2}{3}$

EJEMPLO 6 Determine los máximos y mínimos locales para $f(x) = (\ln x)/x$.

Solución Utilizando la regla del cociente, tenemos

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Para un punto crítico, $f'(x) = 0$, o bien,

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

Esto es, $1 - \ln x = 0$. Por lo que, $\ln x = 1 = \ln e$ y así $x = e$.

En este caso, sólo tenemos un punto crítico, $x = e$. (Observe que $f'(x)$ se hace infinito cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es un punto crítico ya que $f(0)$ no está definida).

Otra vez, utilizamos la regla del cociente:

$$f''(x) = \frac{x^2(1 - \ln x)' - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(-1/x) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Cuando $x = e$,

$$f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\ln e = 1$. De aquí que $f(x)$ tiene un máximo local cuando $x = e$. En este caso, no existen mínimos locales. ☛ **12**

☛ **12.** Utilice la prueba de la segunda derivada para determinar los extremos locales:
a) $f(x) = 1 - 2x^2 + x^4$
b) $f(x) = x \ln x$
c) $f(x) = x^2 - 6x^{4/3}$

La prueba de la segunda derivada puede utilizarse para todos los extremos locales en los que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ sea distinta de cero. Cuando $f''(x) = 0$ en un punto crítico $x = c$, o cuando $f''(c)$ no exista, entonces, no se puede utilizar la prueba de la segunda derivada para asegurar si $x = c$ es un máximo o mínimo local. En tales casos, debemos utilizar la prueba de la primera derivada. La prueba de la primera derivada también debe utilizarse para todos los puntos críticos en donde $f'(c)$ no exista.

El siguiente ejemplo ilustra varios casos sencillos en donde la prueba de la segunda derivada no funciona.

Respuesta *a*) Mínimos locales en ± 1, máximo local en 0
b) mínimo local en $x = e^{-1}$
c) mínimos locales en $x = \pm 8$ la prueba de la segunda derivada falla para $x = 0$

EJEMPLO 7

a) Considere $f(x) = x^3$. Entonces, $f'(x) = 3x^2$ y $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. El único punto crítico es $x = 0$. Ahora, $f''(x) = 6x$, de modo que $f''(0) = 0$ y la prue-

ba falla. (En efecto, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$, así que la función es creciente para toda $x \neq 0$, y $x = 0$ no es un extremo local).

b) Considere $f(x) = x^{6/5}$. Entonces $f'(x) = \frac{6}{5}x^{1/5}$ y $f'(x) = 0$ en $x = 0$. Éste es el único punto crítico. Ahora $f''(x) = \frac{6}{25}x^{-4/5}$, de modo que $f''(0)$ no está definida. No funciona la prueba de la segunda derivada. (De hecho, la prueba de la primera derivada, muestra que $x = 0$ es un mínimo local).

☛ **13.** Para cada una de las siguientes funciones y en el punto $x = 1$, ¿tiene éxito o fracasa la prueba de la segunda derivada?
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
b) $f(x) = (x - 1)^{4/7}$
c) $f(x) = x(x - \frac{4}{3})^{1/3}$
d) $f(x) = x(x - 1)^{1/3}$

c) Considere $f(x) = x^{2/5}$. Entonces $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-3/5}$ y existe un punto crítico en $x = 0$ en el que f' no está definida. La prueba de la segunda derivada no puede aplicarse a este tipo de punto crítico. (En realidad, $x = 0$ es un mínimo local).

d) En el ejemplo 4 de la sección 3-2, $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ con puntos críticos en $x = 0$ y $x = 3$. Entonces $f''(x) = 12x^2 - 24x$. Tenemos $f''(0) = 0$ y $f''(3) = 12(3)^2 - 24(3) = 36 > 0$. Así que la prueba de la segunda derivada muestra que $x = 3$ es un mínimo local, pero esta prueba falla en $x = 0$. ☛ **13**

Resumen de la determinación de extremos locales por medio de la prueba de la segunda derivada:

Paso 1. Encontrar $f'(x)$ y determinar los puntos críticos. Sea $x = c$ un punto crítico en el que $f'(c) = 0$. La prueba de la segunda derivada no puede utilizarse para un punto en donde $f'(x)$ no exista.

Paso 2. Encontrar $f''(x)$ y evaluarla cuando $x = c$.

Paso 3. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$. Si $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no está definida, entonces la prueba falla.

Respuesta *a*) Falla
b) falla
c) tiene éxito (mínimo)
d) falla

EJERCICIOS 3-3

(1-12) Encuentre los valores de x para los cuales las siguientes funciones son *a*) cóncavas hacia arriba o *b*) cóncavas hacia abajo. También determine los puntos de inflexión, si los hay.

1. $x^2 - 4x + 7$

2. $5 + 3x - x^2$

3. $x^3 - 3x + 4$

4. $x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

5. $x^4 - 18x^2 + 5$

6. $x^7 - 7x^6 + 2$

7. $x + \dfrac{1}{x}$

8. $\dfrac{1}{x - 2}$

9. $(x - 5)^{3/4}$

10. xe^{-x}

11. $\dfrac{x}{e^{x/2}}$

12. $x - 2 \ln x$

(13-20) Determine los valores de x para los cuales las siguientes funciones son *a*) crecientes; *b*) decrecientes; *c*) cóncavas hacia arriba; *d*) cóncavas hacia abajo. También, determine los puntos de inflexión, si los hay.

13. $3x^2 - 15x + 2$

14. $x^3 - 6x^2 - 15x + 7$

15. $x^4 - 4x^3$

16. $(x - 1)^{1/5}$

17. $x - \ln x$

18. $\dfrac{x^2}{e^x}$

19. $x^2 - 18 \ln x$

***20.** $|x^2 - 5x - 6|$

(21-24) (*Funciones de costo*) Analice la concavidad de las siguientes funciones de costo.

21. $C(x) = a + bx$

22. $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

23. $C(x) = 1500 + 25x - 0.1x^2 + 0.004x^3$

24. $C(x) = 1000 + 40\sqrt{x} - x + 0.02x^{3/2}$

(25-45) Utilice la prueba de la segunda derivada para determinar los valores máximo y mínimo locales de las siguientes funciones. Si falla la prueba de la segunda derivada, utilice la prueba de la primera derivada.

25. $x^2 - 10x + 3$ **26.** $x^3 - 27x + 5$

27. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ **28.** $x^4 - 8x^2 + 15$

29. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3$ **30.** $1 + 3x^2 - x^6$

31. xe^x **32.** x^2/e^{2x}

33. e^{-x^2} **34.** $x^2 \ln x$

35. $x^2 - \ln x$ **36.** $x^5 - 15x^3 + 2$

37. $x \ln x$ **38.** $x \ln x - x$

39. $(x - 1)^3(x - 2)^4$ **40.** $(x + 1)^2(x - 2)^3$

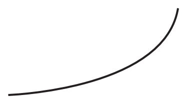
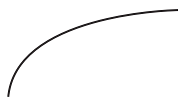
41. $(x - 1)^{4/3}$ ***42.** $x^2(x - 1)^{2/3}$

■ 3-4 BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES

A menudo ocurre que nos gustaría obtener un dibujo cualitativo aproximado de cómo la gráfica de una función dada se vería sin necesidad de tabular un gran número de puntos. La primera y segunda derivadas son herramientas efectivas para este fin. En esta sección, estudiaremos su uso aplicado a funciones polinomiales. Las gráficas que aparecen en las figuras 5 y 18 se obtuvieron por los métodos que a continuación se describen. En la sección 3-7 estos métodos se extienden a otros tipos de funciones.

Las propiedades básicas que necesitamos ya se han formulado y se resumen en la tabla 6.

TABLA 6

Signo de $f'(x)$ y $f''(x)$	Propiedades de la gráfica de f	Forma de la gráfica
$f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$	Creciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$	Creciente y cóncava hacia abajo	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$	Decreciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$	Decreciente y cóncava hacia abajo	

EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

Solución En primer término determinamos en dónde la función es creciente o decreciente:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$

☛ **14.** Determine los intervalos en los que la gráfica de cada una de las siguientes funciones pertenece a cada uno de los cuatro tipos.

a) $f(x) = 2x - x^2$

b) $f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Analizando el signo de y' como en la sección 3-1, encontramos que $y' > 0$ para $x < 1$ y para $x > 2$; mientras que $y' < 0$ para $1 < x < 2$. Así la gráfica es creciente para $x < 1$, decreciente para $1 < x < 2$ y nuevamente creciente para $x > 2$. (Véase la parte *a*) de la figura 21).

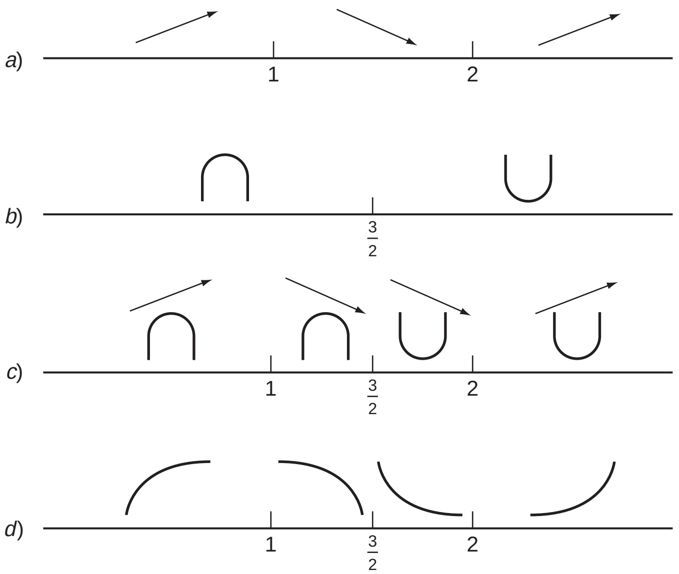


FIGURA 21

Por medio de la prueba de la primera derivada, y tiene un máximo local cuando $x = 1$ y un mínimo local cuando $x = 2$. Con facilidad se encuentra que cuando $x = 1$, $y = 3$ y cuando $x = 2$, $y = 2$. Así las coordenadas de los extremos locales son (1, 3) y (2, 2).

Ahora examinemos la concavidad de la función. Encontramos

$$y'' = 12x - 18 = 12(x - \tfrac{3}{2})$$

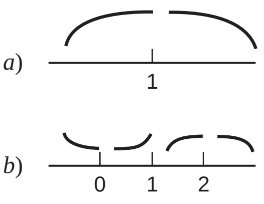
y así $y'' > 0$ cuando $x > \frac{3}{2}$ (cóncava hacia arriba); mientras que $y'' < 0$ cuando $x < \frac{3}{2}$ (cóncava hacia abajo). Esta información se esquematiza en la parte *b*) de la figura 21. Cuando $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, de modo que el punto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ es un punto de inflexión en la gráfica.

Combinando la información de las partes *a*) y *b*), podemos resumirla como se advierte en la parte *c*) de la figura 21; esto es, si $x < 1$, y es creciente y cóncava hacia abajo; cuando $1 < x < \frac{3}{2}$, y decrece y es cóncava hacia abajo; etcétera. Esta información se traduce en una forma cualitativa para la gráfica en la parte *d*) de la figura 21.

Por último, calculamos las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje y. Si $x = 0$, $y = -2$, de modo que el punto es $(0, -2)$.

A fin de bosquejar la gráfica, graficamos primero los puntos (1, 3), $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, (2, 2), en donde $f(x)$ cambia su naturaleza (de creciente a decreciente o de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo) y el punto $(0, -2)$ en que la gráfica corta al eje y. Entonces, usando la información de la figura 21, dibujamos curvas del tipo apropiado que unan estos puntos. Esto da la gráfica como se aprecia en la figura 22. ☛ **14**

Respuesta



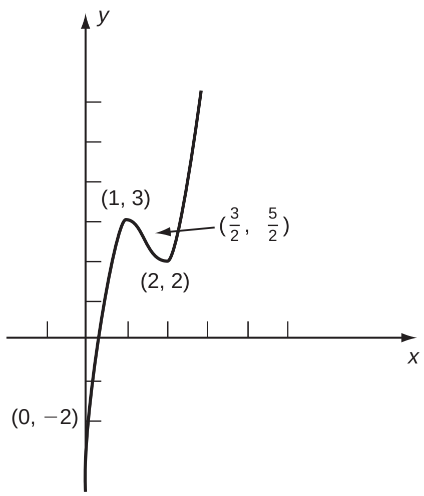


FIGURA 22

Los pasos necesarios en el bosquejo de la gráfica de una función polinomial se resumen en el siguiente procedimiento.

Paso 1: Calcular $f'(x)$ Determine los intervalos en que $f'(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ crece o decrece, respectivamente. Calcule las coordenadas de los puntos que dividen estos intervalos.

Paso 2: Calcular $f''(x)$ Determine los intervalos en que $f''(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Calcule las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos.

Paso 3: Combinar Combine la información de los pasos 1 y 2 como en la figura 21.

Paso 4: Encontrar algunos puntos explícitos Por ejemplo, la intersección con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$, de modo que $y = f(0)$. La intersección con el eje x se obtiene haciendo $y = 0$. Esto da la ecuación $f(x) = 0$ que debe resolverse para los valores de x en los puntos de intersección. Algunas veces esta ecuación resulta ser demasiado complicada de resolver y debemos prescindir de la información que proporciona.

EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $y = 3 + 5x - 2x^2$

Solución

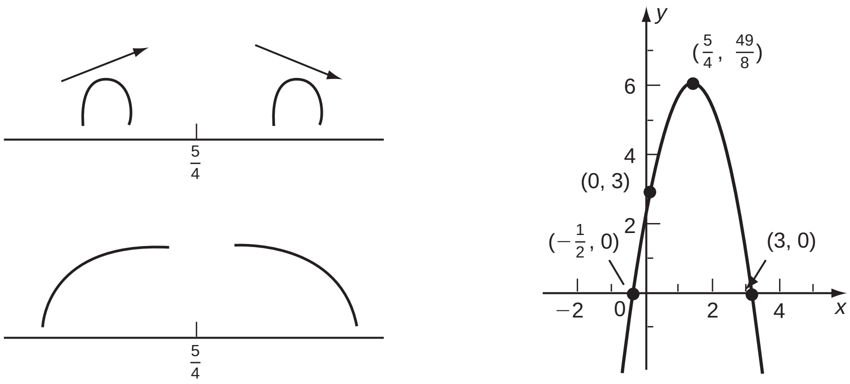
Paso 1 $y' = 5 - 4x$. Así que, $y' > 0$ si $x < \frac{5}{4}$ y $y' < 0$ cuando $x > \frac{5}{4}$. Si $x = \frac{5}{4}$

$$y = 3 + 5(\tfrac{5}{4}) - 2(\tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{49}{8}$$

En consecuencia, la gráfica es creciente si $x < \frac{5}{4}$ y decreciente para $x > \frac{5}{4}$, y el punto divisorio de la gráfica es $(\frac{5}{4}, \frac{49}{8})$. Este punto es un máximo local.

Paso 2 $y'' = -4$. Así que la gráfica es cóncava hacia abajo para toda x.

Paso 3 Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 23(a).



a) *b*)

FIGURA 23

☛ **15.** Haga un bosquejo de las gráficas de

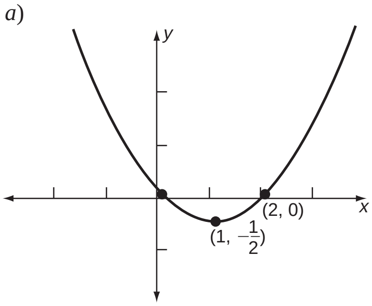
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

b) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

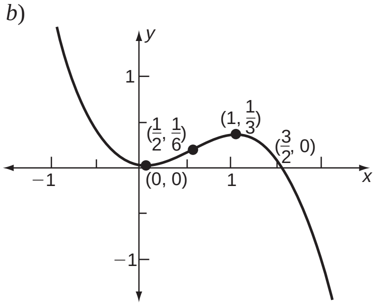
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^{4/3}$

Respuesta

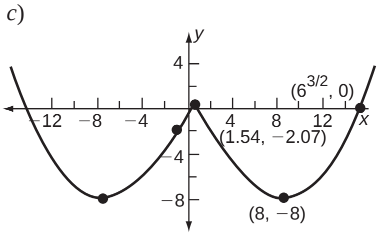
a)



b)



c)



Paso 4 Cuando $x = 0$, $y = 3$ lo que da el punto (0, 3). Si $y = 0$ obtenemos la ecuación $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Esta función cuadrática puede factorizarse:

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

y las raíces son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$. En consecuencia, la gráfica corta el eje x en $(-\frac{1}{2}, 0)$ y (3, 0).

Integrando toda esta información, podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso de la gráfica, como se observa en la figura 23(b). ☛ **15**

EJEMPLO 3 Si el número de artículos producidos por semana es x (medidos en miles), la función de costo de un fabricante es

$$C = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$$

(en miles de dólares). Bosqueje la gráfica de C como una función de x.

Solución Por razones evidentes sólo estamos interesados en la región $x \geq 0$.

Paso 1 $C'(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$. Antes que nada, hacemos $C'(x) = 0$ con el objetivo de obtener los puntos en que la gráfica tiene tangentes horizontales.

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

y debido al número negativo que está dentro del radical, x no es un número real. Concluimos que $C'(x)$ nunca es cero. Así, $C'(x)$ o es positiva para toda x o negativa para toda x. Pero $C'(0) = 1 > 0$, por lo que $C'(x) > 0$ para toda x. Por tanto, C es una función creciente para toda x.

Paso 2 $C''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}(x - 2)$. Por tanto, cuando $x > 2$, $C''(x) > 0$ y la gráfica es cóncava hacia arriba. Si $x < 2$, $C''(x) < 0$ y la gráfica es cóncava hacia abajo.

Si $x = 2$,

$$C(2) = 2 + 2 - \frac{1}{4}(2)^2 + \frac{1}{24}(2)^3 = \frac{10}{3}$$

$$C'(2) = 1 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{8}(2)^2 = \frac{1}{2}$$

De modo que el punto divisorio es $(2, \frac{10}{3})$ (punto de inflexión).

Paso 3 Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 24(a).

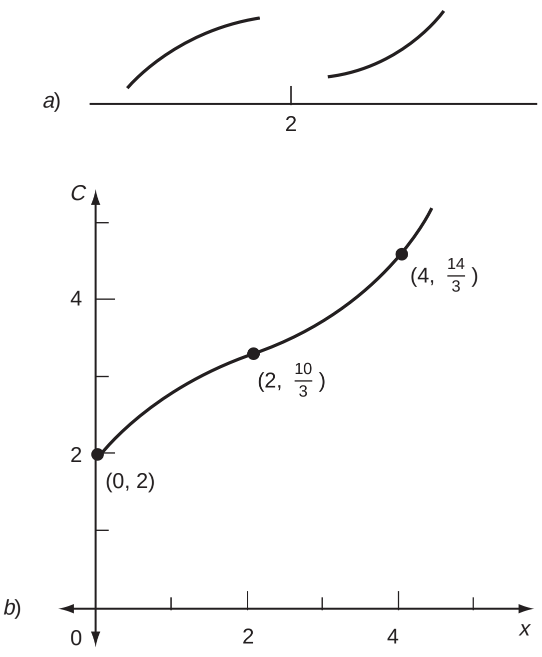


FIGURA 24

Paso 4 Cuando $x = 0$, $C = 2$, dando el punto (0, 2). Haciendo $C = 0$ obtenemos una ecuación cúbica en x, que no estamos en posibilidades de resolver. En consecuencia, debemos prescindir de esta información.

Es útil tener un punto más sobre la gráfica a la derecha de $x = 2$, de modo que calculamos el valor de C para $x = 4$ y encontramos el punto $(4, \frac{14}{3})$.

Integrando toda esta información, obtenemos la gráfica que se observa en la figura 24(b).

EJERCICIOS 3-4

(1-12) Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

1. $y = x^2 - 6x + 7$

2. $y = x^2 - 4x + 5$

3. $y = x^3 - 3x + 4$

4. $y = x^3 - 12x + 10$

5. $y = x^3 - 3x + 2$

6. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$

7. $y = x^4 - 2x^2$

8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

9. $y = x^5 - 5x^4 + 1$

10. $y = x^7 - 7x^6$

11. $y = 5x^6 - 6x^5 + 1$

12. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

(13-14) Dibuje las gráficas de las dos funciones de costo de los ejercicios 23 y 24 de la sección 3-3 (sólo considere $x \geq 0$).

■ 3-5 APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El siguiente ejemplo representa un caso común del asunto.

EJEMPLO 1 ***(Conservación óptima)*** Un ecólogo cultiva peces en un lago. Cuanto más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w = 600 - 30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución La ganancia en peso de cada pez es $w = 600 - 30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente,

$$P = n(600 - 30n) = 600n - 30n^2$$

Con el propósito de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn:

$$\frac{dP}{dn} = 600 - 60n$$

y $dP/dn = 0$ cuando $600 - 60n = 0$, esto es, si $n = 10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$\mathrm{P} = 600(10) - 30(10)^2 = 3000$$

es decir, 3000 gramos por unidad de área. Podemos verificar que esto es un máximo local usando la regla de la segunda derivada:

$$\frac{d^2P}{dn^2} = -60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico $n = 10$ corresponde a un máximo de P.

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero ya que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n = 20$. Si n sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña. ☛ **16**

☛ **16.** Vuelva a resolver el ejemplo 1, si el peso promedio que gana cada pez es $w = 800 - 25n$

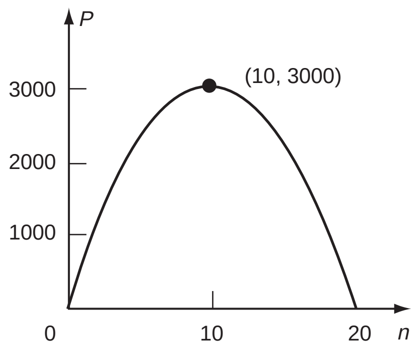


FIGURA 25

Respuesta $n = 16$

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

EJEMPLO 2 Determine dos números cuya suma sea 16, de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución Sean los dos números x y y, de modo que $x + y = 16$. Si $P = xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes, sino que están relacionadas por la condición $x + y = 16$. Debemos usar esta condición para eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y = 16 - x$, y así

$$P = xy = x(16 - x) = 16x - x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx} = 16 - 2x$$

Así que $dP/dx = 0$ cuando $16 - 2x = 0$, esto es, si $x = 8$. La segunda derivada $d^2P/dx^2 = -2 < 0$, y $x = 8$ corresponde a un máximo de P.

Cuando $x = 8$, también $y = 8$, de modo que el valor máximo de P es igual a 64. ☛ **17**

☛ **17.** Encuentre dos números cuyo producto sea 64 y su suma sea mínima.

Respuesta 8 y 8

La solución de problemas de optimización del tipo anterior con frecuencia es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir en ecuaciones el problema dado en palabras. Una vez que las ecuaciones se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras como términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de las matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo para que sean de utilidad.

Por desgracia, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal pueda reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que conviene tener en mente.*

Paso 1 Identifique todas las variables implicadas en el problema y denote cada una de ellas mediante un símbolo.

En el ejemplo 1, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganancia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de los peces por unidad de área. En el ejemplo 2, las variables eran los dos números x y y, y P, su producto.

Paso 2 Destaque la variable que tiene que maximizarse o minimizarse y exprésela en términos de las otras variables del problema.

Volviendo al ejemplo 1, la producción total P se maximizó, y escribimos $P = nw$, que expresa a P en términos de n y w. En el ejemplo 2, el producto P de x y y se maximizó y por supuesto $P = xy$.

Paso 3 Determine todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente.

En el primer ejemplo, se daba la relación $w = 600 - 3n$. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática $x + y = 16$.

Paso 4 Exprese la cantidad por maximizar o minimizar en términos de una sola de las variables. Con el objetivo de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 para eliminar todas las variables excepto una.

Recurriendo de nuevo al ejemplo 1, tenemos que $P = nw$ y $w = 600 - 3n$, de modo que, eliminando w, se obtiene P en términos de n: $P = n(600\ 3n)$. En el ejemplo 2, tenemos que $P = xy$ y $x + y = 16$, por lo que, eliminando y, obtenemos $P = x(16 - x)$.

Paso 5 Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determine sus puntos críticos e investigue si son máximos o mínimos locales.

*Los pasos 1 y 3 no sólo se aplican a problemas de optimización sino a problemas verbales en general.

Seguiremos estos pasos en otro ejemplo.

EJEMPLO 3 ***(Costo mínimo)*** Se debe construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque necesita una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de \$10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1 Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados, los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (Véase la figura 26). La cantidad que debe minimizarse es el costo total de materiales, que denotamos con C.

Paso 2 C es igual al área del tanque multiplicada por \$10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área igual a x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x y y, y tiene un área xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto $x^2 + 4xy$. En consecuencia, escribimos

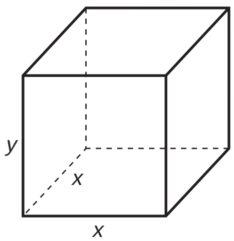


FIGURA 26

$$C = 10(x^2 + 4xy)$$

Paso 3 Observe que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y para eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento (establecido en el problema) de que el volumen del tanque debe ser de 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición

$$x^2y = 4$$

☛ **18.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si el tanque tiene una tapa que cuesta \$30 por metro cuadrado.

Paso 4 Por el paso 3, $y = 4/x^2$, y así

$$C = 10\left[x^2 + 4x\left(\frac{4}{x^2}\right)\right] = 10\left[x^2 + \frac{16}{x}\right]$$

Paso 5 Podemos derivar la última expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx} = 10\left(2x - \frac{16}{x^2}\right) = 20\left(x - \frac{8}{x^2}\right) = 0$$

Así, $x - 8/x^2 = 0$ y por tanto $x^3 = 8$; es decir, $x = 2$.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque ahora está dada por

$$y = \frac{4}{x^2} = 4/(2)^2 = 1$$

Es fácil verificar que $d^2C/dx^2 > 0$ cuando $x = 2$, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C. ☛ **18**

Respuesta $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$, $y = \sqrt[3]{16} \approx 2.52$

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de máximos y mínimos es en las operaciones de empresas comerciales. Esto ocurre por una razón simple, una empresa selecciona su estrategia y nivel de operación en tal forma que maximice su utilidad. Así pues, si la administración de la empresa sabe cómo depende la utilidad de alguna variable que puede ajustarse, entonces elegirán el valor de tal variable de modo que produzca la máxima utilidad posible.

Consideremos el caso en que la variable a ajustar es el nivel de producción x (el número de unidades del producto de la empresa elaboradas por semana o por mes). Si cada unidad se vende a un precio p, el ingreso es $R(x) = px$. El costo de producir x artículos depende de x y se denota por $C(x)$, la función de costo. Se sigue que la utilidad es una función de x dada por

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Deseamos elegir el valor de x que haga a P máxima.

En primer término, abordemos el caso en que una pequeña empresa vende su producto en un mercado de libre competencia. En esta situación, el volumen de ventas x de esta empresa particular no afectará el precio del mercado para el artículo en cuestión. Podemos suponer que el precio p es constante, independiente de x, determinado por fuerzas económicas fuera del control de nuestra pequeña empresa. El siguiente ejemplo ilustra un problema de esta clase.

EJEMPLO 4 ***(Maximización de utilidades)*** Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución El ingreso producido por la venta de x artículos a \$6 cada uno es $R(x) = 6x$ dólares. Por consiguiente, la utilidad por semana es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 6x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3) \\ &= -1000 + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

A fin de encontrar el valor máximo de P, buscamos los puntos críticos en la forma usual y luego investigamos su naturaleza. Derivando obtenemos

$$P'(x) = 0.006x - (3 \times 10^{-6})x^2$$

y haciendo $P'(x) = 0$, encontramos que $x = 0$ o $x = 2000$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada:

$$P''(x) = 0.006 - (6 \times 10^{-6})x$$

de modo que

$$P''(0) = 0.006 > 0 \qquad \text{y} \qquad P''(2000) = -0.006 < 0$$

Así que $x = 0$ es un mínimo local de $P(x)$, mientras que $x = 2000$ es un máximo local.

Este último valor representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. La utilidad está dada por

$$P(2000) = -1000 + 0.003(2000)^2 - 10^{-6}(2000)^3 = 3000$$

o \$3000 por semana.

Se presenta una situación distinta en el caso de una gran empresa que en esencia es el único proveedor de un producto particular. En tal caso, la empresa controla o monopoliza el mercado, y puede elegir el precio de venta que desee para el producto. El volumen de ventas está determinado ahora por el precio a que se ofrece el producto (a través de la ecuación de demanda). Si escribimos la ecuación de demanda en la forma $p = f(x)$, se sigue que la función de ingreso es $R = xp = xf(x)$. Luego, la función de utilidad es

$$P(x) = \text{Ingreso} - \text{Costo} = x\,f(x) - C(x)$$

y x debe elegirse de modo que maximice esta función.

EJEMPLO 5 **(*Decisiones sobre fijación de precios*)** El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

En el caso del artículo en cuestión, el precio en que x artículos pueden venderse por semana está dado por la ecuación de demanda

$$p = 12 - 0.0015x$$

Determine el precio y el volumen de ventas en que la utilidad es máxima.

Solución El ingreso por semana es

$$R(x) = px = (12 - 0.0015x)x$$

Luego, la utilidad está dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (12x - 0.0015x^2) - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3) \\ &= -1000 + 6x + 0.0015x^2 - 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

Con la finalidad de encontrar el valor máximo de $P(x)$, hacemos $P'(x) = 0$

$$P'(x) = 6 + 0.003x - (3 \times 10^{-6})x^2 = 0$$

Cambiando signos, dividiendo entre 3 y multiplicando por 10^6 la ecuación completa, obtenemos $x^2 - 1000x - 2 \times 10^6 = 0$. Podemos factorizar el lado izquierdo como

$$(x - 2000)(x + 1000) = 0$$

y así las soluciones son $x = 2000$ o -1000. (Estas soluciones pudieron obtenerse también por medio de la fórmula cuadrática).

La raíz negativa no tiene importancia práctica, de modo que sólo necesitamos considerar $x = 2000$. Con el objetivo de verificar que ésta en realidad representa un máximo local de la función de utilidad, podemos comprobar que $P''(2000) < 0$. Esto es fácil.

☛ **19.** Determine el valor de x que maximiza la ganancia y la ganancia máxima, si la función de costo es $C(x) = (1 + x)^2$ y la ecuación de demanda es $p = 10 - x$.

$$P''(x) = 0.003 - (6 \times 10^{-6})x$$

$$P''(2000) = 0.003 - (6 \times 10^{-6})(2000) = -0.009$$

Por tanto, el volumen de ventas de 2000 artículos por semana nos da la utilidad máxima. El precio por artículo que corresponde a este valor de x es

$$p = 12 - 0.0015x = 12 - 0.0015(2000) = 9$$ ☛ **19**

Para cualquier empresa, la utilidad es la diferencia entre el ingreso y los costos:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

En consecuencia, suponiendo que todas las funciones son diferenciables,

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Cuando la utilidad es máxima, $P'(x) = 0$, y se sigue que $R'(x) = C'(x)$.

Este resultado representa una importante conclusión general con respecto a la operación de cualquier empresa: *en el nivel de producción en que la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal*.

En un mercado de libre competencia, en que muchas empresas elaboran productos similares a casi el mismo precio, el volumen de ventas puede incrementarse mediante la publicidad. Sin embargo, si se gasta demasiado dinero en publicidad, el gasto excederá la ganancia en el ingreso por el incremento de las ventas. De nuevo, el criterio que debe usarse para decidir cuánto emplear en publicidad es que la ganancia debería ser máxima.

EJEMPLO 6 ***(Publicidad y ganancias)*** Una compañía obtiene una utilidad de \$5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por

$$x = 2000(1 - e^{-kA})$$

en donde $k = 0.001$. Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

Solución La utilidad bruta por la venta de x artículos es de $5x$ dólares, y de ésta restamos el costo de la publicidad. Esto nos deja una utilidad neta dada por

$$P = 5x - A = 10{,}000(1 - e^{-kA}) - A \tag{1}$$

Derivamos con la finalidad de encontrar el valor máximo de P.

$$\frac{dP}{dA} = 10{,}000(ke^{-kA}) - 1 = 10e^{-kA} - 1$$

dado que $k = 0.001$. Haciendo esto igual a cero, obtenemos

$$10e^{-kA} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad e^{kA} = 10$$

y tomando logaritmos naturales, resulta que

$$kA = \ln 10 = 2.30$$

Respuesta $x = 2$, $P_{\text{máx}} = 7$

con tres cifras significativas. En consecuencia,

$$A = \frac{2.30}{k} = \frac{2.30}{0.001} = 2300$$

La cantidad óptima que debe gastarse en publicidad es en consecuencia de \$2300 por semana.

La utilidad máxima se encuentra sustituyendo este valor de A en la ecuación (1). Ya que $e^{-kA} = \frac{1}{10}$, se sigue que la utilidad semanal máxima es

$$P_{\text{máx}} = 10{,}000(1 - \tfrac{1}{10}) - 2300 = 6700 \text{ dólares}$$

EJEMPLO 7 ***(Máxima utilidad e impuesto sobre la renta)*** Las funciones de costo y de demanda de una empresa son $C(x) = 5x$ y $p = 25 - 2x$, respectivamente.

a) Encuentre el nivel de producción que maximizará las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) Si se impone un impuesto de t por cada unidad y la empresa lo carga en su costo, encuentre el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?

c) Determine el impuesto por unidad t que debe imponerse para obtener un máximo impuesto sobre la renta.

Solución Tenemos:

$$\text{Ingreso} = \text{precio} \times \text{cantidad}$$

o

$$R = px = x(25 - 2x) = 25x - 2x^2$$

a) Si P denota la función de utilidad, entonces,

$$P = R - C = 25x - 2x^2 - 5x = 20x - 2x^2, \qquad \frac{dP}{dx} = 20 - 4x$$

Para encontrar la utilidad máxima, $dP/dx = 0$, o $20 - 4x = 0$, o $x = 5$. También, $d^2P/dx^2 = -4 < 0$. Así que las utilidades son máximas en el nivel de producción de $x = 5$ unidades. $P_{\text{máx}} = 20(5) - 2(5^2) = 50$.

b) Si se impone un impuesto t por cada unidad, la nueva función de costo será

$$C_N = 5x + tx$$

y las ganancias estarían dadas por

$$P = R - C_N = 25x - 2x^2 - (5x + tx) = (20 - t)x - 2x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 20 - t - 4x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2P}{dx^2} = -4$$

Para optimizar las ganancias, $dP/dx = 0$, que da

$$x = \frac{20 - t}{4} = 5 - \frac{t}{4}$$

La utilidad máxima es

$$P_{\text{máx}} = (20 - t)\left(\frac{20 - t}{4}\right) - 2\left(\frac{20 - t}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}(20 - t)^2$$

(Nótese que cualquier impuesto t positivo disminuye las utilidades de la empresa; mientras que un impuesto negativo t, es decir, un subsidio, incrementa las utilidades).

c) Si T denota el impuesto total obtenido, entonces,

$$T = tx = t\left(\frac{5 - t}{4}\right) = 5t - \frac{t^2}{4}$$

Deseamos maximizar T. Ahora,

$$\frac{dT}{dt} = 5 - \frac{t}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{2}$$

☛ **20.** Repita las partes *b*) y *c*) del ejemplo 7, si la función de costo es $C(x) = (1 + x)^2$ y la ecuación de demanda es $p = 10 - x$.

Para maximizar T debemos tener $dT/dt = 0$ y $d^2T/dt^2 < 0$. $dT/dt = 0$ que da $t = 10$. Por tanto, una tasa de impuesto de 10 por unidad producirá un impuesto máximo sobre la renta. ☛ **20**

Concluimos esta sección describiendo la aplicación de máximos y mínimos a un **modelo de costo de inventarios**. Consideremos un ejemplo particular. Supongamos que un fabricante produce 50,000 unidades de cierto artículo durante un año. Puede elegir entre varios programas de producción diferentes. Todas las unidades requeridas podrían fabricarse al inicio del año en una sola serie de producción. Debido a las economías de producción masiva, esto minimizaría el costo de producción. Sin embargo, significaría que grandes cantidades de artículos tendrían que mantenerse almacenados hasta que tuvieran que venderse, y los costos de almacenamiento podrían ser altos y aun exceder las ventajas de los bajos costos de producción.

Supongamos que tiene un costo de $400 preparar la planta manufacturera en cada serie de producción, que cada artículo cuesta $4 fabricarlo y que tiene un costo de 40¢ por año mantener un artículo almacenado. Supongamos que en cada serie de producción se produce el mismo número de artículos, y denotemos este número por x. Supongamos también que después de producir un lote, las x unidades se almacenan y se venden en una tasa uniforme de modo que las unidades almacenadas se agotan cuando ya está lista la próxima serie de producción. Así, el número de unidades almacenadas como una función del tiempo se ilustra en la figura 27. En cada serie de producción, el número salta de 0 a x, luego decrece progresivamente a una tasa constante hasta cero. Al alcanzar el cero, el próximo lote se produce y el número almacenado es de nuevo igual a x.

A partir de la figura 27 es claro que el número promedio de unidades almacenadas es $x/2$. Puesto que cuesta $0.40 almacenar cada artículo por año, los costos de almacenamiento en el año serán de $(0.4)(x/2)$ dólares o $x/5$ dólares.

Respuesta *b*) $x = 2 - \frac{1}{4}t$, $P_{\text{máx}}\ 2(2 - \frac{1}{4}t)^2 - 1$
c) $t = 4$, $T_{\text{máx}} = 4$

Dado que los 50,000 artículos necesarios se producen en lotes de tamaño x, el número de series de producción por año debe ser $50{,}000/x$. Por consiguiente, el cos-

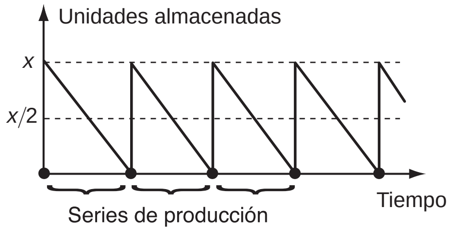


FIGURA 27

☛ **21.** Suponga que cuesta \$200 preparar cada serie de producción, \$2 por artículo a fabricar y \$4 anuales por almacenar cada artículo. Escriba la función de costo anual, si se requieren N artículos cada año y determine el tamaño de lote que la minimiza.

Respuesta $C = \dfrac{200N}{x} + 2N + 2x$, $x = 10\sqrt{N}$

to de preparar la planta para estas series de $(400)(50{,}000/x) = (2 \times 10^7/x)$ dólares. El costo de producir 50,000 artículos a \$4 cada uno es \$200,000. En consecuencia, los costos totales de fabricación y de almacenamiento a lo largo de un año (en dólares) están dados por

$$C = \frac{2 \times 10^7}{x} + 200{,}000 + \frac{x}{5}$$

Deseamos encontrar el valor de x que haga a C mínimo. Derivando resulta

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{2 \times 10^7}{x^2} + \frac{1}{5}$$

Haciendo esta derivada igual a cero, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{2 \times 10^7}{x^2} = \frac{1}{5}$$
$$x^2 = (2 \times 10^7)(5) = 10^8$$
$$x = 10^4 = 10{,}000$$

(La raíz negativa no tiene importancia práctica). Más aún, advertimos que

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{4 \times 10^7}{x^3}$$

que es positiva cuando $x = 10{,}000$. De modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

Por tanto, el costo mínimo se obtiene haciendo

$$50{,}000/10{,}000 = 5$$

series de producción por año, cada una de ellas con una producción de 10,000 unidades. ☛ **21**

Este tipo de modelo de costo de inventarios también se aplica a negocios tales como bodegas o mercados de venta al menudeo que mantienen existencias de artículos que han de venderse al público o a otras empresas. La pregunta es qué tan grande debe ser cada vez la cantidad de algún artículo que se ordena con destino a ser realmacenado. Si se ordena una cantidad muy grande, la empresa se enfrentará con sustanciales costos de almacenamiento, si bien no tendrá la desventaja de reordenar por un buen tiempo. Por otro lado, si sólo se ordena una pequeña cantidad ca-

da vez, los costos de almacenamiento serán bajos pero los costos de acomodar las órdenes serán altos, dado que las órdenes deberán realizarse con frecuencia. Entre estos extremos podemos esperar encontrar un tamaño óptimo de cada orden que haga el costo total de almacenamiento más el de acomodo un mínimo. Este óptimo se denomina el *tamaño del lote económico*. Puede determinarse, al menos en el caso de un modelo simple, mediante un método similar al que se dio. (Véase el ejercicio 29 de esta sección y el número 31 de los problemas de repaso).

EJERCICIOS 3-5

1. *(Teoría de números)* Determine dos números cuya suma sea 10 y tales que su producto sea máximo.

2. *(Teoría de números)* Encuentre dos números con suma igual a 8, de modo que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

3. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.

4. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos con suma igual a 12 de modo que la suma de sus cubos sea un mínimo.

5. *(Geometría)* Demuestre que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. *(Geometría)* ¿Cuál es el área del máximo rectángulo que puede inscribirse en un círculo de radio a?

7. *(Geometría)* ¿Cuál es el área del máximo rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio a?

8. *(Costos de cercas)* Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20 por metro?

9. *(Costos de cercas)* Repita el ejercicio 8 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

10. *(Diseño de un folleto impreso)* Un folleto impreso debe contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior, y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

11. *(Diseño de una cisterna)* Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determine las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

12. *(Diseño de una cisterna)* Repita el ejercicio 11 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

13. *(Costo promedio mínimo)* El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C} = 5 + \frac{48}{x} + 3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentre el valor mínimo de $\overline{C}$.

14. *(Modelo de control de inventarios)* El costo de la producción anual de un artículo es

$$C = 5000 + \frac{80{,}000{,}000}{x} + \frac{x}{20}$$

en donde x es el tamaño promedio del lote por serie de producción. Encuentre el valor de x que hace mínimo a C.

15. *(Costo promedio mínimo)* El costo de producir x artículos de cierto producto es

$$C(x) = 4000 + 3x + 10^{-3}x^2 \text{ (dólares)}$$

Determine el valor de x que hace del costo promedio por artículo un mínimo.

16. *(Costo promedio mínimo)* Repita el ejercicio 15 en el caso de la función de costo $C(x) = 16{,}000 + 3x + 10^{-6}x^3$ (dólares).

17. *(Costo marginal y costo promedio mínimos)* La función de costo para una empresa, está dada por

$$C(x) = 300x - 10x^2 + x^3/3$$

Calcule la producción x en la cual

a) el costo marginal es mínimo.

b) el costo promedio es mínimo.

18. *(Costo marginal mínimo)* Una empresa produce mensualmente x toneladas de un metal precioso con un costo total C dado por $C(x) = 10 + 75x - 5x^2 + x^3/3$ dólares. Encuentre el nivel de producción x donde el costo marginal alcanza su mínimo.

19. *(Ingreso máximo)* La función de demanda para cierto bien está dado por $p = 15e^{-x/3}$ para $0 \leq x \leq 8$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas. Determine el precio p y la cantidad x para los cuales el ingreso es máximo.

20. *(Ingreso máximo)* Repita el ejercicio 19 para la ley de demanda $p = 10e^{-x^2/32}$ para $0 \leq x \leq 6$.

21. *(Utilidad máxima)* Una empresa vende todas las unidades que produce a \$4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escriba la expresión para la utilidad total P como una función de x.

b) Determine el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima.

c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

22. *(Utilidad máxima)* Una compañía advierte que puede vender toda la existencia de cierto producto que elabora a una tasa de \$2 por unidad. Si estima la función de costo del producto como $(1000 + \frac{1}{2}(x/50)^2)$ dólares por x unidades producidas:

a) Encuentre una expresión para la utilidad total si se producen y venden x unidades.

b) Determine el número de unidades producidas que maximizarían la utilidad.

c) ¿Cuál es la cantidad de utilidad máxima?

d) ¿Cuál sería la utilidad si se produjeran 6000 unidades?

23. *(Utilidad máxima)* En el ejercicio 15, los artículos en cuestión se venden a \$8 cada uno. Encuentre el valor de x que maximiza la utilidad y calcule la utilidad máxima.

24. *(Utilidad máxima)* En el ejercicio 16, cada uno de los artículos se vende a \$30. Determine el valor de x que maximiza la utilidad y calcule la utilidad máxima.

25. *(Utilidad máxima)* Para cierto artículo, la ecuación de demanda es $p = 5 - 0.001x$. ¿Qué valor de x maximiza el ingreso? Si la función de costo es $C = 2800 + x$, encuentre el valor de x que maximiza la utilidad. Calcule la utilidad máxima.

26. *(Utilidad máxima)* Repita el ejercicio 25 para la ecuación de demanda $p = 8 - 0.02x$ y la función de costo $C = 200 + 2x$.

27. *(Efecto del impuesto en la producción)* La función de costo total de una fábrica está dada por

$$C(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$$

y la demanda del producto está dada por $p = 2750 - 5x$, donde p y x denotan el precio en dólares y la cantidad respectiva se grava con \$222 de impuesto por cada unidad producida, que el fabricante añade a su costo. Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar las utilidades. Muestre que la producción después del impuesto es menor que la producción antes del impuesto que maximiza las utilidades.

28. *(Efecto del impuesto en la productividad)* Repita el ejercicio 27 para

$$C(x) = 30 + 12x - 0.5x^2 \quad \text{y} \quad p = 60 - 2x$$

donde el impuesto es de \$3 por unidad gravada.

29. *(Tamaño del lote económico)* Un material se demanda a una tasa de 10,000 unidades por año; el precio del material es de \$2 por unidad; el costo de volver a surtir el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden (x), es de \$40 por orden; el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias promedio ($x/2$). C es el costo anual de pedir y tener almacenado el material.

a) Demuestre que

$$C = 20{,}000 + \frac{400{,}000}{x} + \frac{x}{10}$$

b) Encuentre el tamaño económico del lote.

30. *(Modelo de control de inventarios)* Una fábrica tiene que producir 96,000 unidades de un artículo al año. El costo del material es de \$2 por unidad y el costo de volver a surtir la existencia de material por orden sin importar el tamaño x de la orden es de \$25 por orden. El costo de tener almacenado el material es de 30¢ por artículo por año sobre las existencias ($x/2$). Pruebe que el costo total C está dado por

$$C = 192{,}000 + \frac{2{,}400{,}000}{x} + \frac{3x}{20}$$

Determine también el tamaño del lote económico (esto es, el valor de x para el que C es mínimo).

31. *(Modelo de costo de inventarios)* Un distribuidor de automóviles vende 100,000 autos al año y los pide a la fábrica en lotes de tamaño x. Cuesta $1000 colocar cada pedido y los costos de almacenaje por automóvil son de $200 al año. Calcule el tamaño óptimo de cada lote para minimizar la suma del costo del pedido y el costo de almacenaje.

32. *(Modelo de costo de inventarios)* Un fabricante requiere N de ciertas partes por año. Cuesta K dólares colocar cada pedido de partes nuevas, sin importar el tamaño del pedido y cuesta I dólares anuales almacenar cada artículo inventariado. Pruebe que el tamaño de pedido óptimo es igual a $\sqrt{2NK/I}$. Calcule el costo mínimo total del pedido más el almacenaje.

33. *(Costo de la tierra)* Una compañía está buscando un terreno rectangular en el cual pueda construir un almacén nuevo. El área del almacén debe ser 6400 metros cuadrados. Debe tener en un lado del edificio 40 metros de ancho para la zona de carga y al frente 10 metros de ancho para estacionamiento. ¿Cuál es el área mínima de terreno que la compañía debe buscar?

34. *(Máximo ingreso)* Un restaurante especializado en carnes determina que al precio de $5 por platillo de carne tendrán en promedio 200 clientes por noche, mientras que si lo vende a $7 el número promedio de clientes bajará a 100. Determine la relación de demanda suponiendo que es lineal. Encuentre el precio que maximiza el ingreso.

35. *(Utilidad y satisfacción del cliente)* Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de sus cajeros, aunque espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de esperar. Supongamos que el salario de los cajeros es de $80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es $5000/(n + 1)$ dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

36. *(Máximo volumen)* Se corta un cuadrado de tamaño x de cada esquina de una cartulina rectangular que mide 12×18 pulgadas y las cuatro aristas se doblan para formar una caja de profundidad x. Encuentre el valor de x que da la caja de volumen máximo.

***37.** *(Mínima área)* Se corta un cuadrado de tamaño x de cada esquina de una cartulina cuadrada de tamaño $y \times y$, las cuatro aristas se doblan para formar una caja de profundidad x. Se requiere que la caja tenga un volumen de 128 centímetros cúbicos. Encuentre los valores de x y y que minimizan el área de la cartulina original.

38. *(Forma óptima de una lata)* Se desea fabricar latas cilíndricas con un volumen V dado. Pruebe que la forma de una lata que minimiza la cantidad de material utilizado (es decir, minimiza el área total de los lados, la base y la tapa), es tal que el radio es igual a dos veces la altura. (¿Por qué la mayoría de las latas no se hacen así?).

39. *(Producción máxima de madera)* Una compañía forestal planea desmontar cierta área de pinos después de cierto número de años. El número promedio de pies que se obtienen por árbol en un periodo dado de tiempo se sabe que es igual a $50 - 0.5x$, en donde x es el número de árboles por acre, con x entre 35 y 80. ¿Qué densidad de árboles debe conservarse para maximizar la cantidad de madera por acre?

40. *(Producción de cultivos)* La producción y (en toneladas por hectárea) de cierto cultivo de trigo está dada por $y = a(1 - e^{-kx}) + b$, donde a, b y k son constantes y x es el número de kilos de fertilizante por hectárea. La utilidad generada por la venta de trigo está dada por $P = py - c_0 - cx$ en donde p es la utilidad por tonelada, c es el costo por kilo de fertilizante y c_0 es un costo fijo. Determine cuánto fertilizante debe usarse para maximizar la utilidad P.

41. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* La cantidad x de un artículo que puede venderse al mes a un precio p está dada por $x = 100(5 - p)$. La cantidad que los proveedores ofrecerán a un precio p_1 es $x = 200(p_1 - 1)$. Si existe un impuesto t por cada artículo (de modo que $p_1 = p - t$), determine la cantidad x que se vende al mes si el mercado está en equilibrio. Encuentre el valor de t que da el máximo impuesto total por mes al gobierno.

42. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* Repita el ejercicio 41 si la ecuación de demanda es $x = 400(15 - p)$ y la ecuación de la oferta es $x = 400(2p_1 - 3)$. Calcule el rendimiento mensual del impuesto al gobierno.

43. *(Costos de construcción)* El costo de levantar un edificio con n pisos a menudo puede suponerse que tiene la forma $a + bn + cn^2$, en donde a, b y c son constantes. (Aquí a representa costos fijos como costos del terreno, b representa un costo que es el mismo para cada piso, tales como paredes interiores, ventanas, recubrimiento de pisos, y cn^2 representa costos como elementos estructurales, que se incrementan con el cuadrado del número de pisos). Calcule el valor de n que hace que el costo promedio por piso sea un mínimo. Demuestre que cuando el costo del terreno se incrementa, este valor óptimo de n crece.

44. *(Costos de calefacción)* Un individuo está planeando aislar una casa. Actualmente el costo anual de calefacción es $3000 pero si se añaden x pulgadas de aislante el costo se reducirá a $3000e^{-0.1x}$ dólares. Por cada pulgada de aislante, el propietario debe pedir $1000 al banco a una tasa de interés de 10%. ¿Cuántas pulgadas debe añadir para minimizar el total del costo de calefacción más el interés?

45. *(Tiempo óptimo de ventas)* Un especulador compra un lote de vino raro cuyo valor aumenta de acuerdo con la fórmula $V(t) = S(1 + 0.2t)$, donde t es el tiempo medido en años. Si el vino se vende al cabo de t años, se deben descontar los réditos para obtener un valor presente de $P(t) =$

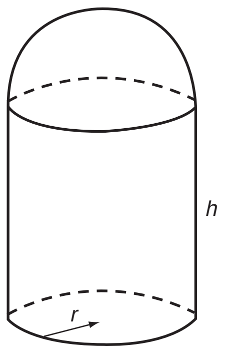
$V(t)e^{-rt}$, donde $r = R/100$ y R es la tasa nominal de descuento. ¿A los cuántos años debe venderse el vino para optimizar su valor presente?

***46.** *(Plaga de plantas)* El porcentaje de árboles frutales de una plantación que han sido infectados con cierta plaga está dado por

$$P(t) = \frac{100}{1 + 50e^{-0.1t}}$$

donde t es el tiempo en días. Calcule el tiempo en el cual $P'(t)$ es máximo. ¿Qué significa este tiempo?

47. *(Diseño de un granero)* Se va a construir un granero con la forma de un cilindro vertical con un techo semiesférico. El granero debe ser capaz de contener 10,000 pies cúbicos de grano. (Suponga que el grano se guarda únicamente en la parte cilíndrica y no en el techo). El techo semiesférico cuesta el doble por unidad de área que la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones debe tener el granero para minimizar el costo total?



48. *(Viajes de grupos)* Un agente de viajes ofrece un plan de vacaciones a grupos sobre las siguientes bases: para grupos de tamaño hasta 50, la tarifa es de \$400 por persona, mientras que en el caso de grupos más grandes, la tarifa por persona se reduce en \$2 por cada viajero que exceda a 50. Determine el tamaño del grupo que maximice el ingreso del agente de viajes.

***49.** *(Ingreso y utilidad máximas)* Un fabricante fija el precio de un producto en \$10 cada uno para órdenes menores de 200 unidades y ofrece una reducción en el precio de 2¢ por cada artículo ordenado que exceda a 200; la reducción se aplica a la orden completa. Calcule el tamaño de la orden que maximiza el ingreso del fabricante. Si el costo de producción de cada artículo es de \$5, determine el tamaño de la orden que maximiza la utilidad del fabricante. ¿Cómo se modifica este último resultado si los costos del fabricante se incrementan a \$7 por artículo?

50. *(Costo de instalación de una línea telefónica)* Se desea construir una línea telefónica entre dos torres A y B situadas en orillas opuestas de un río. El ancho del río es de 1 kilómetro, y B está situada 2 kilómetros río abajo de A. Tiene un costo de \$$c$ por kilómetro tender una línea sobre tierra y de \$$2c$ por kilómetro abajo del agua. La línea telefónica seguirá la orilla del río a partir de A una distancia x (en kilómetros) y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta B. Determine el valor de x que minimiza el costo total.

51. *(Refinería costera)* Una compañía de petróleo requiere un oleoducto de una torre de perforación situada mar adentro a una refinería que se construye en la costa cercana. La distancia de la torre de perforación al punto más cercano P sobre la costa es de 20 kilómetros y la distancia a lo largo de la costa de P a la refinería es de 50 kilómetros. A partir de la refinería, el oleoducto recorrerá una distancia x a lo largo de la costa, después seguirá una línea recta hasta la torre de perforación. El costo por kilómetro de oleoducto bajo el agua es de tres veces el correspondiente a la sección sobre tierra. Encuentre el valor de x que minimiza el costo total del oleoducto.

52. *(Epidemia)* En el transcurso de una epidemia, la proporción de población infectada después de un tiempo t es igual a

$$\frac{t^2}{5(1 + t^2)^2}$$

(t está medido en meses, y la epidemia empieza en $t = 0$). Encuentre la máxima proporción de población que llega a infectarse, así como el tiempo en el cual la proporción de individuos infectados crece más rápidamente.

53. *(Reacción a una droga)* La reacción a dos drogas como función del tiempo (medido en horas) está dada por

$$R_1(t) = te^{-t}, \qquad R_2(t) = te^{-2t^2}$$

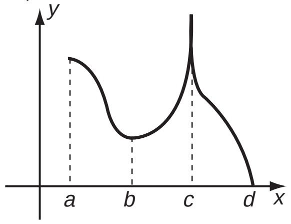
¿Qué droga tiene la reacción máxima mayor?

54. *(Reacción a una droga)* La reacción a una droga en el tiempo t después de haber sido administrada está dada por $R(t) = t^2e^{-t}$. ¿En qué momento la reacción es máxima?

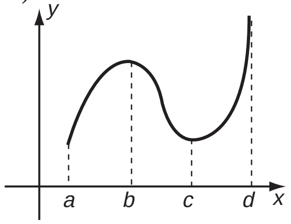
■ 3-6 MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

☛ **22.** Por inspección de las siguientes gráficas, proporcione los valores de x en los que cada función toma sus valores máximo absoluto y mínimo absoluto en el intervalo dado.

a)



b)



Respuesta *a*) Máximo absoluto c, mínimo absoluto d.
b) Máximo absoluto en d, mínimo absoluto en a y en c.

☛ **23.** Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de las siguientes funciones en los intervalos dados:
a) $f(x) = 3 + 4x - x^2$ en $[0, 3]$;
b) $f(x) = x^3 - 12x + 5$ en $[-3, 4]$

Respuesta *a*) Máximo absoluto 7 en $x = 2$, mínimo absoluto 3 en $x = 0$
b) máximo absoluto 21 en $x = -2$ y $x = 4$, mínimo absoluto -11 en $x = 2$

En algunos problemas, ocurre que la variable independiente x se restringe a algún intervalo de valores, digamos $a \leq x \leq b$, y necesitamos encontrar el valor máximo o mínimo de una función $f(x)$ sobre este conjunto de valores de x. De hecho, la mayoría de nuestros problemas de la última sección eran de este tipo, si bien no enfatizamos esto allí. Por ejemplo, si x es el nivel de producción de alguna empresa, x está restringida al intervalo $x \geq 0$ y nos interesa el valor máximo de la función de utilidad en este intervalo. Cualquier máximo local que pueda ocurrir en algún valor negativo de x no tiene importancia. Esta restricción sobre x no afecta ninguno de los resultados que hemos obtenido, pero surgen casos en que restricciones similares pueden afectar las conclusiones con respecto al óptimo.

DEFINICIÓN El valor **máximo absoluto** de $f(x)$ sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ de su dominio es el valor más grande de $f(x)$ cuando x asume todos los valores entre a y b. De manera similar, el valor **mínimo absoluto** de $f(x)$ es el valor más pequeño de $f(x)$ a medida que x varía entre a y b.

Es evidente que si $f(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$, el punto en que $f(x)$ alcanza su máximo absoluto debe ser un máximo local de $f(x)$ o uno de los puntos extremos a o b. Una proposición similar es válida en el caso del mínimo absoluto. Con el objetivo de encontrar los valores máximos o mínimos absolutos de $f(x)$ sobre $a \leq x \leq b$, sólo tenemos que seleccionar los valores más grande y más pequeño entre los valores de $f(x)$ en los puntos críticos situados en $a \leq x \leq b$ y en los puntos extremos a y b. Esto se ilustra en el ejemplo 1. ☛ **22**

EJEMPLO 1 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de

$$f(x) = 1 + 12x - x^3 \qquad \text{en } 1 \leq x \leq 3$$

Solución Tenemos que $f'(x) = 12 - 3x^2$

Puesto que $f'(x)$ está definida para toda x, los puntos críticos de f están dados por $f'(x) = 0$ o $x^2 = 4$; esto es, $x = \pm 2$. Pero $x = -2$ *no* está dentro del intervalo $1 \leq x \leq 3$. Así, sólo consideremos el punto crítico $x = 2$, más los puntos extremos $x = 1$ y $x = 3$. Los valores de $f(x)$ en estos puntos son

$$f(1) = 1 + 12 - 1 = 12$$
$$f(2) = 1 + 24 - 8 = 17$$
$$f(3) = 1 + 36 - 27 = 10$$

En consecuencia, el valor máximo absoluto de $f(x)$ es 17, que ocurre en $x = 2$, y el mínimo absoluto es 10, que coincide con el punto extremo $x = 3$. La gráfica de $y = 1 + 12x - x^3$ aparece en la figura 28. Dentro del intervalo $1 \leq x \leq 3$, la gráfica tiene un solo máximo local en $x = 2$. El valor mínimo absoluto coincide con el punto extremo $x = 3$. ☛ **23**

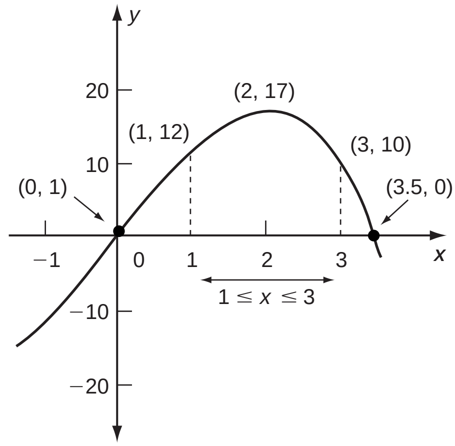


FIGURA 28

EJEMPLO 2 ***(Costo mínimo)*** Tiene que construirse una cisterna subterránea con la finalidad de albergar 100 pies cúbicos de desechos radiactivos. La cisterna tendrá forma cilíndrica. La base circular y la cara lateral, todos bajo tierra, tienen un costo de \$100 por pie cuadrado y la tapa, al nivel del suelo tiene un costo de \$300 por pie cuadrado debido a la necesidad de protección. Más aún, la profundidad del tanque no puede exceder los 6 pies porque una capa de dura roca está por debajo de la superficie, lo que incrementaría el costo de la excavación enormemente si se penetrara. Por último, el radio del tanque no puede exceder 4 pies por limitaciones de espacio. ¿Qué dimensiones del tanque hacen del costo un mínimo?

Solución Sea el radio de r pies y la profundidad de x pies. (Véase la figura 29). Se sigue que el volumen es $\pi r^2 x$, que debe ser igual a los 100 pies cúbicos requeridos:

$$\pi r^2 x = 100 \tag{1}$$

El área de la cara vertical es $2\pi rx$ y la correspondiente a la base es πr^2, y todas éstas tienen un costo de \$100 por pie cuadrado. De modo que

$$\text{Costo (en dólares) de la base y la cara lateral} = (2\pi rx + \pi r^2)(100)$$

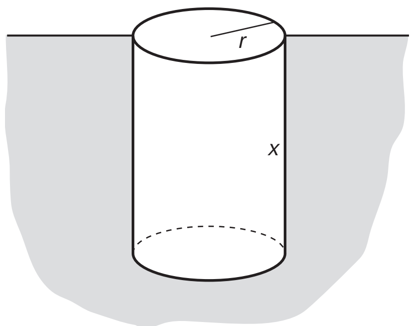


FIGURA 29

La tapa cuesta $(\pi r^2)(300)$ dólares. Por consiguiente, el costo total C (en dólares) es

$$C = (2\pi rx + \pi r^2)(100) + (\pi r^2)(300) = 200\pi rx + 400\pi r^2$$

Pero por la ecuación (1), $x = 100/\pi r^2$, de modo que sustituyendo x encontramos que

$$C = \frac{20{,}000}{r} + 400\pi r^2$$

Con el objetivo de encontrar el valor mínimo de C hacemos $dC/dr = 0$ y despejamos r.

$$\frac{dC}{dr} = -\frac{20{,}000}{r^2} + 800\pi r = 0$$

$$800\pi r = \frac{20{,}000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{20{,}000}{80\pi} = \frac{25}{\pi}$$

Por tanto, $r = \sqrt[3]{25/\pi} \approx 2.00$

El valor correspondiente de x es

$$x = \frac{100}{\pi r^2} \approx \frac{100}{\pi(2.00)^2} = 7.96$$

Por tanto, las dimensiones que corresponden a la construcción más barata son un radio de 2 pies y una profundidad de 7.96 pies. Sin embargo, no teníamos permitido un valor de x que excediera los 6 pies. De modo que si bien el valor $x = 7.96$ da el costo mínimo de C, no ofrece la solución al problema tal como se planteó.

Calculemos el intervalo de valores permisibles de r. El mayor valor de r está dado como 4. El más pequeño ocurre cuando la profundidad es la mayor, esto es, cuando $x = 6$. En ese caso, $r^2 = 100/\pi x = 100/6\pi$, así

$$r = \sqrt{100/6\pi} \approx 2.30$$

Por lo que r está restringida al intervalo $2.30 \leq r \leq 4$

Dentro de este intervalo, C no tiene puntos críticos, así que sólo necesitamos evaluarla en los puntos finales del intervalo:

☛ **24.** Vuelva a resolver el ejemplo 2, si el costo de la tapa es \$100 por pie cuadrado.

$$C(2.30) = \frac{20{,}000}{2.30} + 400\pi(2.30)^2 \approx 15{,}300$$

$$C(4) = \frac{20{,}000}{4} + 400\pi(4)^2 \approx 25{,}100$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto de C es \$15,300 y ocurre cuando $r = 2.30$ (esto es, cuando $x = 6$). La gráfica de C como una función de r se muestra en la figura 30. ☛ **24**

Respuesta $r = 2.515$, $x = 5.031$

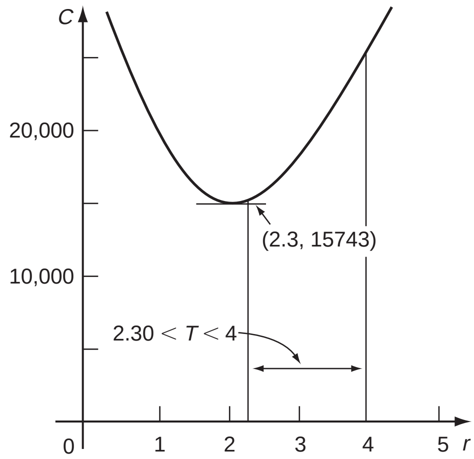


FIGURA 30

Resumen del método para encontrar extremos absolutos

Suponga que queremos el máximo absoluto y/o el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Paso 1. Determine los puntos críticos de f y *rechace* aquellos (si hay alguno) que esté fuera del intervalo $a \leq x \leq b$.

Paso 2. Evalúe la función dada f en los puntos críticos encontrados en el paso 1 y en los puntos extremos del intervalo a y b.

Paso 3. Entonces, el más grande y el más pequeño de los valores de f determinados en el paso 2 son, respectivamente, los valores máximo y mínimo absolutos de f en $a \leq x \leq b$.

EJERCICIOS 3-6

(1-14) Determine los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 7; \quad 1 \leq x \leq 6$

2. $f(x) = 9 + 6x - x^2; \quad 1 \leq x \leq 5$

3. $f(x) = x^3 - 75x + 1; \quad -1 \leq x \leq 6$

4. $f(x) = x^3 - 3x + 4; \quad -2 \leq x \leq 2$

5. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x; \quad -1 \leq x \leq 5$

6. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

7. $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-6)}{x^2}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

8. $f(x) = x + 1/x; \quad -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

9. $f(x) = xe^{-x}; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

10. $f(x) = x^2 e^{-x^2}; \quad -2 \leq x \leq 2$

11. $f(x) = x - \ln x; \quad e^{-1} \leq x \leq e$

12. $f(x) = x^{-1} \ln x; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 10$

*13. $f(x) = x \ln x; \quad 0 < x \leq 0.9$

14. $f(x) = (2x + 1)e^{-x}; \quad 0 \leq x < \infty$

15. *(Contaminación del agua)* Al depositarse en un lago, los desperdicios orgánicos disminuyen el contenido de oxígeno del agua. Si t denota el tiempo en días después que se deposita el desperdicio, en un caso se encuentra experimentalmente que el contenido de oxígeno es

$$y = t^3 - 30t^2 + 6000$$

con $0 \leq t \leq 25$. Encuentre los valores máximo y mínimo de y durante los primeros 25 días siguientes al vaciado del desperdicio.

16. *(Costo promedio mínimo)* La función de costo de un fabricante es

$$C(x) = 1000 + 5x + 0.1x^2$$

cuando se producen x artículos por día. Si a lo más 80 artículos pueden producirse por día, determine el valor de x que da el costo promedio más bajo por artículo.

17. *(Ingreso y utilidad máximos)* El costo de producir x artículos por semana es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

pero no más de 3000 artículos pueden producirse por semana. Si la ecuación de demanda es

$$p = 12 - 0.0015x$$

encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso y el nivel que maximiza la utilidad.

18. *(Decisiones sobre producción)* La función de costo en miles de dólares es

$$C(x) = 2 + x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3$$

en donde el nivel de producción x está en miles de unidades por semana. La planta productiva disponible limita a x al rango $0 \leq x \leq 4$. Si cada artículo producido puede venderse en \$2.50, determine el nivel de producción que maximiza.

a) El ingreso. *b*) La utilidad.

¿Cómo cambian sus conclusiones si la planta productiva se incremento a $x = 8$ con la misma función de costo?

19. *(Decisiones sobre producción)* La ecuación de demanda del producto de una compañía es $p = 200 - 1.5x$, en donde x unidades pueden venderse a un precio de \$$p$ cada una. Si le cuesta a la compañía $(500 + 65x)$ dólares producir x unidades por semana. ¿Cuántas unidades debería producir y vender la compañía cada semana con el objetivo de maximizar la utilidad, si la capacidad de producción es a lo más:

a) de 60 unidades? *b*) de 40 unidades?

20. *(Tiempo mínimo de reacción)* En una prueba hecha a pilotos aviadores sobre la velocidad de reacción en una crisis simulada, se encontró que el tiempo total requerido para reaccionar a la crisis variaba con la edad x del piloto de acuerdo con la fórmula $T = 0.04(1700 - 80x + x^2)^{1/2}$ sobre un rango de edad $30 \leq x \leq 55$. Dentro de este rango, ¿a qué edad es el tiempo mínimo de reacción?

21. *(Diseño de depósito)* Una compañía fabrica depósitos de agua con capacidad de 50 pies cúbicos. La base debe ser cuadrada. Debido a las limitaciones de almacenaje y transporte, el tamaño de la base y la altura no deben exceder de 5 pies. Encuentre las dimensiones que minimizan la cantidad de material utilizado (que minimizan el área de la superficie).

22. *(Diseño de depósito)* Repita el ejercicio 21 para el caso de un depósito con base circular cuyo diámetro no debe exceder 5 pies.

23. *(Modelo de costo de inventarios)* Un minorista en computadoras vende 30,000 modelos personales anualmente. El costo de cada nuevo pedido es de \$1200 sin importar su tamaño y el costo de almacenaje de cada computadora es de \$2 anuales. Más aún, solamente se pueden almacenar 5000 computadoras a la vez. ¿Cuántas veces al año debe reordenar para minimizar su costo total?

24. *(Fotosíntesis)* Si una planta recibe una luz de intensidad x, la razón de fotosíntesis y, medida en unidades adecuadas, se encontró experimentalmente que estaba dada por $y = 150x - 25x^2$ para $0 \leq x \leq 5$. Encuentre los valores máximo y mínimo de y cuando x pertenece al intervalo $1 \leq x \leq 5$.

*25. *(Medida de población)* El tamaño de cierta población de bacterias en el tiempo t (en horas) está dado por $y = a\,(1 + \frac{1}{2}e^t)^{-1}$, donde a es una constante. Un biólogo planea observar a la población durante un periodo de dos horas desde $t = 0$ a $t = 2$. ¿Cuáles serán la mayor y menor razón de crecimiento que observará?

■ 3-7 ASÍNTOTAS

En la primera parte de esta sección estaremos interesados en la forma en que ciertas funciones se comportan cuando sus argumentos toman valores muy grandes o decrecen a valores negativos muy grandes.

Considere, por ejemplo, $f(x) = 1/x$. Una tabla de valores de esta función para $x = 1, 10, 100, 1000$, etc., se da en la tabla 7. A partir de estos valores es claro que a medida que x se incrementa, $f(x)$ se acerca cada vez más a cero. Este comportamiento también se aprecia en la gráfica de $y = 1/x$ en la figura 31. Usaremos la notación $x \to \infty$ (que se lee como *"x tiende a infinito"*) con la finalidad de indicar que x crece sin cota alguna. El hecho de que $1/x$ esté cada vez más cerca de cero cuando $x \to \infty$ se expresa, entonces, en la forma de un límite:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

TABLA 7

x	1	10	100	1000	10,000	$\cdots$
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$

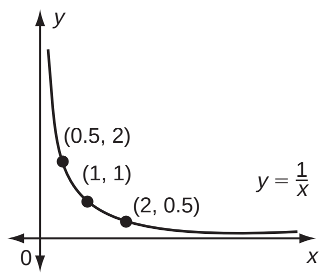


FIGURA 31

Como un segundo ejemplo consideremos la función

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

Los valores de esta función para un conjunto de valores de x se dan en la tabla 8. Es claro que a medida que x se incrementa, $f(x)$ está cada vez más cerca de 2. Esto también se observa en la gráfica de $y = (2x - 1)/x$ de la figura 32. Al incrementarse x, la gráfica se acerca cada vez más a la línea horizontal $y = 2$. Usando la notación de límite, escribimos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x} = 2$$

TABLA 8

x	1	10	100	1000	10,000	$\cdots$
$f(x)$	1	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$

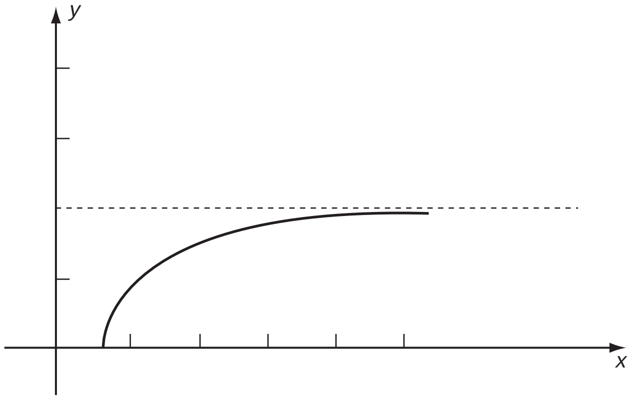


FIGURA 32

Empleamos la notación $x \to -\infty$ con el objetivo de indicar que x se hace indefinidamente grande en magnitud a través de valores negativos. Esto se lee *"x tiende a menos infinito"*. La definición formal de la notación de límite es como sigue.

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ tiende al **valor límite** L cuando $x \to \infty$ si el valor de $f(x)$ puede hacerse tan cercano a L tanto como se desee, simplemente tomando x lo bastante grande. Escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ tiende al **valor límite** L cuando $x \to \infty$ si el valor de $f(x)$ puede aproximarse a L tanto como se desee tomando a x como un número negativo lo suficientemente grande en valor absoluto. Escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ☛ \ \mathbf{25}$$

☛ **25.** Calculando algunos valores, como en la tablas 7 y 8, determine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} \ \text{ y } \ \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x}$$

Respuesta 0 y 3

Como hemos visto, la función $1/x$ tiende al límite cero cuando $x \to \infty$. Esta función también se aproxima al mismo límite cuando $x \to \infty$. Estos resultados se generalizan a potencias recíprocas.

TEOREMA 1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ para toda } n > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ para toda } n > 0\text{, con tal de que } \frac{1}{x^n} \text{ esté definido para } x < 0$$

☛ **26.** Evalúe:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{-x}}{x}\right)$

Respuesta a) 0
b) no existe
c) 2

EJEMPLO 1

$$\lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 0, \quad \lim_{x\to\infty} 1/\sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x^{-4/3} = 0$$

Nótese que los límites como $\lim_{x\to-\infty} 1/\sqrt{x}$ no existen porque $\sqrt{x}$ no está definida cuando $x < 0$. ☛ **26**

EJEMPLO 2 Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x^2 + x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 + 3x}$

Solución A fin de calcular el valor límite de tales funciones racionales la regla general es *dividir numerador y denominador entre la más alta potencia de* x *en el denominador* y luego se usa el teorema 1.

a) Divida entre x^2

$$f(x) = \frac{(2x^2 + 2) \div x^2}{(x^2 + x + 3) \div x^2} = \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$, todas las potencias recíprocas se aproximan a cero, y

$$f(x) \to \frac{2 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

Esto es, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

b) Divida entre x^3

$$f(x) = \frac{(x + 1) \div x^3}{(x^3 + 3x) \div x^3} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2}} \to \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

Así, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ☛ **27**

☛ **27.** Evalúe:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 1}{1 - x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2}{1 - 3x^2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 3x^2}{2x^2 - x - 1}$

Respuesta a) –2

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

EJEMPLO 3 ***(Utilidad y publicidad)*** De acuerdo con la estimación de una empresa, la utilidad P por la venta de su nuevo producto está relacionada con el gasto publicitario x mediante la fórmula

$$P(x) = \frac{23x + 15}{x + 4}$$

donde P y x están ambas en millones de dólares. a) Pruebe que $P(x)$ es una función creciente de x. b) Encuentre, si existe, el límite superior de la utilidad.

Solución

a) Tenemos que

$$P(x) = \frac{23x + 15}{x + 4}$$

Por la regla del cociente tenemos que

$$P'(x) = \frac{(x + 4)(23) - (23x + 15)(1)}{(x + 4)^2} = \frac{77}{(x + 4)^2}$$

Como $P'(x) > 0$ para toda $x > 0$, $P(x)$ es una función creciente de x, esto es, la utilidad crece al crecer la cantidad gastada en publicidad.

$$b)\ \lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{23x + 15}{x + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(23x + 15)/x}{(x + 4)/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{23 + 15/x}{1 + 4/x} = \frac{23 + 0}{1 + 0} = 23$$

Entonces el límite superior de la utilidad es \$23 millones. La gráfica de $P(x)$ se muestra en la figura 33. De la gráfica se sigue, que después de un tiempo, grandes incrementos en los gastos de publicidad (x) producirán incrementos muy pequeños en las utilidades. Éste es un ejemplo de lo que se conoce como la *ley de disminución del ingreso*.

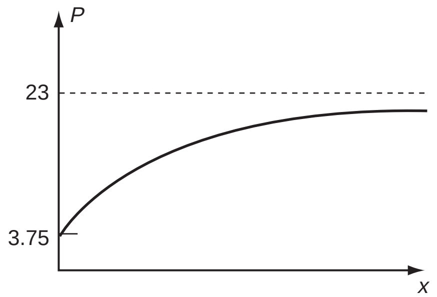


FIGURA 33

Si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se hace cada vez más próxima a la recta $y = L$ cuando x se mueve hacia la derecha. Decimos que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica en $+\infty$.

Si la gráfica de $y = f(x)$ tiene $y = L$ como una asíntota horizontal en $+\infty$, la gráfica puede estar completamente de un lado de la recta $y = L$, o puede cruzar a la asíntota cuando x aumenta. Ejemplos comunes se muestran en la figura 34.

De forma similar, si $f(x) \to L'$ cuando $x \to -\infty$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ se hace cada vez más cercana a la recta horizontal $y = L'$ cuando x se mueve hacia la izquierda. Esta recta es una asíntota horizontal de la gráfica en $-\infty$.

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de la función $y = e^{-x^2}$

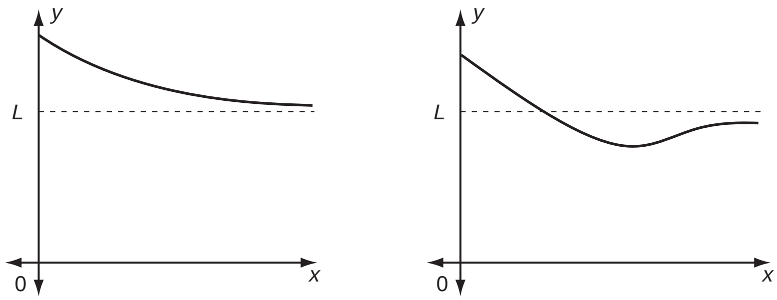


FIGURA 34

Solución En primer término, seguimos los pasos descritos en la sección 3-2.

Paso 1 Tenemos las siguientes igualdades:

$$f(x) = e^{-x^2}$$
$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad \text{(por la regla de la cadena)}$$

El factor e^{-x^2} nunca es cero, de modo que $f'(x) = 0$ sólo cuando $x = 0$. En este valor $y = e^0 = 1$; es decir, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto (0, 1) al mismo tiempo que corta al eje y.

Puesto que e^{-x^2} siempre es positivo, advertimos que cuando $x < 0$, $f'(x) > 0$, de modo que la gráfica es creciente si $x < 0$. Por otro lado, cuando $x > 0$, $f'(x) < 0$ y la gráfica decrece.

Paso 2 Usamos la regla del producto y derivamos por segunda vez:

$$f''(x) = -2\frac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

Los puntos de inflexión, en donde $f''(x) = 0$, están dados por $2x^2 - 1 = 0$, esto es, $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

Los valores correspondientes de y son $y = e^{-(\pm 1/\sqrt{2})^2} = e^{-0.5}$. De modo que los puntos de inflexión son $(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-0.5}) \approx (\pm 0.71, 0.61)$. La segunda derivada cambia de signo en estos puntos de inflexión. El factor e^{-x^2} siempre es positivo, por lo que el signo de $f''(x)$ es el mismo que el de $2x^2 - 1$. Cuando $x < -1/\sqrt{2}$, $x^2 > \frac{1}{2}$ de modo que $2x^2 - 1 > 0$. Así que, $f''(x) > 0$ en esta región y la gráfica es cóncava hacia arriba. Si $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, $x^2 < \frac{1}{2}$, de modo que $2x^2 - 1 < 0$. En consecuencia, $f''(x) < 0$ en esta región y la gráfica es cóncava hacia abajo. Por último, cuando $x > 1/\sqrt{2}$, $x^2 > \frac{1}{2}$ y $2x^2 - 1 > 0$. Así que, de nuevo $f''(x) > 0$ y la gráfica es cóncava hacia arriba.

Paso 3 Ya habíamos encontrado el punto (0, 1) en donde la gráfica corta al eje y. La gráfica nunca corta al eje x porque e^{-x^2} siempre es positivo.

Paso 4 Ahora un nuevo paso: examinemos el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. En cualquiera de los dos casos, el exponente $-x^2$ se hace indefinidamente grande y negativo. Por consiguiente, e^{-x^2} se acerca cada vez más a cero. De modo que la gráfica tiene al eje x ($y = 0$) como asíntota horizontal tanto si $x \to \infty$ como si $x \to -\infty$.

☛ **28.** Para la función

$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, determine

a) los intervalos en donde es creciente y en donde es decreciente;
b) los intervalos en donde es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo;
c) los puntos de intersección con los ejes de coordenadas;
d) la asíntota horizontal.

Respuesta *a*) Crece para $x < 0$, decrece para $x > 0$
b) Cóncava hacia arriba para $x < -1/\sqrt{3}$ y $x > 1/\sqrt{3}$, cóncava hacia abajo para $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$
c) corta al eje y en (0, 1), no cruza al eje x
d) $y = 0$. (La gráfica tiene forma similar a la de la figura 35).

Integrando toda la información podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso como se advierte en la figura 35. La gráfica está relacionada a la familiar "curva con forma de campana" de la teoría de probabilidad. ☛ **28**

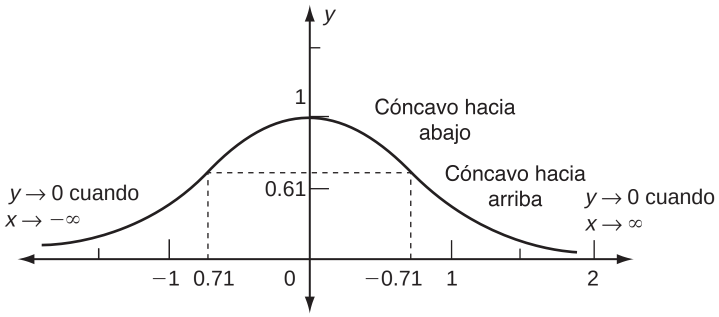


FIGURA 35

Asíntotas verticales

Consideremos el comportamiento de la función $y = 1/x$ cuando x tiende a 0. Si x se hace más y más pequeña, su recíproco se hace cada vez más grande, como se observa en la sucesión de valores de la tabla 9. Esta peculiaridad se advierte en la gráfica de $y = 1/x$ dado que la gráfica alcanza valores arbitrariamente grandes a medida que x decrece hacia 0. (Véase la figura 36). Denotamos esto como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

TABLA 9

x	1	0.1	0.01	0.001
$y = \frac{1}{x}$	1	10	100	1000

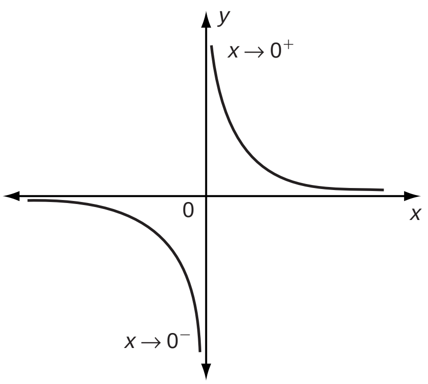


FIGURA 36

Debe señalarse que esta notación sólo representa una convención, y que no implica la existencia de $\lim_{x\to 0+} (1/x)$ en el sentido ordinario de límite. No significa otra cosa que si x se aproxima a cero por la derecha, la función $1/x$ crece sin cota alguna.

Cuando x se acerca a cero por la izquierda, los valores de $1/x$ se hacen cada vez más grandes en la dirección negativa, como se ilustra en la tabla 10. Esto se denota como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

que indica que al aproximarse x a 0 por la izquierda, la función $1/x$ decrece sin cota alguna.

TABLA 10

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000

☛ **29.** Determine $\lim_{x\to c-} f(x)$ y $\lim_{x\to c-} f(x)$ para las siguientes funciones con la c dada:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ c = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\ c = 2$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+2},\ c = -2$

d) $f(x) = \dfrac{x-2}{(1-x)^2},\ c = 1$

Respuesta *a*) ∞, ∞
b) $-\infty, \infty$
c) $\infty, -\infty$
d) $-\infty, -\infty$

La línea $x = 0$ se denomina una **asíntota vertical** de la gráfica $y = 1/x$. La gráfica se aproxima a la asíntota vertical cada vez más, y se hace indefinidamente grande, cuando x tiende a 0. Esto se asemeja con la línea $y = 0$ (el eje x) que es una asíntota horizontal de la gráfica. La asíntota *horizontal* se obtiene del límite cuando x se aproxima a $\pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$. La asíntota vertical se obtiene al variar x de modo que y tienda a $\pm\infty$. ☛ **29**

EJEMPLO 5 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$y = \frac{2x-9}{x-2}$$

y bosqueje su gráfica.

Solución Antes que todo, observamos que podemos dividir numerador y denominador entre x y escribir

$$y = \frac{2x-9}{x-2} = \frac{2-9/x}{1-2/x} \to \frac{2-0}{1-0} = 2 \text{ cuando } x \to \pm\infty$$

Por tanto, la gráfica de la función dada se aproxima a la línea $y = 2$ como su asíntota horizontal tanto cuando $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$.

El dominio de la función dada es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 2$. Cuando x tiende a 2, el denominador $x - 2$ tiende a cero y así y se hace muy grande. La línea $x = 2$ debe ser en consecuencia una asíntota vertical.

Para completar el bosquejo de la gráfica, debemos decidir en qué lados de las asíntotas se encuentra la gráfica. Cuando $x \to 2^+$ (x tiende a 2 por la derecha), el factor $2x - 9$ del numerador se aproxima al límite -5. El denominador $x - 2$ tiende

a cero a través de valores positivos. Por consiguiente, y se hace muy grande y negativa, dado que su numerador es negativo y su denominador pequeño pero positivo.

Por otro lado, cuando $x \to 2^-$ (x tiende a 2 por la izquierda) el numerador aún se aproxima al límite -5, pero el denominador es pequeño y negativo. Por tanto, y se hace grande y positivo. En consecuencia, concluimos que

$$y \to -\infty \text{ cuando } x \to 2^+ \quad \text{y} \quad y \to +\infty \text{ cuando } x \to 2^-$$

Podemos así, colocar la gráfica en relación con la asíntota vertical $x = 2$. (Véase la figura 37). Las porciones de la gráfica entre las asíntotas pueden ahora determinarse. Al hacer esto, es útil determinar en dónde corta a los ejes de coordenadas la gráfica. Notemos que cuando $x = 0$, $y = \frac{9}{2}$, de modo que la gráfica corta al eje y en el punto $(0, \frac{9}{2})$. Con el objetivo de encontrar dónde la gráfica corta al eje x, debemos hacer $y = 0$, lo cual significa que $2x - 9 = 0$, o $x = \frac{9}{2}$; el cruce ocurre en $(\frac{9}{2}, 0)$. Estos dos puntos se advierten en la figura 37. ☛ **30**

☛ **30.** Haga un bosquejo de la gráfica de la función $y = \dfrac{2x}{x + 1}$

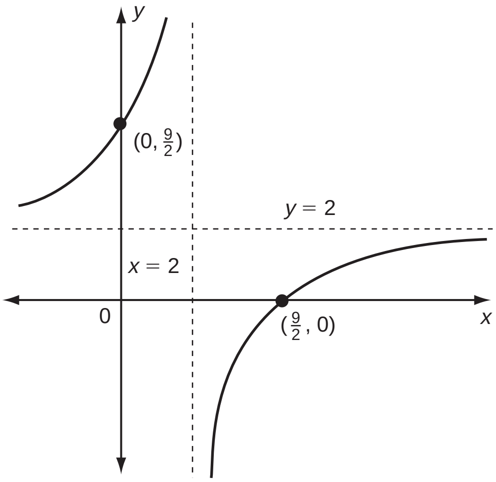


FIGURA 37

EJEMPLO 6 Para un fabricante, la función de costos para producir x millares de artículos por semana, en dólares, está dada por

$$C = 3000 + 2000x$$

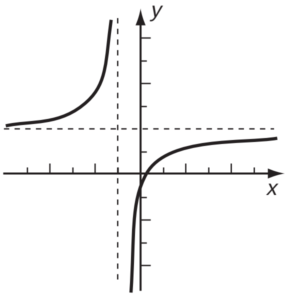
Si $\overline{C}(x)$ denota el costo promedio por artículo, bosqueje la gráfica de $\overline{C}$ como una función de x.

Solución El número de artículos producidos es $1000x$, de modo que su costo promedio es

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{1000x} = \frac{3000 + 2000x}{1000x} = \frac{3}{x} + 2$$

Sólo estamos interesados en la región $x \geq 0$. Conforme $x \to 0$ por la derecha (por arriba), el primer término, $3/x$, se vuelve no acotado y positivo; esto es $\overline{C}(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$. Por tanto, la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Respuesta



Conforme x se vuelve grande, el término $3/x$ se aproxima a cero, de modo que $\overline{C}(x) \to 2$ cuando $x \to \infty$. Así la recta $\overline{C} = 2$ es una asíntota horizontal.

Diferenciando, obtenemos

$$\overline{C}'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0 \qquad \text{para toda } x$$

$$\overline{C}''(x) = +\frac{6}{x^3} > 0 \qquad \text{para toda } x > 0$$

Por consiguiente $\overline{C}$ es una función decreciente para toda x y su gráfica es cóncava hacia arriba para toda $x > 0$.

La gráfica se muestra en la figura 38. Para ubicar mejor a la gráfica hemos calculado explícitamente dos puntos en ella, a saber, cuando $x = 1$, $\overline{C} = 5$ y cuando $x = 3$, $\overline{C} = 3$.

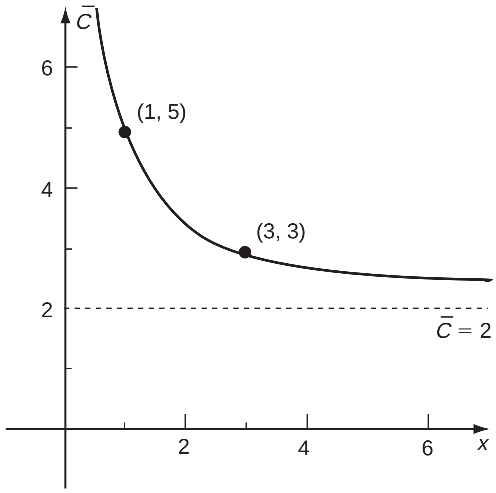


FIGURA 38

Resumen de los métodos para determinar asíntotas:

Supongamos que queremos las asíntotas de $y = f(x)$.

1. Asíntotas verticales. Determine los valores de x para los cuales el denominador de cualquier fracción que aparezca en $f(x)$ se haga cero pero que el numerador no se haga cero. Si a es uno de tales valores, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.
2. Asíntotas horizontales. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Si estos límites existen y son iguales a b y c, respectivamente, entonces $y = b$ es una asíntota horizontal en $+\infty$ y $y = c$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Observación Una función polinomial no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

EJERCICIOS 3-7

(1-36) Evalúe, si existen, los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)$

2. $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{3x^2}\right)$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-3}$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{5x-2}$

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-2x}{3x+7}$

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2x}{2+3x}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{x^2+1}$

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{3x^2-2}$

9. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5+3x-2x^2}{3x^2+4}$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+7}}{\sqrt{x+1}}$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}$

12. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{4+x^3}$

13. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{3x+7}$

14. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3x^2}{x-2}$

15. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-4x^2}{2+3x}$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(2x+3)^2}$

17. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5}{(2x-3)^3}$

18. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}$

19. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{x+1}\right)$

22. $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x^2}{2x+3}\right)$

***23.** $\lim_{x\to\infty}\frac{|x+2|}{x+1}$

***24.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3+|x-2|}{2x+5}$

25. $\lim_{x\to\infty}(1+2e^{-x})$

26. $\lim_{x\to-\infty}(3+4e^{x})$

***27.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x+3}{3e^x-1}$

28. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+3}{3e^x+1}$

***29.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^{-x}+4}{2e^{-x}-1}$

30. $\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{-x}+4}{2e^{-x}-1}$

31. $\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{\ln x}\right)$

***32.** $\lim_{x\to\infty}\frac{3+\ln x}{2\ln x-1}$

***33.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5-2\ln x}{2+3\ln x}$

34. $\lim_{x\to\infty}e^{-|x|}$

35. $\lim_{x\to-\infty}e^{-|x|}$

***36.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2+3e^x}{3+2e^x}$

(37-46) Evalúe *a*) $\lim_{x\to c^+}f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to c^-}f(x)$ en el caso de las siguientes funciones $f(x)$ y puntos c.

37. $f(x)=\frac{1}{x-2},\quad c=2$

38. $f(x)=\frac{1}{x+1},\quad c=-1$

39. $f(x)=\frac{1}{4-x^2},\quad c=2$

40. $f(x)=\frac{1}{4-x^2},\quad c=-2$

41. $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad c=0$

42. $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2},\quad c=-1$

43. $f(x)=\frac{x}{x+1},\quad c=-1$

44. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1},\quad c=-1$

45. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1},\quad c=1$

46. $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2},\quad c=2$

(47-66) Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes curvas y dibuje sus gráficas.

47. $y=\frac{1}{x-1}$

48. $y=\frac{-2}{x+2}$

49. $y=\frac{x+1}{x-2}$

50. $y=\frac{x-2}{x+2}$

51. $y=\frac{2x+1}{x+1}$

52. $y=\frac{3x-6}{x-1}$

53. $y=\frac{x^2+1}{x^2}$

54. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

55. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

56. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

***57.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

***58.** $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}$

59. $y = \ln x$

60. $y = \ln |x|$

61. $y = -\ln x$

62. $y = 2 - \ln x$

63. $y = e^{-2x}$

64. $y = xe^{-x}$

***65.** $y = \dfrac{e^x}{x}$

***66.** $y = e^{|x|}$

67. *(Epidemias)* Durante una epidemia de influenza, el porcentaje de la población de Montreal que ha sido infectada en el tiempo t (medido en días desde el inicio de la epidemia) está dado por

$$p(t) = \frac{200t}{(t^2 + 100)}$$

Encuentre el tiempo en el cual $p(t)$ es máximo y dibuje la gráfica de $p(t)$.

68. *(Consumo de combustible)* Una empresa de camiones de carga encuentra que a una velocidad de v kilómetros por hora, sus camiones consumen combustible a razón de $(25 + 0.2v + 0.01\ v^2)$ litros por hora. Construya la función $C(v)$ que da el número de litros consumidos por kilómetro a una velocidad v. Haga la gráfica de la función y calcule la velocidad en la cual es mínima.

69. *(Producción petrolífera)* La razón de producir petróleo de un manto nuevo crece inicialmente y después disminuye conforme baja la reserva. En un caso particular la razón de producción está dada por $P(t) = 5000te^{-0.2t}$ barriles diarios, donde t está en años. Dibuje la gráfica de $P(t)$ como una función de t.

70. *(Clima)* La temperatura en Vancouver durante un día promedio de verano varía aproximadamente de acuerdo a la fórmula

$$T(t) = 24e^{-(1-t/8)^2} \qquad (0 \le t \le 16)$$

donde t es el tiempo en horas medido a partir de las 6 A.M. Dibuje la gráfica de esta función.

71. *(Dosificación de drogas)* La siguiente fórmula es utilizada algunas veces para calcular la dosis de una droga que se dará a un niño de edad t.

$$y(t) = \frac{Dt}{t + c}$$

donde D es la dosis de un adulto y $c > 0$ es una constante. ¿Cuáles son las asíntotas horizontales y verticales de esta función? Dibuje la gráfica en los siguientes dos casos:

a) $c = 10$ *b*) $c = 15$

72. *(Curva de transformación de productos)* (Véase p. 199) Una compañía automotriz puede usar su planta para fabricar tanto automóviles compactos como grandes o ambos. Si x y y son el número de automóviles compactos y grandes que se producen (en cientos por día), entonces la relación de transformación de producción es $xy + 2x + 3y = 6$. Exprese y como una función de x, encuentre las asíntotas horizontales y verticales y dibuje su gráfica.

(73-76) *(Funciones de costo promedio)* Para las funciones de costo siguientes $C(x)$, bosqueje las gráficas de las funciones de costo promedio correspondientes $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

73. $C(x) = 2 + 3x$

74. $C(x) = 3 + x$

75. $C(x) = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$

76. $C(x) = 3 + 2x + \frac{1}{6}x^2$

***77.** *(Publicidad y utilidades)* Si una cantidad A (en miles de dólares) se gasta en publicidad por semana, una compañía descubre que su volumen de ventas semanal está dado por

$$x = 2000(1 - e^{-A})$$

Los artículos se venden con una utilidad de \$2 cada uno. Si P denota la utilidad neta (esto es, utilidad generada por las ventas menos costos de publicidad), exprese P como una función de A y bosqueje su gráfica.

***78.** *(Modelo logístico)* Bosqueje la gráfica de la función logística.

$$y = \frac{y_m}{1 + ce^{-t}} \ (y_m, c > 0)$$

REPASO DEL CAPÍTULO 3

Términos, símbolos y conceptos importantes

3.1 Función creciente, función decreciente.

3.2 Máximo local, mínimo local, extremo local.
Valor máximo (o mínimo) local.
Punto crítico. Prueba de la primera derivada.

3.3 Cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo.

Punto de inflexión.
Prueba de la segunda derivada.

3.4 Procedimiento paso a paso para bosquejar las gráficas de funciones polinomiales.

3.5 Procedimiento paso a paso para traducir problemas de optimización planteados en forma verbal a problemas algebraicos.
Modelo de costo de inventario. Tamaño de lote económico (o cantidad a ordenar).

3.6 Valores máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

3.7 Límite en infinito; $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
Asíntota horizontal; la notación $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
Procedimiento para hacer el bosquejo de gráficas con asíntotas.

Fórmulas

Prueba para la propiedad de que una función sea creciente o decreciente:

Si $f'(x) > 0$ [alternativamente, < 0] para toda x en un intervalo, entonces f es una función creciente [función decreciente] en ese intervalo.

Prueba de la primera derivada:

Sea $x = c$ un punto crítico de la función f. Entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para x justo antes de c y $f'(x) < 0$ para x justo después de c, entonces c es un máximo local de f.
b) Si $f'(x) < 0$ para x justo antes de c y $f'(x) > 0$ para x justo después de c, entonces c es un mínimo local de f.
c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para x justo antes de c y para x justo después de c, entonces c no es un extremo local de f.

Prueba para la concavidad:

Si $f''(x) > 0$ [alternativamente, < 0] para toda x en un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba [cóncava hacia abajo] en ese intervalo.

Prueba de la segunda derivada:

Sea $x = c$ un punto crítico de la función f en el que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe. Entonces $x = c$ es un máximo local si $f''(c) < 0$ y un mínimo local si $f''(c) > 0$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si la función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b)

b) Si $f(x)$ es derivable en (a, b), entonces $f(x)$ es continua en (a, b)

c) Si $f(x)$ es continua en (a, b), entonces $f(x)$ es derivable en (a, b)

d) En un punto de inflexión, $f''(x) = 0$

e) Si en el punto $(x_0, f(x_0))$ se cumple que $f''(x_0) = 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

f) Cualquier función cuadrática sólo tiene un extremo absoluto

g) Una función cúbica siempre tiene un punto de inflexión

h) La tangente a la gráfica de una función derivable en un punto que es máximo o mínimo es horizontal

i) Una empresa opera en forma óptima si maximiza sus ingresos

j) "La publicidad siempre reditúa, y cuanto más publicidad se haga, mejor"

k) Cualquier función cúbica tiene a lo más dos extremos locales

l) Si $f'(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, entonces el valor máximo absoluto de $f(x)$ en este intervalo es $f(a)$

m) Un valor mínimo local de una función siempre es menor que un valor máximo local de la misma función

n) La tangente a la gráfica de una función en un punto de inflexión puede ser vertical

o) Si $f(x) \to -L$ cuando $x \to -\infty$, entonces se sigue que $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$

p) Si $f(x) \to L$ cuando $x \to +\infty$, entonces se sigue que $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$

q) La gráfica de una función puede cortar una asíntota horizontal, pero nunca puede cruzar una asíntota vertical

(2-7) Determine los valores de x en que las funciones siguientes son: *a*) crecientes; *b*) decrecientes; *c*) cóncavas hacia arriba; *d*) cóncavas hacia abajo. Bosqueje sus gráficas.

2. $y = 3x^2 - 12x + 5$

3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

***4.** $y = x^2e^x$

5. $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3}$

6. $y = x^{1/3}$

7. $y = e^{-x^2/2}$

8. Si x unidades pueden venderse a un precio de $\$p$ cada una, con $4p + 7x = 480$, demuestre que el ingreso marginal nunca es creciente.

9. La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 100e^{-x/20}$. ¿En qué nivel de ventas x el ingreso será creciente?

10. La ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 100e^{-x/20}$. ¿En qué nivel de ventas, x, el ingreso marginal será creciente?

11. La relación de demanda de un artículo está dada por $p = 100-\ln(2x+1)$. Demuestre que la demanda marginal siempre es creciente.

12. La producción industrial, N, de cierto país t años después de 1930 se determinó que estaba dada mediante $N = 375/(1 + 215e^{-0.07t})$.

a) ¿Ha estado creciendo o decreciento la producción?

b) Mediante el uso de logaritmos, exprese t en términos de N.

(13-20) Determine los puntos críticos de las siguientes funciones y determine cuáles de ellos son máximos o mínimos locales.

13. $x^2 - 6x + 10$

14. $3x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 54x - 50$

15. $x^3 - 2\ln(x)$

16. $40t^3 + 9t^2 - 12t - 8$

17. $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 4$

***18.** $3\sqrt{|x - 2|}$

***19.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

20. $\dfrac{1}{x^2+1}$

21. Determine el valor de la constante k de modo que $f(x) = kx^2 + 6x - 2$ tenga:

a) un máximo local en $x = 3$

b) un mínimo local en $x = -1$

22. Determine las constantes a, b y c de modo que la función $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en $x = -5$ y un mínimo en $x = 1$.

23. Determine las restricciones sobre las cosntantes a, b y c de forma tal que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo local.

24. Determine las constantes a, b y c de modo que la función $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un punto de inflexión en $x = -3$, un mínimo en $x = 0$ y que pase por el punto $(1, 0)$.

25. Determine los extremos absolutos de $h(x) = x^2(x - 1)(2/3)$ en el intervalo $-1 \le x \le 3$.

26. Determine los extremos absolutos de $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en el intervalo $1 \le x \le 3$.

***27.** Determine los extremos absolutos de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en el intervalo $1 \le x \le 5$.

28. *(Ingreso máximo)* Una compañía determina que su ingreso total se describe mediante la relación

$$R = 750{,}000 - x^2 + 1000x,$$

en donde R es el ingreso total y x es el número de artículos vendidos.

a) Encuentre el número de artículos vendidos que maximizan el ingreso total.

b) ¿Cuál es el monto de este ingreso total máximo?

c) Si se venden 1000 artículos, ¿cuál sería el ingreso total?

29. *(Ingreso máximo)* La función de demanda para cierto bien está dado por $p = 10e^{-x/6}$, para $0 \le x \le 10$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas.

a) Encuentre el número de artículos vendidos que maximizan el ingreso total.

b) ¿Cuál es el precio que produce el ingreso máximo?

c) ¿Cuál es el monto de este ingreso máximo?

30. *(Utilidad máxima)* Una compañía determinó que en la fabricación y venta del bien que produce, la relación de demanda está dada por $p + 0.002x = 5$, mientras que la función de costo es $C(x) = 3 + 1.1x$

a) Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

31. *(Epidemia)* Durante cierta epidemia de influenza, la proporción de población baja en defensas que fue infectada, se denota por $y(t)$, donde t es el tiempo en semanas desde que se inició la epidemia. Se determinó que

$$y(t) = \frac{t}{4 + t^2}$$

a) ¿Cuál es la interpretación física de dy/dt.

b) ¿Para cuál valor de t es máxima y?

c) ¿Para cuáles valores de t es y creciente y para cuáles es decrecientes?

32. *(Diseño óptimo)* Una compañía se dedica a la fabricación de pequeñas cajas con base cuadrada y sin tapa. Si el material utilizado tiene un costo de 2 centavos por pulgada cuadrada, determine las dimensiones de la caja que minimizan el costo de material, si la capaciadad de las cajas debe ser igual a 108 pulgadas².

33. *(Diseño óptimo)* Con respecto al problema anterior, si el material para la base de la caja tiene un costo de 4 centavos por pulgada cuadrada, ahora, ¿cuáles son las dimensiones que minimizan el costo del material?

34. *(Utilidad máxima)* Una compañía determina que el costo total C, el ingreso total R y el número de unidades producidas x están relacionadas por

$$C = 100 + 0.015x^2 \text{ y } R = 3x$$

Determine la tasa de producción x que maximizaría las utilidades de la empresa. Determine dicha utilidad y la utilidad cuando $x = 120$.

35. *(Movimiento de un objeto)* Un objeto que se lanza directamente hacia arriba desde el suelo, sigue la trayectoria dada por

$$h = -4.9t^2 + 20t$$

donde h se mide en metros y t en segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el objeto?

36. *(Ingreso máximo)* Para la ecuación de demanda

$$p = \sqrt{180 - \frac{x}{6}}$$

determine el número de unidades, x^*, que hace máximo el ingreso total e indique cuál es el ingreso máximo.

37. *(Geometría)* Determine el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

38. *(Geometría)* Determine las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r.

39. Demuestre que el rectámgulo con perímetro máximo, que puede inscribirse en un círculo, es un cuadrado.

40. Demuestre que el rectángulo con un perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

41. Demuestre que el rectángulo con una área dada, el cuadrado es el de menor perímetro.

42. *(Utilidad máxima)* Un fabricante de radiorreceptores observa que pueden venderse x aparatos por semana a p dólares cada uno, en donde $5x = 375 - 3p$. El costo de producción es $(500 + 13x + \frac{1}{5}x^2$ dólares. Determine el nivel de producción que máximiza la utilidad.

43. *(Tamaño de lote económico)* Sea Q la cantidad que minimiza el costo total T debido a la obtención y almacenamiento del material por cierto periodo. El material demandado es de 10,000 unidades por año; el precio al costo del material es de \$1 por unidad; el costo de volver a llenar la existencia de material por orden, sin importar el tamaño Q de la orden, es de \$25 y el costo de almacenar el material es del 12.5% del valor promedio de las existencias, $\frac{Q}{2}$.

a) Pruebe que $T = 10,000 + \dfrac{250,000}{Q} + \dfrac{Q}{16}$

b) Determine el tamaño del lote económico y el costo total T correspondiente a tal valor de Q.

c) Determine el costo total cuando cada orden se fija en 2500 unidades.

44. *(Asignación óptima de producción)* Un fabricante de calzado puede destinar su planta a producir zapatos para caballero o para dama. Si produce x y y miles de pares por semana, respectivamente, se sigue que x y y están relacionados por la ecuación de transformación de producción,

$$2x^2 + y^2 = 25$$

La utilidad del fabricante es de \$10 por cada par de zapatos para caballero y de \$8 por cada par de zapatos para dama. Determine cuántos pares de cada uno deberá producir a fin de maximizar sus utilidades semanales.

45. *(Impuesto y producción)* La demanda y la función de costo total de un monopolista son $p = 12 - 4x$ y $C(x) = 8x + x^2$. Si se grava con un impuesto t por unidad, encuentre:

a) La cantidad x y el precio p que corresponden a la utilidad máxima.

b) La utilidad máxima.

c) El impuesto, t, por unidad que maximiza el ingreso por impuestos del gobierno.

46. La función de producción de un bien está dada por $Q = 40F + 3F^2 - F^3/3$, donde Q es la producción total y F las unidades de materia prima.

a) Determine el número de unidades de materia prima que maximizan la producción.

b) Determine los valores máximos del producto marginal dQ/dF.

c) Verifique que cuando la producción Q/F es máxima, es igual a la producción marginal.

47. *(Tiempo de venta óptimo)* Una compañía cría pollos asaderos. Si los pollos se venden a los t meses, la utilidad de la venta de cada pollo es $P(t) = 0.2e^{0.06\sqrt{t}}$ dólares. El valor presente de esta utilidad es $P(t)e^{-0.01t}$, si la tasa de descuento nominal es 1% mensual. ¿A los cuántos meses deben venderse los pollos para maximizar ese valor presente?

48. *(Retención de memoria)* Un estudiante adquiere gran número de conocimientos durante el repaso para un examen. Al cabo de t semanas después del examen, el porcentaje de esos conocimientos que el estudiante es capaz de recordar está dado por

$$p(t) = \frac{180 + 20e^{0.5t}}{1 + e^{0.5t}}$$

Calcule $p(0)$, $p(2)$ y $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Pruebe que $p'(t) < 0$ y que $p''(t) > 0$ para toda $t > 0$ y dibuje la gráfica de $p(t)$

49. *(Modelo de aprendizaje)* Cuando una tarea de repetición (por ejemplo soldar un circuito) se realiza cierto número de veces, la probabilidad de hacerlo correctamente crece. Un modelo usado algunas veces para esta probabilidad de éxitos es $p = \dfrac{AN}{N + B}$ donde A y B son constantes y N es el

número de veces que se ha realizado la tarea. Interprete A al calcular $\lim_{t\to\infty} p$. Calcule dp/dN en $N = 0$.

50. *(Producción frutal máxima)* Cuando hay n árboles por acre, el promedio de duraznos por árbol es igual a $(840 - 6n)$ para una variedad particular de duraznos. ¿Qué valor de n da la producción máxima de duraznos por acre?

51. *(Contenido de humedad en el suelo)* En cierto lugar la concentración de agua en el suelo está dada en términos de la profundidad x mediante la fórmula

$$c(x) = 1 - e^{-x^2}$$

Determine la profundidad en la cual c crece más rápidamente.

52. *(Teoría de números)* Determine dos números positivos cuya suma sea 30, y tales que el producto de sus cuadrados sea máximo.

53. Determine dos números positivos cuya suma sea 60 y tales que el producto de uno por el cuadrado del segundo sea máximo.

(54-59) Determine las asíntotas horizontales y verticales de las funciones siguientes y haga un bosquejo de sus gráficas.

54. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

55. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

56. $y = \ln|x|$

57. $y = xe^{-x/10}$

***58.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

59. $\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}$

60. *(Análisis del ingreso marginal)* Se da que una curva de demanda $p = f(x)$ es cóncava hacia arriba para todos los puntos, es decir, $f''(x) > 0$ para toda x. Demuestre que si $f^{(3)}(x) > 0$, o bien, $f^{(3)} < 0$ y numéricamente menor que $\dfrac{3f''(x)}{x}$, entonces la curva de ingreso marginal también es cóncava hacia arriba.

(61-66) Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

61. $y = x - \ln x$

62. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

63. $y = x^2e^{-x}$

64. $y = e^{x-|x|}$

65. $y = \dfrac{e^{-|x|}}{x^2+1}$

66. $y = \dfrac{x}{\ln(x^2+1)}$

CASO DE ESTUDIO

OPTIMIZACIÓN DE COSTOS DE PRODUCCIÓN

Para el problema de minimizar el costo de producción de muebles de cómputo, cuya función de costos variable está dada por

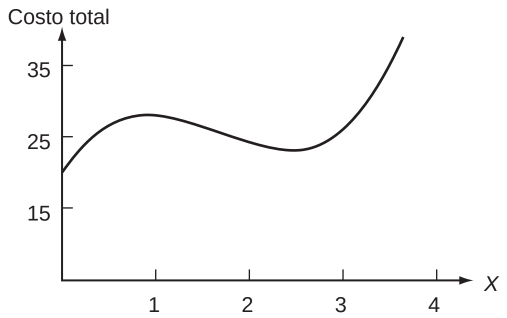
$$V(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

y los costos fijos, son \$20,000, la función de costo total mensual es

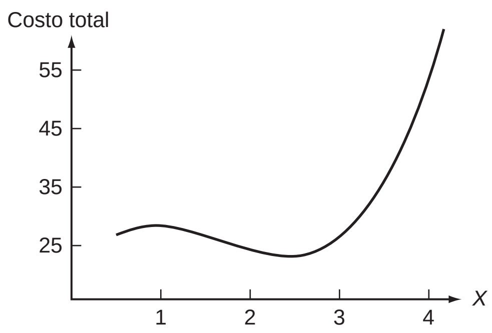
$$C(x) = 20 + 3x^3 - 15x^2 + 20x \text{ miles de dólares,}$$

donde x es el número de muebles, en cinetos, que se producen en un mes.

Mediante las técnicas que se estudiaron en este capítulo se construyó la siguiente gráfica



Como puede observarse en la gráfica el costo total mínimo se obtiene si no se producen escritorios, pero en este caso se tiene la restricción de tener que producir al menos 50 muebles, así que interesa analizar la gráfica a partir de $x = 0.5$, recuerde que las unidades son cientos



Ahora ya no es tan obvio cuál es el valor de x que minimiza el costo total. Pero, si se aplica el método para optimizar funciones que se analizó en este capítulo, se iniciaría obteniendo la derivada de la función $C(x)$ de la siguiente manera

$$\frac{dC(x)}{dx} = 9x^2 - 30x + 20$$

Ahora,

$$\frac{dC(x)}{dx} = 9x^2 - 30x + 20 = 0$$

implica que $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{3}$ o bien $x^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{3}$. Por otro lado,

$$\frac{d^2C(x)}{dx^2} = 18x - 30$$

así que,

$$\frac{d^2C(x_1)}{dx^2} < 0, \text{ mientras que } \frac{d^2C(x^2)}{dx^2} > 0$$

Por consiguiente, el punto $(x_1, C(x_1))$ es un punto máximo local y $(x_2, C(X_2))$ es un punto mínimo local. A continuación se presentan los valores de la función en los extremos del intervalo de interés, 0.5 y 4.5, junto con los valores de la función evaluados en x_1 y x_2

$$C(0.5) = 26.625$$
$$C\left(5 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 28.041$$
$$C\left(5 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 23.071$$
$$C(4.5) = 79.625$$

Así que el mínimo se alcanza en $x_2 \approx 2.4102$. Ahora bien, si se producen 241 muebles ($x = 2.41$) el costo es 23.071063 miles de dólares; mientras que si se producen 242 muebles el costo es 23.071464 miles de dólares, por lo que la decisión debe ser producir 241 muebles para tener un costo mínimo de \$23,071.06.

Pero, si de lo que se trata es de minimizar el costo unitario, entonces la función que se debe minimizar es

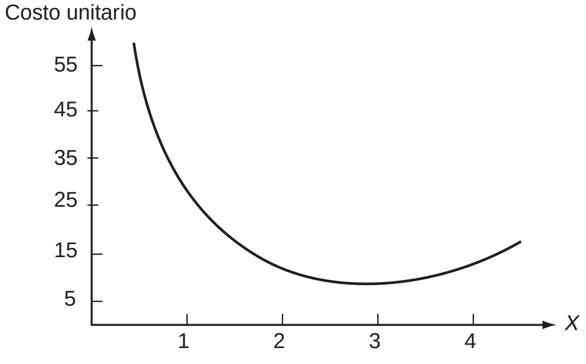
$$U(x) = \frac{C(x)}{x}$$

cuya gráfica es

Si se realizan los mismos pasos que en el caso anterior se encuentra que

$$\frac{dU(x_3)}{dx} = 0 \text{ y } \frac{d^2U(x_3)}{dx^2} > 0, \text{ con } x_3 \approx 2.89714$$

Así que $(x_3, C(x_3))$ es un punto minimo local, y en realidad en el intervalo (0.5, 4.5) es el valor mínimo absoluto, se pide al lector que justifique esta afirmación.



Como,

$$U(2.89) \approx 8.626715$$

y

$$U(2.90) \approx 8.626552,$$

se debe tomar la decisión de fabricar 290 muebles, con lo que el costo unitario sería de aproximadamente $86.26 por mueble producido, recuerde las unidades con la que se está trabajando.

¿Qué sucede si los costos fijos se reducen a $15,000? ¿Qué sucede si los costos fijos aumentan a $22,000? Repita el análisis anterior para estos dos casos.

CAPÍTULO 4

Más sobre derivadas

Curva de aprendizaje

Las aplicaciones de las matemáticas son tantas y tan variadas que surgen en lugares en las que uno menos imagina; por ejemplo, en ocasiones los sociólogos y psicólogos tienen que medir las habilidades que adquiere un individuo al efectuar una tarea rutinaria. La hipótesis es que esta habilidad mejora con la práctica, aunque surgen preguntas como: ¿Qué tanto mejora la habilidad? ¿Con qué rapidez está aprendiendo el individuo? Y muchas otras. Estudiosos del tema han desarrollado modelos para medir el rendimiento de un individuo con respecto al tiempo empleado para aprender la tarea. Uno de tales modelos está dado por la función

$$y(t) = A(1 - e^{-kt})$$

en donde

t es el tiempo de entrenamiento o capacitación,
$y(t)$ es una medida del rendimiento del individuo y
A y k son constantes por determinar.

La gráfica de $y(t)$ se conoce como *curva de aprendizaje.*

Considere que durante la capacitación de nuevo personal para una línea de ensamblado, se observó que, después de un día de práctica, un individuo puede fijar a la placa principal 10 circuitos en cinco minutos, es decir, $y(1) = 10$. Ésta es la medida de rendimiento del individuo. Ahora bien, la misma persona, después de dos días de práctica, puede fijar 15 circuitos en cinco minutos, esto es, $y(2) = 15$. Utilizando técnicas aprendidas en el capítulo 6, se determina que las constantes del modelo son: $A = 20$ y $k \approx 0.6931$. Con lo cual la función de aprendizaje para esta persona es:

$$y(t) = 20(1 - e^{-0.6931t})$$

En este caso, t se mide en días y $y(t)$ en número de circuitos que puede fijar la persona en cinco minutos.

a) ¿Cuál es la rapidez a la que aprende esta persona?
b) ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de aprendizaje?
c) De acuerdo con la función, ¿cuánto mejorará del segundo al tercer día de capacitación?
d) A la larga, ¿cuántos circuitos podrá fijar esta persona en cinco minutos?

TEMARIO

■ 4-1 DIFERENCIALES

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de la variable independiente x. Hasta ahora, hemos usado dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x y se manejó dy/dx como un solo símbolo. Ahora definiremos el nuevo concepto de *diferencial* de modo que dx y dy tengan significados separados; esto nos permitirá pensar en dy/dx ya sea como el símbolo para la derivada de y con respecto a x o como la razón de dy y dx.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función de x diferenciable. Entonces,

a) dx, la **diferencial de la variable independiente *x***, no es otra cosa que un incremento arbitrario de x; esto es,

$$dx = \Delta x$$

b) dy, la **diferencial de la variable dependiente *y***, es función de x y dx definida por

$$dy = f'(x)\, dx$$

La diferencial dy también se denota por df.

Los enunciados siguientes son evidentes por la definición anterior de diferenciales dx y dy.

1. Si $dx = 0$ se sigue que $dy = 0$
2. Si $dx \neq 0$, se deduce que la razón de dy dividida entre dx está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\, dx}{dx} = f'(x)$$

y así es igual a la derivada de y con respecto a x.

No hay nada extraño con respecto al último resultado, porque en forma deliberada se definió dy como el producto de $f'(x)$ y dx con el propósito que el resultado de la proposición 2 fuera válido.

EJEMPLO 1 Si $y = x^3 + 5x + 7$, determine dy.

☛ **1.** Para la función $y = 4x - 2x^2$, determine dy cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$

Solución Sea $y = f(x)$ de modo que $f(x) = x^3 + 5x + 7$. Se sigue que $f'(x) = 3x^2 + 5$ y, por definición,

$$dy = f'(x)\, dx = (3x^2 + 5)\, dx \quad ☛ \ \mathbf{1}$$

Debe observarse que dx (o Δx) es otra variable independiente y el valor de dy depende de las *dos* variables independientes x y dx.

Aunque $dx = \Delta x$, la diferencial dy de la variable dependiente no es igual al incremento Δy. Sin embargo, si dx es suficientemente pequeño dy y Δy son aproximadamente iguales una a la otra.

Respuesta $dy = -4dx$ cuando $x = 2$; $dy = 12dx$ cuando $x = -2$

EJEMPLO 2 Si $y = x^3 + 3x$, determine dy y Δy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución Si $y = f(x) = x^3 + 3x$, entonces,

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Por consiguiente,

$$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 3)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = 0.01$ se sigue que $dy = (12 + 3)(0.01) = 0.15$.

Por definición,

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= f(2.01) - f(2)\\ &= [(2.01)^3 + 3(2.01)] - [2^3 + 3(2)]\\ &= [8.120601 + 6.03] - 14 = 0.150601\end{aligned}$$

☛ **2.** Para la función $y = x^2$, determine dy y Δy cuando $x = 3$ y cuando *a*) $\Delta x = 0.2$ *b*) $\Delta x = 0.05$

Así que, $dy = 0.15$ y $\Delta y = 0.150601$, lo que demuestra que la diferencial y el incremento de y no son exactamente iguales. ☛ **2**

Interpretación geométrica de diferenciales

Sea P el punto cuya abscisa es x en la gráfica de $y = f(x)$, y sea Q el punto en la gráfica cuya abscisa es $x + \Delta x$. El incremento Δy es la elevación desde P a Q, o la distancia vertical QR en la figura 1.

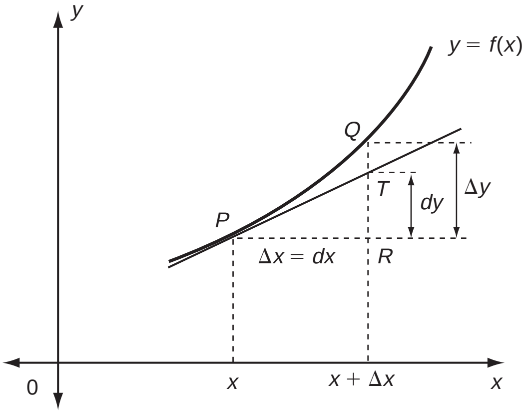


FIGURA 1

Sea T el punto con abscisa $x + \Delta x$ en la tangente en P a la gráfica (véase la figura 1). La pendiente de PT es la derivada $f'(x)$ y es igual a la elevación desde P hasta T dividida entre el desplazamiento:

Respuesta
a) $dy = 1.2$, $\Delta y = 1.24$
b) $dy = 0.3$, $\Delta y = 0.3025$

$$\text{Pendiente} = f'(x) = \frac{\text{Elevación de } P \text{ a } T}{\text{Desplazamiento de } P \text{ a } T} = \frac{TR}{PR} = \frac{TR}{\Delta x}$$

Por tanto, como $\Delta x = dx$, tenemos $TR = f'(x)\,dx = dy$. Así, la diferencial dy es igual a la elevación TR a lo largo de la recta tangente en P.

Por tanto, las diferenciales dx y $dy = f'(x)\,dx$ son incrementos en x y y a lo largo de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Refiriéndonos de nuevo a la figura 1, la diferencia entre Δy y dy es igual a la distancia QT entre el punto Q sobre la gráfica de $f(x)$ y el punto T sobre la tangente en P. Es claro que si hacemos que Δx se haga muy pequeño, de modo que Q se mueve a través de la curva hacia P, entonces, la distancia QT tiende rápidamente a cero. Debido a esto, podemos usar dy como una aproximación de Δy con tal de que Δx sea lo suficientemente pequeño:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx$$

En consecuencia, puesto que $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$,

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Reemplazando x por a y Δx por h, tenemos la forma alterna siguiente:

Si h es suficientemente pequeña, entonces $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$ (1)

Esta aproximación es de utilidad porque a menudo es más sencillo calcular el lado derecho que evaluar $f(x + h)$, en particular si el cálculo tiene que hacerse para diferentes valores de h. La razón de esto es que el lado derecho es una función *lineal* de h. El siguiente ejemplo ilustra cómo esta aproximación puede utilizarse para reemplazar una función complicada por una función lineal.

EJEMPLO 3 Encuentre una aproximación a $\sqrt{16 + h}$ cuando h es pequeña.

Solución Se nos pide aproximar la función raíz cuadrada $\sqrt{x}$ cerca de $x = 16$. De modo que en la ecuación (1) hacemos $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = 16$. El resultado es

$$f(16 + h) \approx f(16) + h\,f'(16) \tag{2}$$

Pero si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. En particular,

$$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

Sustituyendo $f(16) = 4$ y $f'(16) = \frac{1}{8}$ en la ecuación (2), obtenemos

$$f(16 + h) \approx 4 + \tfrac{1}{8}h$$

esto es,

$$\sqrt{16 + h} \approx 4 + \tfrac{1}{8}h$$

(Por ejemplo, tomando $h = 0.1$, encontramos que $\sqrt{16.1} \approx 4 + \frac{1}{8}(0.1) = 4.0125$

☛ **3.** Haciendo elecciones apropiadas de $f(x)$, a y h en la ecuación (1), determine valores aproximados de
a) $\sqrt{15}$ *b*) $\sqrt{26}$ *c*) $\sqrt[3]{26}$

Este valor es casi igual al valor exacto, que es 4.01248 hasta cinco cifras decimales). ☛ **3**

La utilidad de este tipo de aproximación es evidente en este ejemplo: es mucho más fácil realizar cálculos con la expresión aproximada $(4 + \frac{1}{8}h)$ que con $\sqrt{16 + h}$, porque *la aproximación es una función lineal* de h.

EJEMPLO 4 Una sección de terreno es un cuadrado con lados de una milla (5280 pies) de longitud. Si se remueve de cada lado una franja de 20 pies para destinarse a una carretera. ¿Cuánta área se pierde en esta sección?

Solución Si x denota la longitud de un lado, el área es

$$A = f(x) = x^2$$

Si el lado se modifica a $x + \Delta x$, el cambio en el área ΔA es dado en forma aproximada por la diferencial

$$\Delta A \approx f'(x)\,\Delta x = 2x\,\Delta x$$

En este ejemplo, $x = 5280$ pies y $\Delta x = -40$ pies (una franja de 20 pies removida de cada lado). Por tanto,

$$\Delta A \approx 2(5280)(-40) = -422{,}400$$

Así, la pérdida de área es aproximadamente igual a 422,400 pies cuadrados.

Modelos lineales

En la fórmula de aproximación (1), tomemos $a + h = x$. Entonces $h = x - a$ y obtenemos

$$f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a)$$

Pero aquí, el lado derecho es una función lineal de x. Si definimos $m = f'(a)$ y $b = f(a) - af'(a)$, entonces, la aproximación se convierte simplemente en $f(x) \approx mx + b$. Por tanto, hemos formulado el siguiente resultado importante:

> En un intervalo suficientemente pequeño de x, cualquier función diferenciable de x puede aproximarse por medio de una función lineal.

Otra vez, con respecto a la figura 1, vemos que la base geométrica de este resultado es que, cerca del punto P, la gráfica de f es aproximadamente la misma que la recta tangente en P.

Usaremos a menudo este resultado al construir modelos matemáticos de fenómenos complejos. Supongamos que x y y son dos variables económicas que están relacionadas en alguna forma compleja y no comprendida del todo. Entonces, sin importar el grado de complejidad de la relación (con tal de que sea suave), podemos

Respuesta *a*) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$, $h = -1$, $\sqrt{15} \approx 3.875$
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$, $h = 1$, $\sqrt{26} \approx 5.1$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$, $h = -1$, $\sqrt[3]{26} \approx 3 - \frac{1}{27} \approx 2.963$

☛ **4.** Una compañía tiene una función exacta de costos dada por $C(x) = 25 + 11x - x^2$ El nivel de producción actual es $x = 3$. Encuentre un modelo lineal de costo que aproxime la función exacta de costo cuando x es cercana a 3.

Respuesta
$C(x) \approx C(3) + C'(3)(x - 3)$
$= 34 + 5x$

☛ **5.** Si x se midió con una error porcentual del 2%, ¿cuál es el porcentaje de error en y si
a) $y = x^2$ *b*) $y = \sqrt{x}$?

Respuesta *a*) 4% 1%

aproximarla por un modelo lineal $y = mx + b$ para ciertas constantes m y b, a condición de que el rango de variación de x se restrinja lo suficiente. Modelos lineales de esta clase se emplean con frecuencia en economía y en otras áreas como punto de partida en el análisis de fenómenos complejos. ☛ **4**

Errores

Las diferenciales se utilizan en la estimación de errores en las mediciones de cantidades. Sea x una variable cuyo valor se mide o estima con cierto error posible y sea $y = f(x)$ alguna otra variable que se calcula a partir del valor medido de x. Si el valor de x que se utiliza al calcular y es erróneo, entonces, por supuesto el valor calculado de y también será incorrecto.

Sea x el valor exacto de la variable medida y $x + dx$ el valor medido. Entonces, dx es ahora el **error** en esta variable. El valor exacto de la variable calculada es $y = f(x)$, pero el valor en realidad calculado es $f(x + dx)$. Así que el error en y es igual a $f(x + dx) - f(x)$. Si dx es pequeña, que puede por lo regular presumirse que es el caso, podemos aproximar el error en y mediante la diferencial dy. En consecuencia, llegamos al resultado de que el error en y está dado en forma aproximada por $dy = f'(x)\, dx$.

La razón dx/x se denomina el **error relativo** en x. En forma análoga, el error relativo en y es dy/y. Si el error relativo se multiplica por 100, obtenemos lo que se conoce como **error porcentual** de la variable correspondiente. A menudo el signo se ignora al establecer el error porcentual, de modo que podemos hablar de un error porcentual del 2% con lo que entenderemos un error de $\pm 2\%$. ☛ **5**

EJEMPLO 5 ***(Error en utilidades estimadas)*** Un gerente de ventas estima que su equipo venderá 10,000 unidades durante el próximo mes. Él cree que su estimación es precisa dentro de un error porcentual del 3%. Si la función de utilidad es

$$P(x) = x - (4 \times 10^{-5})x^2 \quad \text{(dólares por mes)}$$

(en donde x = número de unidades vendidas por mes), calcule el error porcentual máximo en la utilidad estimada.

Solución Si $x = 10{,}000$, la utilidad será

$$P = 10{,}000 - (4 \times 10^{-5})(10{,}000)^2 = 6000$$

El error porcentual máximo en el valor estimado de x es del 3%, de modo que el error máximo dx está dado por

$$dx = 3\% \text{ de } 10{,}000 = \tfrac{3}{100}(10{,}000) = 300$$

El error correspondiente en la utilidad está dado aproximadamente por

$$\begin{aligned} dP &= P'(x)\, dx \\ &= (1 - 8 \times 10^{-5}x)\, dx \\ &= [1 - 8 \times 10^{-5}(10{,}000)](300) \\ &= 0.2(300) = 60 \end{aligned}$$

☛ **6.** Vuelva a resolver el ejemplo 5, si la función de utilidad es $P(x) = -9000 + 2x - (6 \times 10^{-5})x^2$

Respuesta 4.8%

De modo que el error máximo en la utilidad estimada es de \$60. El error porcentual es, por tanto,

$$100\frac{dP}{P} = 100\ \frac{60}{6000} = 1$$

El error porcentual máximo en la utilidad es del 1% ☛ **6**

EJERCICIOS 4-1

(1-10) Calcule dy en el caso de las siguientes funciones.

1. $y = x^2 + 7x + 1$

2. $y = (t^2 + 1)^4$

3. $y = t \ln t$

4. $y = ue^{-u}$

5. $y = \ln (z^2 + 1)$

6. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

7. $y = \dfrac{e^u}{u + 1}$

8. $y = \dfrac{e^u + 1}{e^u - 1}$

9. $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

10. $y = \sqrt{\ln x}$

11. Calcule dy si $y = x^2 - 1$ cuando $x = 1$

12. Determine dx si $x = \sqrt{t + 1}$ cuando $t = 3$

13. Calcule dt si $t = \ln (1 + y^2)$ cuando $y = 0$

14. Encuentre du para $u = e^{0.5 \ln(1 - t^2)}$ cuando $t = \frac{1}{2}$

15. Determine dy si $y = x^3$ cuando $x = 2$ y $dx = 0.01$

16. Calcule du si $u = t^2 + 3t + 1$ cuando $t = -1$ y $dt = 0.02$

17. Determine dx si $x = y \ln y$ para $y = 1$ y $dy = 0.003$

18. Encuentre df para $f(x) = xe^x$ si $x = 0$ y $dx = -0.01$

(19-22) Determine dy y Δy para las siguientes funciones.

19. $y = 3x^2 + 5$ si $x = 2$ y $dx = 0.01$

20. $y = \sqrt{t}$ si $t = 4$ y $dt = 0.41$

21. $y = \ln u$ si $u = 3$ y $du = 0.06$

22. $y = \sqrt{x + 2}$ si $x = 2$ y $dx = 0.84$

23. Mediante diferenciales aproxime la raíz cúbica de 9

24. Por medio de diferenciales aproxime la raíz cuarta de 17

25. Usando diferenciales aproxime la raíz quinta de 31

26. Mediante diferenciales aproxime el valor de $(4.01)^3 + \sqrt{4.01}$

27. *(Errores)* El radio de una esfera es igual a 8 centímetros, con un error posible de ± 0.002 centímetros. El volumen se calcula suponiendo que el radio es de exactamente 8 centímetros. Usando diferenciales estime el error máximo en el volumen calculado.

28. *(Error porcentual)* Si el volumen de una esfera se determina dentro de un error porcentual que no excede al 2%, ¿cuál es el máximo error porcentual permisible en el valor medido del radio?

29. *(Error porcentual)* Un fabricante estima que las ventas serán de 400 unidades por semana con un error porcentual posible del 5%. Si la función de ingreso es $R(x) = 10x - 0.01x^2$, encuentre el máximo error porcentual en el ingreso estimado.

30. *(Error porcentual)* La función de costo del fabricante del ejercicio 29 es $C(x) = 1000 + x$.

a) Calcule el error porcentual máximo en los costos estimados.

b) Determine el error porcentual máximo en la utilidad estimada.

31. *(Precio aproximado)* La ecuación de demanda de cierto producto es $p = 100/\sqrt{x + 100}$. Mediante diferenciales encuentre el precio aproximado en que se demandan 2500 unidades.

32. *(Costo aproximado)* La función de costo de cierto fabricante es $C(x) = 400 + 2x + 0.1x^{3/2}$. Usando diferenciales, estime el cambio en el costo si el nivel de producción se incrementó de 100 a 110.

33. *(Modelo de costo de inventarios)* En el modelo de costo de inventarios (véase la sección 3-5), sea D la demanda anual total, s el costo de almacenamiento por unidad por

año, a el costo de preparación de cada serie de producción y b el costo de producción por artículo. Se sigue que el costo óptimo del lote por serie de producción está dado por $x = \sqrt{2aD/s}$. El costo mínimo por año de producir los artículos es $C = bD + \sqrt{2aDs}$. Si $D = 10{,}000$, $s = 0.2$, $a = 10$ y $b = 0.1$, evalúe x y C. Mediante diferenciales estime los errores en x y C si el valor exacto de s es 0.22.

34. *(Medidas físicas)* La aceleración debida a la gravedad g, se determina midiendo el periodo de balanceo de un péndulo. Si la longitud del péndulo es l y la medida de un periodo es T, entonces g está dada por la fórmula

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Encuentre el error porcentual en g si:

a) l está medida con exactitud pero T tiene un error de 1%

b) T está medida con exactitud pero l tiene un error de 2%

35. *(Modelo lineal de costos)* Actualmente una compañía produce 200 unidades diarias y sus costos diarios son \$5000. Si el costo marginal es \$20 por unidad, obtenga un modelo lineal de costos que aproxime a la función de costo $C(x)$ para x cercano a 200.

36. *(Modelo lineal de ingresos)* Actualmente una compañía produce 1500 unidades mensuales y vende todas las unidades que produce. Su ingreso mensual es \$30,000. Si el ingreso marginal actual es \$180, obtenga una fórmula lineal que aproxime la función de ingreso $R(x)$ para x cercana a 1500.

37. *(Modelo lineal de utilidad)* Actualmente una compañía produce 50 unidades semanales y su utilidad semanal es \$2000. Si la utilidad marginal actual es \$15, obtenga una fórmula lineal que aproxime a la función de utilidad semanal $P(x)$ para x cercana a 50.

38. *(Modelo lineal de costo)* El costo mensual de producir x unidades de su producto, para cierta compañía, está dado por $C(x) = 2000 + 16x - 0.001x^2$. Actualmente la compañía está produciendo 3000 unidades mensuales. Obtenga un modelo lineal de costo que aproxime la función de costo mensual $C(x)$ para x cercana a 3000.

39. *(Modelo lineal de ingresos)* La función de demanda semanal de cierto producto es $p = 50 - 0.2x$. Actualmente, la demanda es de 200 unidades semanales. Obtenga una fórmula lineal que aproxime la función semanal de ingreso $R(x)$ para x cercana a 200.

40. *(Modelo lineal de utilidad)* La función de demanda diaria del producto de una compañía es $p = 45 - 0.03x$. El costo de producir x unidades diarias está dada por $C(x) = 1500 + 5x - 0.01x^2$. La compañía actualmente está produciendo 500 unidades diarias. Obtenga una fórmula lineal que aproxime la función de utilidad diaria $P(x)$ para x cercana a 500.

■ 4-2 DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Algunas veces una relación entre dos variables se expresa por medio de una relación implícita más que mediante una función explícita. Así, en vez de tener y dada como una función $f(x)$ de la variable independiente x, es posible tener a x y y relacionadas a través de una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, en que ambas variables aparecen como argumentos de alguna función F. Por ejemplo, la ecuación

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1 = 0$$

expresa cierta relación entre x y y, pero y no está dada explícitamente en términos de x.

El asunto que deseamos considerar en esta sección es cómo calcular la derivada dy/dx cuando x y y están relacionadas por una ecuación implícita. En ciertos casos, es posible resolver la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ y obtener y en forma explícita en términos de x. En tales casos, las técnicas estándar de derivación permiten calcular la derivada en la forma ordinaria. Sin embargo, en muchos ejemplos no es posible obtener la función explícita; con la finalidad de cubrir tales situaciones, es necesario usar una nueva técnica que se conoce como **diferenciación implícita**.

Al usar esta técnica, *derivamos cada término en la relación implícita dada con respecto a la variable independiente.* Esto requiere derivar expresiones que contienen a y con respecto a x, y con el objetivo de hacerlo, utilizamos la regla de la cadena. Por ejemplo, supongamos que deseamos derivar y^3 o $\ln y$ con respecto a x. Escribimos lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dy}(y^3) \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

☛ **7.** Encuentre *a*) $\frac{d}{dx}(\sqrt{y})$ *b*) $\frac{d}{dx}(e^y)$ *c*) $\frac{d}{dy}(x^4)$

Respuesta *a*) $\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$ *b*) $e^y\frac{dy}{dx}$ *c*) $4x^3\frac{dx}{dy}$

En general,

$$\frac{d}{dx}(f(y)) = f'(y)\frac{dy}{dx} \quad ☛ \mathbf{7}$$

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$

Solución Derive cada término con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(4) = 0$$

Ponemos juntos todos los resultados y despejamos dy/dx

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \qquad 2y\frac{dy}{dx} = -2x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Comprobación Verificamos este resultado usando una de las funciones explícitas asociada con la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$, es decir*

$$y = \sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{1/2}$$

☛ **8.** Tome la otra función explícita asociada con $x^2 + y^2 = 4$, es decir, $y = -\sqrt{4 - x^2}$, y verifique que aún es cierto que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{1/2-1} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 1 ☛ **8**

EJEMPLO 2 Calcule dy/dx si $xy + \ln(xy^2) = 7$

Solución En primer término simplificamos el logaritmo: $\ln(xy^2) = \ln x + 2\ln y$. Luego, la relación adopta la forma

$$xy + \ln x + 2\ln y = 7$$

*Recordemos que $\sqrt{a}$ o $a^{1/2}$ denota la raíz cuadrada positiva de a.

Derivando con respecto a x, resulta

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(\ln x) + 2\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(7) = 0$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(x) \cdot y + x\frac{d}{dx}(y) = 1 \cdot y + x\frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

Asimismo,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\mathrm{x}} \qquad \text{y también} \qquad \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

En consecuencia,

$$\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x} + \frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupamos todos los términos que contengan derivadas en el lado izquierdo y pasamos los demás términos a la derecha y despejamos dy/dx.

$$\left(x + \frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(y + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 1/x}{x + 2/y} = -\frac{y(xy + 1)}{x(xy + 2)}$$ ☛ **9**

☛ **9.** Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si

a) $2x^2 - 3y^2 = 2$
b) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la línea tangente en el punto $(2, -\frac{1}{2})$ a la gráfica de la relación implícita

$$xy^2 - x^2y + y - x = 0$$

Solución La pendiente de la línea tangente es igual a la derivada dy/dx evaluada en $x = 2$ y $y = -\frac{1}{2}$. Derivando la relación implícita completa con respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Los primeros dos términos deben evaluarse usando la regla del producto. Así, resulta

$$\left(y^2 \cdot 1 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx}\right) - \left(x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 2x\right) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

de modo que $(2xy - x^2 + 1)(dy/dx) = 2xy - y^2 + 1$. En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2 + 1}{2xy - x^2 + 1}$$

Haciendo $x = 2$ y $y = -\frac{1}{2}$, obtenemos la pendiente de la línea tangente en el punto requerido

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(2)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})^2 + 1}{2(2)(-\frac{1}{2}) - (2)^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

Respuesta *a*) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x + 2y)}{2x + y}$

La ecuación de la línea tangente se obtiene a partir de la fórmula punto-pendiente:

☛ **10.** Determine la ecuación de la recta tangente en el punto (2, 1) en la gráfica de la relación $x^3 + y^3 = 9$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}(x - 2)$$
$$y = \tfrac{1}{4}x - 1$$ ☛ **10**

Cuando evaluamos dy/dx en una relación implícita $F(x, y) = 0$, suponemos que x es la variable independiente y y la dependiente. Sin embargo, dada la relación implícita $F(x, y) = 0$, pudimos en vez de ello considerar y como la variable independiente con x una función de y. En tal caso, deberíamos evaluar la derivada dx/dy.

EJEMPLO 4 Dada $x^2 + y^2 = 4xy$, calcule dx/dy.

Solución Aquí x es una función implícita de y. Derivamos ambos lados con respecto a y.

$$\frac{d}{dy}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^2) = 4\frac{d}{dy}(xy)$$
$$2x\frac{dx}{dy} + 2y = 4\left(x \cdot 1 + y\frac{dx}{dy}\right)$$
$$2\frac{dx}{dy}(x - 2y) = 2(2x - y)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Considere la relación implícita $x^2 + y^2 = 4$. La gráfica de esta relación es un círculo de radio 2 y centro en (0, 0) como se muestra en la figura 2. En el ejemplo 1, calculamos que $dy/dx = -x/y$. Si $dy/dx = 0$, entonces, $-x/y$, $= 0$ o $x = 0$. Cuando $x = 0$, $y = \pm 2$. Así en esos puntos $(0, \pm 2)$, la pendiente dy/dx de la recta tangente al círculo es cero y entonces la recta tangente es horizontal.

Si en el ejemplo 1 tomamos a y como la variable independiente y diferenciamos respecto a y en lugar de x, encontramos el resultado

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

Si $dx/dy = 0$ entonces $-y/x = 0$ o $y = 0$. Cuando $y = 0$, $x = \pm 2$. Así en los puntos $(\pm 2, 0)$ tenemos que $dx/dy = 0$. Pero en esos puntos las rectas tangentes son verticales, como se muestra en la figura. Se puede generalizar este resultado de la siguiente manera:

1. Si $dy/dx = 0$ en un punto, entonces la recta tangente es **horizontal** en ese punto.
2. Si $dx/dy = 0$ en un punto, entonces la recta tangente es **vertical** en ese punto.

Respuesta $y = -4x + 9$

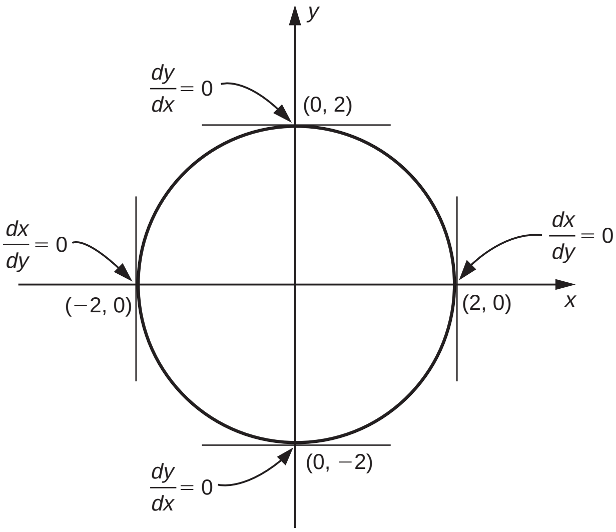


FIGURA 2

EJEMPLO 5 Encuentre los puntos de la curva $4x^2 + 9y^2 = 36y$ donde la recta tangente sea: *a*) horizontal; *b*) vertical.

Solución Tenemos

$$4x^2 + 9y^2 = 36y \tag{i}$$

a) Derivando ambos lados de la igualdad respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(9y^2) = \frac{d}{dx}(36y)$$

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 36\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{18y - 36} = \frac{-4x}{9(y - 2)}$$

Para que la recta tangente sea horizontal, tenemos que $dy/dx = 0$, lo cual da $x = 0$. Cuando $x = 0$ la relación (i) da $0 + 9y^2 = 36y$ así que $y = 0$ o 4. Por tanto, los dos puntos en la curva donde la recta tangente es horizontal son (0, 0) y (0, 4)

b) Si en cambio diferenciamos (i) con respecto a y, encontramos el resultado

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-9(y - 2)}{4x}$$

Haciendo $dx/dy = 0$, para determinar las tangentes verticales, obtenemos $y = 2$

☛ **11.** Determine los puntos en la gráfica de $x^2 - xy + 4y^2 = 15$ en donde la tangente sea *a*) horizontal *b*) vertical.

Poniendo $y = 2$ en (i), encontramos $x = \pm 3$. Así las rectas tangentes son verticales en los puntos (3, 2) y (−3, 2). ☛ **11**

Probablemente no dejó de notar que en el último ejemplo, dx/dy y dy/dx fueron recíprocos uno del otro. Esta propiedad generalmente es cierta:*

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}}$$

En otras palabras, *la derivada de la inversa de una función* f *es el recíproco de la derivada de* f. Utilizando esta propiedad, podemos reducir mucho el trabajo de la parte *b*) del ejemplo 5, una vez que hemos encontrado dy/dx en la parte *a*).

Las derivadas de orden superior también pueden calcularse a partir de una relación implícita. El método consiste en determinar primero la primera derivada de la manera esbozada anteriormente y después diferenciar la expresión resultante con respecto a la variable independiente.

EJEMPLO 6 Calcule d^2y/dx^2 si $x^3 + y^3 = 3x + 3y$

Solución En esta situación, x es la variable independiente, ya que se nos pide calcular derivadas con respecto a x. De modo que, derivando implícitamente con respecto a x, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3 + 3\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{1 - y^2}$$

Derivamos de nuevo con respecto a x y usamos la regla del cociente.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}\right)$$

$$= \frac{(1 - y^2)(d/dx)(x^2 - 1) - (x^2 - 1)(d/dx)(1 - y^2)}{(1 - y^2)^2}$$

*Por definición

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left[\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]^{-1} = \left[\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]^{-1} = \left[\frac{dy}{dx}\right]^{-1}$$

En el segundo paso utilizamos el teorema de límites 2(b) de la sección 1-2.

Respuesta *a*) (1, 2) y (−1, −2) *b*) $(4, \frac{1}{2})$ y $(-4, -\frac{1}{2})$

☛ **12.** Una forma alterna para determinar y'' es utilizar dos veces la diferenciación implícita. En el ejemplo 6, ya obtuvimos que $x^2 + y^2y' = 1 + y'$. Escriba el resultado de diferenciar con respecto a x esto otra vez. De ahí calcular y''.

Respuesta $2x + (2yy' \cdot y' + y^2y'') = 0 + y''$

o $y'' = \dfrac{2[x + y(y')^2]}{1 - y^2}$

El resultado final es el mismo que antes.

$$= \frac{2x(1 - y^2) + 2y(x^2 - 1)\,[-2y\,(dy/dx)]}{(1 - y^2)^2}$$

En esta etapa, observamos que la expresión para la segunda derivada aún incluye a la primera derivada. De aquí que, para completar la solución, debemos sustituir $dy/dx = (x^2 - 1)/(1 - y^2)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(1 - y^2) + 2y(x^2 - 1)[(x^2 - 1)/(1 - y^2)]}{(1 - y^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - y^2)^2 + 2y(x^2 - 1)^2}{(1 - y^2)^3}$$

En el último paso, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por $1 - y^2$ ☛ **12**

EJERCICIOS 4-2

(1-14) Calcule en cada caso dy/dx

1. $x^2 + y^2 + 2y = 15$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

3. $x^3 + y^3 = a^3$ (a es constante)

4. $x^2 - xy + y^2 = 3$

5. $(y - x)(y + 2x) - 12 = 0$

6. $x^4 + y^4 = 2x^2y^2 + 3$

7. $xy^2 + yx^2 = 6$

8. $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 3$

9. $x^5 + y^5 = 5xy$

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a; b son constantes)

11. $xy + e^y = 1$

12. $\dfrac{x}{y} + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = 6$

13. $xy + \ln(xy) = -1$

14. $x^2 + y^2 = 4e^{x+y}$

15. Encuentre dx/dt si $3x^2 + 5t^2 = 15$

16. Encuentre du/dy si $u^2 + y^2 + u - y = 1$

17. Encuentre dx/dy si $x^3 + y^3 = xy$

18. Encuentre dt/dx si $x^3 + t^3 + x^3t^3 = 9$

(19-22) Determine la ecuación de la tangente a las curvas siguientes en los puntos dados.

19. $x^3 + y^3 - 3xy = 3$; $(1, 2)$

20. $x^2 + y^2 = 2x + y + 15$; $(-3, 1)$

21. $\dfrac{2y}{x} - \dfrac{x}{y} = 1$ en $(2, -1)$

22. $(x - y)(x + 2y) = 4$ en $(2, 1)$

(23-26) Encuentre los puntos en los que cada curva tiene:

a) Una tangente horizontal.

b) Una tangente vertical.

23. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

24. $9x^2 - 4y^2 = 36$

25. $x^2 + y^2 = xy + 12$

26. $x^2 + 3y^2 = 2xy + 48$

27. Calcule d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4xy$

28. Determine d^2u/dt^2 cuando $u = 1$ y $t = -1$ si $u^5 + t^5 = 5ut + 5$

29. Encuentre d^2x/dy^2 si $x = 2$ y $y = 1$ cuando $x^3 + y^3 - 3xy = 3$

30. Encuentre d^2y/dx^2 si $(x + 2)(y + 3) = 7$

31. Encuentre d^2x/dy^2 si $x + y + \ln(xy) = 2$

32. Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 + e^{3y} = 4$

(33-36) Determine dy para las relaciones implícitas siguientes.

33. $xy + y^2 = 3$

34. $y^2 + z^2 - 4yz = 1$

35. $\ln (yz) = y + z$

36. $xe^y + ye^x = 1$

(37-40) Calcule la tasa de cambio de x con respecto a p para las siguientes relaciones de demanda.

37. $p = \sqrt{100 - 9x^2}$

38. $p = \dfrac{500}{x^3 + 4}$

39. $2pe^x = 3e^{x/2} - 7p$

40. $7x + x \ln (p + 1) = 2$

41. *(Precio y utilidad)* La relación entre el precio p al cual es vendido su producto y la utilidad P de una empresa es $P = 6p - p^2$. Exprese esta relación como una función explícita $p = f(P)$. Evalúe las derivadas dP/dp y dp/dP y pruebe que son recíprocas una de la otra.

42. *(Función de transformación de un producto)* Una fábrica puede hacer x miles de pares de zapatos para hombre y y miles de pares para mujer semanalmente, donde x y y están relacionados por

$$2x^3 + y^3 + 5x + 4y = \text{constante}$$

Actualmente la fábrica está haciendo 2000 pares de zapatos para hombre y 5000 pares para mujer semanalmente. Calcule dy/dx para los niveles de producción actual. ¿Qué significa esto?

43. *(Modelo de presa-depredador)* Sean x y y los tamaños de dos poblaciones una de las cuales es víctima de la otra. En cualquier tiempo x y y satisfacen la relación implícita

$$(x + ty - h)^2 + (y - tx - k)^2 = a^2$$

donde a, h, k y t son ciertas constantes. Calcule dy/dx.

44. *(Fisiología)* De acuerdo a A.V. Hill la relación entre la carga F actuando en un músculo y la velocidad V de contracción o acortamiento del músculo está dada por

$$(F + a)V = (F_0 - F)b$$

donde a, b, F_0 son constantes que dependen de la especie particular y tipo de músculo. Pruebe que la velocidad V se aproxima a cero cuando $F \to F_0$ así que F_0 representa la carga máxima bajo la cual el músculo se contrae. Encuentre dV/dF y dF/dV. Pruebe que cada una de estas derivadas es recíproca de la otra.

***45.** Escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q - x^p = 0$, mediante diferenciación implícita pruebe que $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$ cuando n es un número racional p/q.

■ 4-3 DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA Y ELASTICIDAD

Con cierto tipo de funciones, puede utilizarse una técnica conocida como *diferenciación logarítmica* con el propósito de facilitar el cálculo de la derivada. Una situación en que esta técnica puede aplicarse ocurre cuando la función dada consiste del producto o cociente de varios factores, en donde cada factor puede estar elevados a alguna potencia. Este método quizá sea mejor explicado a través de un ejemplo.

EJEMPLO 1 Calcule dy/dx si

$$y = \frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{(x^2 + 1)^{1/3}}$$

Solución Podríamos derivar esta función usando las reglas del producto y el cociente. Sin embargo, aplicamos logaritmo natural en ambos lados. Luego, usando las propiedades de logaritmos, procedemos de la siguiente manera:

$$\ln y = \ln \left[\frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{(x^2 + 1)^{1/3}} \right]$$

$$= \ln (x + 1) + \ln \sqrt{x^2 - 2} - \ln (x^2 + 1)^{1/3}$$

$$= \ln (x + 1) + \tfrac{1}{2} \ln (x^2 - 2) - \tfrac{1}{3} \ln (x^2 + 1)$$

Ahora, derivamos ambos lados con respecto a x. Usamos la regla de la cadena de la manera ordinaria, así como diferenciación implícita.

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Después de derivar los términos de la derecha, encontramos que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2-2)}\cdot 2x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

Enseguida simplificamos y multiplicamos por y.

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-2} - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right]$$

Podemos, si lo deseamos, sustituir $y = [(x+1)\sqrt{x^2-2}]/(x^2+1)^{1/3}$ en esta expresión para obtener dy/dx sólo en términos de x. ☛ **13**

☛ **13.** Utilice la diferenciación logarítmica para encontrar $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $y = (x+1)2^x$

Otra situación en que la derivación logarítmica es de utilidad surge cuando debemos derivar una función elevada a una potencia que es otra función.* Daremos dos ejemplos, el primero elemental y el segundo más complicado.

EJEMPLO 2 Calcule dy/dx si $y = x^x (x > 0)$.

Solución Antes que nada, observemos que esta derivada puede encontrarse usando las técnicas ordinarias de diferenciación si primero escribimos y en la forma

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

La regla de la cadena combinada con la regla del producto nos permite determinar dy/dx. Sin embargo, el método de diferenciación logarítmica puede emplearse como una alternativa. Aplicando logaritmos en ambos lados,

$$\ln y = \ln (x^x) = x \ln x$$

Después, derivamos con respecto a x y usamos la regla del producto en el lado derecho.

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + 1$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Respuesta

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{y}{x^2-1}$

b) $\frac{dy}{dx} = y\left(\ln 2 + \frac{1}{x+1}\right)$

*Una función del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ generalmente sólo está definida si $f(x) > 0$, y esta restricción se supone en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 3 Calcule dy/dx si

$$y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x^3-1}}$$

Solución Otra vez, el cálculo se simplifica en forma considerable si aplicamos logaritmos antes de derivar.

$$\ln y = \ln\,[(x^2 + 1)^{\sqrt{x^3-1}}] = \sqrt{x^3 - 1}\,\ln\,(x^2 + 1)$$

Podemos derivar con respecto a x (mediante la regla del producto en el lado derecho).

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3 - 1}\cdot\ln\,(x^2 + 1) + \sqrt{x^3 - 1}\,\frac{d}{dx}\ln\,(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-1/2}(3x^2)\cdot\ln\,(x^2 + 1) + \sqrt{x^3 - 1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)2x$$

☛ **14.** Utilice diferenciación logarítmica para determinar $\frac{dy}{dx}$ para las funciones siguientes:
a) $y = x^{x^2}$
b) $y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)^{x^2+1}$

Simplificando y multiplicando por y, obtenemos por último

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}\ln\,(x^2 + 1) + \frac{2x\sqrt{x^3 - 1}}{x^2 + 1}\right] \quad ☛ \; \mathbf{14}$$

Con base en estos ejemplos puede verse que la esencia de este método consiste en los siguientes pasos:

1. Tome el logaritmo de y y simplifique el lado derecho utilizando propiedades de logaritmos.
2. Diferencie y resuelva para dy/dx. En el paso 2 obtenemos la expresión

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Ésta se denomina la **derivada logarítmica** de y con respecto a x.

EJEMPLO 4 Calcule las derivadas logarítmicas de las funciones siguientes:

a) ax^n *b*) $u(x)v(x)$

Solución

a) Si $y = ax^n$, entonces $y' = anx^{n-1}$. La derivada logarítmica es, en consecuencia,

$$\frac{y'}{y} = \frac{anx^{n-1}}{ax^n} = \frac{n}{x}$$

En el caso especial en que $n = 1$, $y = ax$ y la derivada logarítmica es $1/x$.

b) Si $y = u(x)v(x)$, entonces, por la regla del producto,

$$y' = u'v + uv'$$

Respuesta *a*) $\frac{dy}{dx} = yx(2\ln x + 1)$

b) $\frac{dy}{dx} = 2xy[1 + \ln\,(x^2 + 1)]$

En consecuencia, la derivada logarítmica es

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'v}{uv} + \frac{uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

☛ **15.** Encuentre las derivadas logarítmicas de las siguientes funciones:
a) x *b*) e^x *c*) $\ln x$

Este resultado puede resumirse en la forma siguiente: *la derivada logarítmica del producto* uv *es la suma de las derivadas logarítmicas de* u *y* v. ☛ **15**

EJEMPLO 5 Calcule dy/dx si $y = x^x + (1 + x)^{1+x}$

Solución Ejemplos de este tipo son trampas para un estudiante incauto. Existe una gran tentación por aplicar de inmediato logaritmos y escribir

$$\ln y = x \ln x + (1 + x) \ln (1 + x)$$

Por supuesto, un momento de reflexión nos revela el error cometido al hacerlo así. Lo que debemos hacer es escribir $y = u + v$ con $u = x^x$ y $v = (1 + x)^{1+x}$. Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

y las dos derivadas du/dx y dv/dx pueden encontrarse por separado mediante derivación logarítmica. La primera de ellas se obtuvo en el ejemplo 2.

$$\frac{du}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

En el caso de dv/dx, tenemos

$$\ln v = (1 + x) \ln (1 + x)$$

y por consiguiente, después de derivar con respecto a x,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \ln (x + 1) + 1$$

En consecuencia, $dv/dx = (1 + x)^{1+x}[\ln (1 + x) + 1]$. Sumando los valores de du/dx y dv/dx. Obtenemos dy/dx como se requería.

Elasticidad

Un concepto bastante utilizado en economía y administración, y muy relacionado con la diferenciación logarítmica, es el de elasticidad. Presentaremos esta idea mediante la denominada **elasticidad de la demanda**.

Para un artículo dado, sea p el precio por unidad y x el número de unidades que se adquirirán durante un periodo determinado al precio p, y sea $x = f(p)$. La elasticidad de la demanda por lo regular se denota con la letra griega η (eta) y se define de la manera siguiente:*

Respuesta *a*) $\frac{1}{x}$ *b*) 1

c) $\frac{1}{x \ln x}$

*Tenga cuidado, algunos textos definen η con un signo menos adicional.

$$\boxed{\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{pf'(p)}{f(p)}}$$

Antes de resolver algunos ejemplos, estudiemos el significado de η. Supongamos que el precio se incrementa de p a $p + \Delta p$. Entonces, por supuesto, la cantidad demandada cambiará, digamos a $x + \Delta x$, con $x + \Delta x = f(p + \Delta p)$. Así que, $\Delta x = f(p + \Delta p) - f(p)$.

El incremento en el precio es Δp; este incremento es una fracción $\Delta p/p$ del precio original. También podemos decir que el incremento porcentual en el precio es $100(\Delta p/p)$. Por ejemplo, sea el precio original por unidad $p = \$2$ y sea el nuevo precio \$2.10. Se sigue que $\Delta p = \$0.10$. Este incremento es una fracción $\Delta p/p = 0.10/2 = 0.05$ del precio original. Multiplicando por 100, observamos que el incremento porcentual en el precio es $100(\Delta p/p) = 100(0.05) = 5\%$.

De manera similar, el cambio Δx en la demanda es una fracción $(\Delta x/x)$ de la demanda original. El cambio porcentual en la demanda es $100(\Delta x/x)$. (Obsérvese que con un incremento en el precio, la demanda en realidad decrece, de modo que este cambio porcentual en la demanda será negativo).

Consideremos la razón de estos dos incrementos porcentuales:

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la demanda}}{\text{Cambio porcentual en el precio}} = \frac{100(\Delta x/x)}{100(\Delta p/p)} = \frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Comparando esto con la definición de η, advertimos que

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}$$

Así, la elasticidad de la demanda es igual al valor límite de la razón de cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio cuando el cambio en el precio tiende a cero.

Cuando el cambio en el precio es pequeño, la razón $\Delta x/\Delta p$ de los dos incrementos es aproximadamente igual a la derivada dx/dp. En consecuencia, si Δp es pequeño,

$$\frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p} \approx \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \eta$$

y así la razón del cambio porcentual en la demanda al cambio porcentual en el precio es casi igual a η. En forma alternativa, podemos decir que cuando el cambio en el precio es pequeño,

$$\boxed{\text{Cambio porcentual en la demanda} \approx \eta(\text{Cambio porcentual en el precio})}$$

Por ejemplo, si 2% de incremento en el precio provoca que la demanda disminuya en 3%, se sigue que la elasticidad de la demanda es casi igual a $(-3)/(2) = -1.5$. O bien, si la elasticidad de la demanda es -0.5, entonces un incremento del 4% en el precio conducirá a un cambio en la demanda de aproximadamente $(-0.5)(4\%) = -2\%$.

EJEMPLO 6 Calcule la elasticidad de la demanda si la ecuación de demanda es $x = k/p$, con k alguna constante positiva.

Solución Puesto que $x = k/p$, $dx/dp = -k/p^2$. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p}{(k/p)}\left(-\frac{k}{p^2}\right) = -1$$

La elasticidad de la demanda es por tanto constante en este caso y es igual a -1.

Esto significa que un pequeño incremento porcentual en el precio siempre llevará a un decrecimiento porcentual igual a la demanda.

EJEMPLO 7 Determine la elasticidad de la demanda si $x = 500(10 - p)$ para cada valor de p.

a) $p = 2$ *b*) $p = 5$ *c*) $p = 6$

Solución En este caso, $dx/dp = -500$. Por consiguiente,

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{p}{500(10-p)}(-500) = -\frac{p}{10-p}$$

Observamos que la elasticidad de la demanda varía, dependiendo del precio p.

a) $p = 2$; $\eta = \dfrac{-2}{10-2} = -0.25$

Así que cuando el precio $p = 2$, el decrecimiento porcentual en la demanda es un cuarto del incremento porcentual en el precio.

b) $p = 5$; $\eta = \dfrac{-5}{10-5} = -1$

Cuando $p = 5$, un pequeño incremento en el precio da un incremento porcentual igual en la demanda.

c) $p = 6$; $\eta = \dfrac{-6}{10-6} = -1.5$

La disminución porcentual en la demanda es una vez y media el incremento porcentual en el precio cuando $p = 6$. ☛ **16**

☛ **16.** Determine la elasticidad de la demanda para las relaciones de demanda
a) $x = 12 - 2p$
b) $3x + 4p = 12$

Respuesta

a) $\eta = \dfrac{-2p}{x} = p/(6-p)$

b) $\eta = \dfrac{-4p}{3x} = \dfrac{-p}{3-p}$

La demanda puede ser directa en términos de elasticidad así:

La demanda es **elástica** si $\eta < -1$;

el cambio porcentual en la demanda es mayor que el cambio porcentual en el precio.

La demanda es **inelástica** si $-1 < \eta < 0$;

el cambio porcentual en la demanda es menor que el cambio porcentual en el precio.

Si $\eta = -1$, existe una **elasticidad unitaria**;

el cambio porcentual en la demanda es igual al cambio porcentual en el precio.
☛ **17**

☛ **17.** Para la relación de demanda $x = 16 - 2p$, ¿para qué valores de p la demanda es elástica y para qué valores es inelástica? (Por supuesto, suponga que $p < 8$).

Respuesta Elástica para $p > 4$, inelástica para $0 \le p < 4$

La idea de elasticidad puede aplicarse a cualquier par de variables que estén relacionadas funcionalmente. Si $y = f(x)$, la *elasticidad de* y *con respecto a* x *se define como*

$$\eta = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

(otra vez se denota por η). Es aproximadamente igual a la razón del cambio porcentual en y al cambio porcentual en x, con tal de que estos cambios sean pequeños. Por ejemplo, podemos hablar acerca de la elasticidad de la oferta con respecto al precio, que es el cambio porcentual en el suministro de un artículo dividido entre el cambio porcentual en su precio (estrictamente, en el límite cuando el incremento en el precio tiende a cero).

La elasticidad está muy relacionada con las derivadas logarítmicas. La derivada logarítmica de y con respecto a x es

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

La derivada logarítmica de x con respecto a sí misma está dada de manera similar por

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$$

En consecuencia, se sigue que *la elasticidad de* y *con respecto a* x *es igual a la derivada logarítmica de* y *dividida entre la derivada logarítmica de* x:

$$\eta = \frac{(d/dx)(\ln y)}{(d/dx)(\ln x)}$$

Regresando a la elasticidad de la demanda, podemos establecer una estrecha relación entre esta cantidad y el ingreso marginal. La función ingreso marginal está dada por

$$R(x) = (\text{cantidad vendida}) \times (\text{precio}) = xp$$

Consideremos a R como una función del precio unitario p. La derivada dR/dp se denomina **ingreso marginal con respecto al precio** y proporciona el incremento en el ingreso por unidad de aumento en el precio cuando estos incrementos son pequeños. De $R = xp$, tenemos, por medio de la regla del producto,

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}(px) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x(1 + \eta) \qquad (1)$$

Si la demanda es elástica, esto es, $\eta < -1$, entonces $1 + \eta < 0$, y de (1) se sigue que $dR/dp < 0$. En este caso el ingreso total R es una función decreciente del precio p. Similarmente, si la demanda es inelástica, esto es, $-1 < \eta < 0$, entonces $1 + \eta > 0$ y de (2), $dR/dp > 0$, de modo que el ingreso R es una función creciente de p. Así,

> *Si la demanda es elástica, un aumento en el precio causa que el ingreso disminuya.*
> *Si la demanda es inelástica, un aumento en el precio provoca que el ingreso aumente.*
> *Para elasticidad unitaria, un aumento en el precio no causa cambio en el ingreso.*

☛ **18.** Para la relación $x = 12 - p^2$, determine la elasticidad de la demanda cuando
a) $x = 6$ *b*) $x = 8$ *c*) $x = 9$
En cada caso, si el precio unitario aumenta, ¿el ingreso aumenta o disminuye?

EJEMPLO 8 La función de demanda de cierto producto es $p = 10 - 0.2\sqrt{x}$, donde x unidades son vendidas a un precio p cada una. Utilice la elasticidad de la demanda para determinar si un aumento en el precio aumentará o disminuirá el ingreso total si la demanda es: *a*) 900 unidades; *b*) 1600 unidades.

Solución Primero calculamos η; $p = 10 - 0.2\sqrt{x}$ da $dp/dx = -0.1/\sqrt{x}$, de modo que

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{(10 - 0.2\sqrt{x})}{x(-0.1/\sqrt{x})} = \frac{10 - 0.2\sqrt{x}}{-0.1\sqrt{x}} = 2 - \frac{100}{\sqrt{x}}$$

a) Cuando $x = 900$, tenemos

$$\eta = 2 - \frac{100}{30} = \frac{-4}{3}$$

Como $\eta = -\frac{4}{3} < -1$, la demanda es elástica y un incremento en el precio da por resultado una disminución en el ingreso total.

b) Cuando $x = 1600$ tenemos

$$\eta = 2 - \frac{100}{40} = -\frac{1}{2}$$

Como $\eta = -1/2 > -1$, la demanda es inelástica y, por tanto, un incremento en el precio causará que aumente el ingreso. ☛ **18**

Respuesta *a*) $\eta = -2$
R disminuirá
b) $\eta = -1$ (*R* permanecerá sin cambio)
c) $\eta = -\frac{2}{3}$ (*R* aumentará)

EJERCICIOS 4-3

(1-16) Emplee diferenciación logarítmica para evaluar dy/dx en el caso de las siguientes funciones.

1. $y = (x^2 + 1)(x - 1)^{1/2}$

2. $y = (3x - 2)(3x^2 + 1)^{1/2}$

3. $y = (x^2 - 2)(2x^2 + 1)(x - 3)^2$

4. $y = (x^3 - 1)(x + 1)^3(x + 2)^2$

5. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^{1/3}}{x^2 + 2}$ **6.** $y = \dfrac{(2x^2 - 3)^{1/4}}{x(x + 1)}$

7. $y = \left(\dfrac{2x^2 + 5}{2x + 5}\right)^{1/3}$

8. $\sqrt{\dfrac{(x + 1)(x + 2)}{x^3 - 3}}$

9. $y = x^{x^2}$ **10.** $y = x^{\sqrt{x}}$

11. $y = e^{e^x}$ **12.** $y = x^{e^x}$

13. $y = x^{\ln x}$ **14.** $y = (\ln x)^x$

15. $y = x^x + x^{1/x}$

16. $y = (x^2 + 1)^x - x^{x^2+1}$

(17-20) *(Elasticidad de la demanda)* Calcule la elasticidad de la demanda para las siguientes relaciones de demanda.

17. $x = k/p^n$ (k, n constantes)

18. $x = 100(5 - p)$

19. $x = 50(4 - \sqrt{p})$ **20.** $x = 200\sqrt{9 - p}$

21. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x = 400 - 100p$, determine la elasticidad de la demanda cuando: *a*) $p = 1$ *b*) $p = 2$ *c*) $p = 3$

22. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x/1000 + p/8 = 1$, calcule la elasticidad de la demanda cuando: *a*) $p = 2$ *b*) $p = 4$ *c*) $p = 6$

(23-26) *(Elasticidad e inelasticidad de la demanda)* Conside-

re las relaciones de demanda siguientes y determine los valores de p que hagan a la demanda: *a*) elástica *b*) inelástica.

23. $x = 100(6 - p)$ **24.** $x = 800 - 100p$

25. $x = 100(2 - \sqrt{p})$

26. $x = k(a - p)$ (k, a constantes positivas)

27. *(Elasticidad)* La relación de demanda para un producto es $x = 250 - 30p + p^2$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Determine la elasticidad de la demanda cuando $p = 12$. Si el precio de p se incrementa un 8.5%, encuentre el cambio porcentual aproximado en la demanda.

28. *(Elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $p = \sqrt{2500 - x^2}$ donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre la elasticidad de la demanda cuando $p = 40$. Si el precio de 40 disminuye en 2.25%, encuentre el incremento porcentual aproximado en la demanda.

29. *(Elasticidad)* Para la relación de demanda $p = 250 - 0.5x$ verifique que la demanda de x es elástica y el ingreso total es una función creciente de x si $0 < x < 250$. También pruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente si $250 < x < 500$.

30. *(Elasticidad)* Para cualquier función de demanda lineal $p = mx + b(m < 0$ y $b > 0)$ pruebe que la demanda es elástica si $p > b/2$, e inelástica si $p < b/2$, y tiene elasticidad unitaria si $p = b/2$.

31. Pruebe que $\eta = p/(R_m - p)$, donde p es el ingreso promedio y R_m es el ingreso marginal. Verifique esto para la ecuación de demanda $p = b + mx$ $(m < 0, b > 0)$

***32.** *(Elasticidad)* La elasticidad de demanda para una función de demanda $p = f(x)$ está dada por

$$\eta = f(x)/xf'(x)$$

Pruebe que la elasticidad de demanda ζ para la función de demanda $p = xf(x)$ está dada por $\zeta = \eta/(1 + \eta)$

33. *(Cambio de precio y elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $p = 300 - 0.5x$. ¿Un aumento en el precio, incrementaría o disminuiría el ingreso total si la demanda semanal es:

a) 200 unidades? *b*) 400 unidades?

34. *(Cambio de precio y elasticidad)* La ecuación de demanda de cierto producto es $x = \sqrt{4100 - p^2}$. ¿Un aumento en el precio incrementaría o disminuiría el ingreso total en el nivel de demanda de:

a) 40 unidades? *b*) 50 unidades?

35. *(Crecimiento de población)* Una población crece de acuerdo a la función de Gompertz $y = pe^{-ce^{-kt}}$. Pruebe que la derivada logarítmica de y es una función exponencial decreciente de t.

REPASO DEL CAPÍTULO 4

Términos, símbolos y conceptos importantes

4.1 Diferencial, dx y dy.
Errores, error relativo, error porcentual.

4.2 Diferenciación implícita.

4.3 Diferenciación logarítmica. Derivada logarítmica.
Elasticidad de la demanda; elasticidad de y con respecto a x. Demanda elástica y demanda inelástica; elasticidad unitaria.

Fórmulas

$dy = f'(x)\,dx$.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

o bien, $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$

$$\frac{d}{dx} f(y) = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

Tangente horizontal: $dy/dx = 0$. Tangente vertical: $dx/dy = 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

Cambio porcentual en la demanda
$\approx \eta$ (Cambio porcentual en el precio).

Ingreso marginal con respecto al precio: $\dfrac{dR}{dp} = x(1 + \eta)$

Si la demanda es elástica (alternativamente, inelástica), un aumento en el precio provoca que los ingresos disminuyan (aumenten).

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La diferencial de $3x^3$ es $9x^2$

b) Si f es una función lineal, entonces $df = \Delta f$

c) Si las derivadas $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$ están definidas y ninguna es cero, entonces $\frac{dx}{dy}\ \frac{dy}{dx} = 1$

d) La derivada logarítmica de x^x *es* $x^x(1 + \ln x)$

e) La derivada logarítmica de a^x es $\ln a$

f) Si y es una función decreciente de x, entonces, x es una función decreciente de y

g) En una relación implícita $f(x, y) = 0$, tanto x como y son variables independientes

h) La diferencial de la función lineal $f(x) = 4x + 1$ es una constante.

i) Si y es la variable independiente, entonces $dy = \Delta y$

j) Si $f(x) = \sqrt{x}$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre mayor que Δf

k) Si $f(x) = x^2$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre mayor que Δf

l) Cuando la elasticidad de la demanda es -1, el ingreso marginal es cero

m) Cuando el ingreso es máximo, la eslasticidad de la demanda es -1

n) Para la relación de demanda $x = kp^{-\alpha}$ (k, α constantes), la elasticidad de la demanda es constante.

2. Determine dy si $y(t) = 3t^2 - 5t + 1$

3. Determine dy si $y(t) = \sqrt{t^2 + 5t}$

4. Determine dy si $y(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 3}$

5. Si $y(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$, evalúe dy cuando $x = 2$ y $dx = 0.1$

6. Si $y(x) = e^{x^2-1}$, evalúe dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.1$

7. Para la función $y(t) = \sqrt{t + 1}$ calcule dy y Δy cuando $t = 2$ y $dt = .05$

8. Para la función $y(t) = \ln t^2 - 3$ calcule dy y Δy cuando $t = 5$ y $dt = .1$

(9-12) Por medio de diferenciales calcule un valor aproximado de cada una de las siguientes expresiones.

9. $e^{0.04}$ **10.** $8.1\sqrt[3]{8.1}$

11. $\ln(1.2)$ **12.** $\sqrt[4]{82}$

13. Calcule dy/dt si $t^2 - 3y = t$

14. Calcule dy/dt si $e^{ty} + y + 5t = 10$

15. Calcule dx/dt si $xt + xt^3 + 2x - t = 10$

16. Calcule dx/dt si $\ln(x + t) + xt = e^t$

17. Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la relación $x^2 + y^2 = 9$ en el punto (0, 3)

18. Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la relación $xy + 5x^3y^2 = 22$ en el punto (0, 3)

19. Encuentre d^2y/dx^2 en $x = -1$, $y = 1$, si $x^2 + 4y^3 = 5$

20. Encuentre d^2y/dx^2 en $x = -1$, $y = 1$, si $e^{x^2} + e^y = e + 1$

(21-24) Mediante diferenciación logarítmica determine dy/dx para cada una de las siguientes funciones.

21. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 4}}$

22. $y = x^{x+1}$

23. $y = x^{1/\ln x}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{(x + 3)^{2/3}}$

25. Determine dy si $x^y = e^x$

26. Determine dt si $e^{x+t} = x^a$

27. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $2x + 3p = 300$ determine la elasticidad cuando:

a) $p = 45$ *b*) $p = 55$

c) $p = 50$

28. *(Elasticidad de la demanda)* Si la relación de demanda es $x = 50(10 - p)$ determine la elasticidad cuando:

a) $p = 4$ *b*) $p = 5$

c) $p = 5.5$

(29-32) *(Elasticidad de la demanda)* Para cada una de las siguientes relaciones de demanda determine si la demanda es elástica, inélastica o si tiene elasticidad unitaria, para el valor dado del precio, p o de la cantidad demandada, x.

29. $p = 40 - 2x$, $x = 5$

30. $x = 200 - p$, $p = 100$

31. $x^2 + p^2 = 25$, $p = 4$

32. $p + x^2 = 1200$, $x = 25$

33. *(Elasticidad)* Dada la relación de demanda $ax + bp = c$, a, b y c son constantes positivas. Determine los valores de p

para los cuales la demanda es *a*) elástica; *b*) inelástica; *c*) tiene elasticidad unitaria. *Sugerencia*: Utilice el hecho que $x = c - bp \geq 0$

34. *(Elasticidad)* La función de demanda de cierto producto es $p^2 + x^2 = 5000$, donde x unidades se venden a un precio de p dólares cada una. Una baja en la demanda, ¿incrementará o disminuirá el ingreso total en un nivel de precio de

a) \$40? *b*) \$65?

35. *(Elasticidad)* Demuestre que, para la función de demanda $p = f(x)$, en un nivel de producción que maximiza el ingreso total, la elasticidad de la demanda es igual a -1

36. *(Elasticidad)* Para la relación de demanda $x/50 + p/2 = 1$, determine los valores de p para los cuales: *a*) $\eta = -1$; *b*) $\eta = -3/2$; *c*) $eta = -1/2$

***37.** *(Elasticidad)* Si el ingreso marginal de un producto a cierto nivel es de \$25 y la elasticidad de la demanda a ese precio es $\eta = -2$, determine el ingreso promedio, esto es, el precio p

38. *(Elasticidad)* La ecuación de demanda para un producto es $x = \sqrt{100 - p}$ para $0 < p < 80$. Determine los precios para los que la demanda es elástica.

39. *(Elasticidad)* Con respecto a la relación de demanda del problema anterior, calcule la demanda cuando $p = 40$. Utilice su respuesta para estimar el incremento o disminuición porcentual en la demanda cuando el precio se incrementa en 5%, es decir, sube de 40 a 42 dólares.

***40.** *(Elasticidad)* Verifique que si la relación de demanda es $px^2 = 1000$, entonces se cumple que $\dfrac{dR}{dx} = p\left(1 + \dfrac{1}{\eta}\right)$

R es el ingreso total.

CASO DE ESTUDIO

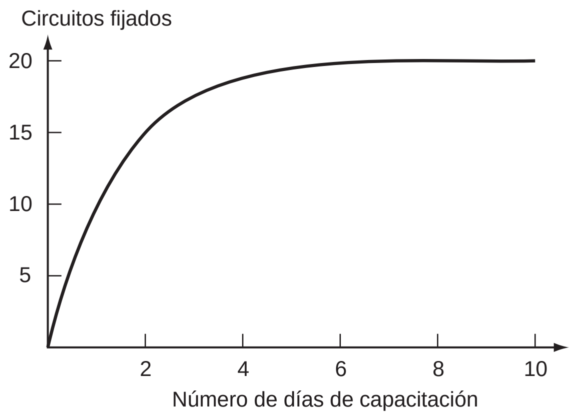
CURVA DE APRENDIZAJE

Al inicio del capítulo se obtuvo la función, $y(t)$, del rendimiento que una persona tenía en una línea de ensamblado de circuitos. Esta función es

$$y(t) = 20(1 - e^{-06931t})$$

en donde $y(t)$ es el número de circuitos que puede fijar en cinco minutos a la placa principal después de haber recibido t días de capacitación.

Antes de responder a las preguntas que se formularon al inicio del capítulo, a continuación se muestra la curva de aprendizaje.



El cambio del aprendizaje con respecto al tiempo es precisamente la rapidez (instantánea) de esta persona; sin embargo, este cambio no es otra cosa que la derivada de la función $y(t)$ con respecto a t, es decir,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,[20(1 - e^{-0.6931t}]$$

Si se aplican las fórmulas de derivación aprendidas hasta el momento se obtiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = 20(0.6931)e^{-0.6931t}$$

Esta expresión proporciona la rapidez de aprendizaje para cualquier instante t. Por lo que,

a) La rapidez de aprendizaje está dada por $13.862e^{-0.6931t}$

b) Así, por ejemplo, al final del primer día de capacitación, la rapidez de aprendizaje de esta persona es 6.93; al final del segundo día, 3.47; al final del tercer día, 1.73; y al final del cuarto día, 0.87. Todas aproximadas a dos decimales. Nótese cómo la rapidez de aprendizaje disminuye conforme pasa el tiempo de capacitación; esto significa que la habilidad aumenta pero cada vez a una razón más pequeña.

c) Lo que mejoró del segundo al tercer día está dado por

$$\begin{aligned} y(3) - y(2) &= 20(1 - e^{-0.6931 \times 3}) - 20(1 - e^{-0.6931 \times 2}) \\ &\approx 17.5 - 15 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

d) Para saber que sucede a la larga, nótese que en la función

$$y(t) = 20(1 - e^{-0.6931t})$$

el término $e^{-0.6931t}$ se hace muy pequeño conforme $t \to \infty$, de modo que la función $y(t)$ se hace cada vez más cercana a 20. Esto quiere decir que la mayor velocidad para fijar circuitos que tendrá esta persona, de acuerdo con la función, será de 20 circuitos cada cinco minutos.

Con base en lo que se ha desarrollado hasta este punto, ayude al supervisor a decidir en la siguiente situación. De acuerdo con las políticas de la empresa, un individuo se puede integrar a la línea de ensamblado, si al cabo de cuatro días de capacitación puede fijar 19 circuitos a la placa principal. ¿Se contrataría a esta persona para integrarse a la línea de ensamblado?

Ahora considere el siguiente problema:

Durante dos días, se capacita a dos personas: Dulce y Jorge. A continuación se resume en una tabla los resultados que obtuvo cada uno de ellos.

	Número de circuitos que puede fijar en cinco minutos al final del	
	Primer día	Segundo día
Dulce	8	13
Jorge	10	15

Por otro lado, considere los siguientes criterios de selección.

I. Mayor número de circuitos fijados en cinco minutos después de cuatro días de capacitación.

II. Mayor número de circuitos fijados en cinco minutos después de seis días de capacitación.

III. Mayor velocidad de aprendizaje al final del tercer día de capacitación.

IV. La persona que tenga mayor potencial a la larga, esto es, la persona que a largo plazo llegue a fijar más circuitos cada cinco minutos.

¿A quién contrataría con el criterio I?

¿A quién contrataría con el criterio II?

¿A quién contrataría con el criterio III?

¿A quién contrataría con el criterio IV?

Sugerencia: Obtenga la función $y(t)$ para cada persona y grafique la curva de aprendizaje de cada una de ellas.

CAPÍTULO 5

Integración

Utilidades en la producción

La licenciada Adriana Rojas Vela acaba de asumir el puesto de responsable de la producción, en una importante compañía dedicada a la fabricación de portafolios. En los archivos encontró información incompleta, acerca de los portafolios de piel. Parte de la información que le dejó su antecesor fue un documento donde se informa que el ingreso marginal semanal está dado por

$$I'(x) = 10e^{-x/50}(50 - x)$$

en donde x es el número de artículos vendidos.

Por otro lado, estaba la gráfica siguiente que representa el costo mensual del producto.

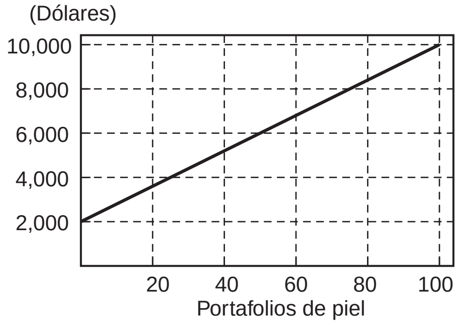


FIGURA 1

Por la gráfica anterior, se deduce que la función de costo de 0 a 100 portafolios es lineal.

También encontró esta otra gráfica.

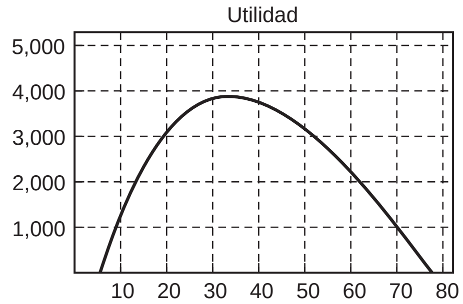


FIGURA 2

En esta gráfica el eje horizontal representa el número de portafolios vendidos y el eje vertical la utilidad en dólares por la venta de x portafolios en una semana.

Con base en la información que pudo recopilar, la licenciada Adriana quiere responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de demanda del producto?
b) ¿Cuál es la función de costo de la empresa?
c) ¿A cuánto ascienden los costos fijos mensuales?
d) ¿Cuál es la función de utilidad para el producto?
e) ¿Cuál es el plan de producción semanal óptimo?

Después de estudiar este capítulo y repasar las definiciones de capítulos anteriores, ayude a la licenciada Adriana a responder las preguntas.

TEMARIO

■ 5-1 ANTIDERIVADAS

☛ **1.** *a*) ¿Cuál es la antiderivada de $2x$?
b) ¿De qué función es $\ln x$ una antiderivada?

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina **cálculo diferencial**. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado **cálculo integral**, en el que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si $s(t)$ es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es $v(t) = s'(t)$, la derivada de $s(t)$. A fin de calcular v, sólo derivamos $s(t)$. Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad $v(t)$ y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada $s'(t)$ y buscamos la función $s(t)$, una etapa opuesta a la diferenciación. Como otro ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto periodo.

El proceso de determinar la función cuando se conoce su derivada se llama **integración**, y la función a determinar se denomina la **antiderivada** o la **integral** de la función dada.

Con el objetivo de evaluar la antiderivada de alguna función $f(x)$, debemos encontrar una función $F(x)$, cuya derivada sea igual a $f(x)$. Por ejemplo, supongamos que $f(x) = 3x^2$. Puesto que sabemos que $(d/dx)(x^3) = 3x^2$, concluimos que podemos elegir $F(x) = x^3$. En consecuencia, una antiderivada de $3x^3$ es x^3.

Sin embargo, debe observarse que esta respuesta no es única, porque las funciones $x^3 + 4$ y $x^3 - 2$ también tienen $3x^2$ como derivada. De hecho, para cualquier constante C, $x^3 + C$ tiene derivada $3x^2$; en consecuencia, $x^3 + C$ es una antiderivada de $3x^2$ para cualquier C. La constante C, que puede tener un valor arbitrario, se conoce como **constante de integración**.

El aspecto común a todas las antiderivadas es la no unicidad: se les puede sumar cualquier constante sin destruir su propiedad de ser la antiderivada de una función dada. Sin embargo, ésta no es la única ambigüedad que existe: si $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces, cualquier otra antiderivada de $f(x)$ difiere de $F(x)$ sólo por una constante. Por tanto, podemos decir que si $F'(x) = f(x)$, entonces, la antiderivada general de $f(x)$ está dada por $F(x) + C$, en donde C es cualquier constante. ☛ **1**

Ya que la constante de integración es arbitraria (es decir, puede ser cualquier número real), la integral así obtenida recibe el nombre más propio de **integral indefinida**. Algunas veces diversos métodos de evaluar una integral pueden dar la respuesta en diferentes formas, pero siempre se dará el caso en que las dos respuestas sólo difieren por una constante.

La expresión

$$\int f(x)\,dx$$

Respuesta *a*) $x^2 + C$, en donde C es una constante arbitraria
b) x^{-1}

se utiliza para denotar a un miembro arbitrario del conjunto de antiderivadas de f. Ésta se lee como la integral de $f(x)$, dx. En tal expresión, la función $f(x)$ por integrar se denomina el **integrando** y el símbolo $\int$ es el **signo de integral**. El símbolo

$$\int \ldots \, dx$$

indica la *integral, con respecto a x*, de ... Es el inverso del símbolo

$$\frac{d}{dx} \ldots$$

que significa *derivada, con respecto a* x, *de* ... El signo de integral y dx van juntos. El signo de integral indica la operación de integración y dx especifica que la *variable de integración* es x. El integrando siempre se coloca entre el signo de integral y la diferencial de la variable de integración.

Si $F(x)$ es una antiderivada particular de $f(x)$, entonces,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

☛ **2.** Encuentre *a***)** $\int x^4\, dx$
b) $\int x^{1/2}\, dx$

en donde C es una constante arbitraria. Por ejemplo,

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C \tag{1}$$

A partir de la definición de integral, es claro que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)}$$

Esto es, el proceso de diferenciación neutraliza el efecto del proceso de integración.

Estableceremos varias fórmulas de integración simple y estándar. La primera de éstas se conoce como la **fórmula de la potencia**; nos indica cómo integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de x.

Primero considere $\int x^2\, dx$. Debemos buscar una función cuya derivada sea x^2. Como vimos antes, la derivada de x^3 es $3x^2$. Por tanto, la derivada de $\frac{1}{3}x^3$ es $\frac{1}{3}(3x^2) = x^2$. Así que $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Ahora, considere $\int x^3\, dx$, que representa a una función cuya derivada es x^3. Pero la derivada de x^4 es $4x^3$ y, por consiguiente, la derivada de $\frac{1}{4}x^4$ es $\frac{1}{4}(4x^3) = x^3$. Por tanto, $\int x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4 + C$. ☛ **2**

Ahora es fácil ver cómo se generaliza esto:

$$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq 1) \qquad \text{(Fórmula de la potencia)}}$$

Respuesta *a*) $\frac{1}{5}x^5 + C$
b) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

Así, *si se quiere integrar cualquier potencia de* x *con excepción de la recíproca de la primera potencia, debemos aumentar la potencia en* 1, *luego dividimos entre el nuevo exponente* y, por último, sumamos la constante de integración arbitraria.

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula correspondiente para derivadas. Observemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

En consecuencia, dado que la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n, una antiderivada de x^n debe ser $x^{n+1}/(n+1)$. La antiderivada general se obtiene sumando la constante de integración.

EJEMPLO 1

a) $\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \qquad (n = 3)$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$= -\frac{1}{x} + C \qquad (n = -2)$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{-1/2+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} + C = 2\sqrt{t} + C \qquad (n = -\frac{1}{2})$

d) $\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C \qquad (n = 0)$

☛ **3**

☛ **3.** Utilizando la fórmula para la potencia, encuentre

a) $\int x^{-4}\,dx$ *b)* $\int u^{3/4}\,du$

Varias fórmulas que dan antiderivadas de funciones simples aparecen en la tabla 1. Cada fórmula se establece por segunda vez con la variable u en vez de x. Todos estos resultados se obtienen a partir de los resultados correspondientes para derivadas. La fórmula 2 requiere algún comentario. Si $x > 0$, esta fórmula es correcta, ya que $|x| = x$, y sabemos que

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

TABLA 1 *Integrales elementales estándar*

1.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = + C$	$(n \neq -1)$	o	$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
2.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$		o	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$
3.	$\int e^x\,dx = e^x + C$		o	$\int e^u\,du = e^u + C$

Respuesta

a) $-\frac{1}{3}x^{-3} + C$ *b)* $\frac{4}{7}u^{7/4} + C$

Puesto que $1/x$ es la derivada de ln x, se sigue que la antiderivada de $1/x$ debe ser ln x, más la constante de integración.

Cuando $x < 0$, tenemos que $|x| = -x$. Por consiguiente,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

en donde la derivación se realizó mediante la regla de la cadena. Así que, $1/x$ es la derivada de $\ln|x|$ para $x < 0$, así como si $x > 0$. Por tanto, la antiderivada de $1/x$ debe ser $\ln|x| + C$, como se dio en la tabla, para toda $x \neq 0$.

Ahora probamos dos teoremas que simplificarán el álgebra de integración.

TEOREMA 1 La integral del producto de una constante de una función de x es igual a la constante por la integral de la función. Esto es, si c es una constante.

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

EJEMPLO 2

a) $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

b) $\int 2e^x\,dx = 2\int e^x\,dx = 2e^x + C$

c) $\int 5\,dx = 5\int 1\,dx = 5x + C$ ☛ **4**

☛ **4.** Determine *a*) $\int \frac{2}{x}\,dx$ *b*) $\int 4\sqrt[3]{t}\,dt$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\,dx\right] = c\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = c\,f(x)$$

Por consiguiente, $cf(x)$ es la derivada de $c\int f(x)\,dx$, y así a partir de la definición de antiderivada, se sigue que $c\int f(x)\,dx$ debe ser la antiderivada de $cf(x)$. En otras palabras,

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

lo cual prueba el resultado.

Como resultado de este teorema, se sigue que podemos sacar cualquier constante multiplicativa del interior del signo de integral.

Respuesta *a*) $2\ln|x| + C$ *b*) $3t^{4/3} + C$

Precaución Las variables no pueden sacarse del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int xe^{-x}\,dx \neq x\int e^{-x}\,dx$$

TEOREMA 2 La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Observación Este resultado puede extenderse a la diferencia de dos funciones o a cualquier suma algebraica de un número finito de funciones.

☛ **5.** Encuentre

a) $\int \frac{2x^2 + 3}{x}\,dx$

b) $\int (1 + \sqrt{v})^2\,dv$

EJEMPLO 3 Calcule la integral de $(x - 3/x)^2$

Solución Desarrollamos $(x - 3/x)^2$ con el objetivo de expresar el integrando como una suma de funciones potencia.

$$\begin{aligned}\int \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) dx\\ &= \int x^2\,dx - \int 6\,dx + \int 9x^{-2}\,dx\\ &= \int x^2\,dx - 6\int 1\,dx + 9\int x^{-2}\,dx\\ &= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6x + 9\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C\\ &= \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Encuentre la antiderivada de $\dfrac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2}$

Solución

$$\begin{aligned}\int \frac{3 - 5t + 7t^2 + t^3}{t^2}\,dt &= \int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{5}{t} + 7 + t\right) dt\\ &= 3\int t^{-2}\,dt - 5\int \frac{1}{t}\,dt + 7\int 1\,dt + \int t\,dt\\ &= 3\,\frac{t^{-2+1}}{-1} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^{1+1}}{2} + C\\ &= -\frac{3}{t} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^2}{2} + C \quad ☛ \textbf{5}\end{aligned}$$

Respuesta *a*) $x^2 + 3\ln|x| + C$
b) $v + \frac{4}{3}v^{3/2} + \frac{1}{2}v^2 + C$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] + \frac{d}{dx}\left[\int g(x)\,dx\right]$$
$$= f(x) + g(x)$$

En consecuencia, $f(x) + g(x)$ es la derivada de $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, y así por la definición de antiderivada,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Determine $f(x)$, si $f'(x) = (x^2 + 1)(4x - 3)$ y $f(1) = 5$

Solución Desarrollando los paréntesis, obtenemos $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ Utilizando los teoremas anteriores, la antiderivada es

$$f(x) = 4(\tfrac{1}{4}x^4) - 3(\tfrac{1}{3}x^3) + 4(\tfrac{1}{2}x^2) - 3x + C$$
$$= x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

en donde C es una constante desconocida. Pero en este caso se nos da la información de que $f(1) = 5$, y esto nos permite determinar el valor de C. Como $f(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C = C - 1 = 5$. Por consiguiente, $C = 6$, y así

☛ **6.** Encuentre $g(x)$, si $g'(x) = 1 - 2x$ y $g(0) = 4$

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 6$$ ☛ **6**

EJEMPLO 6 ***(Costo extra de producción)*** Una compañía actualmente produce l50 unidades por semana de producto. Por experiencia, saben que el costo de producir la unidad número x en una semana (esto es, el costo marginal) está dado por

$$C'(x) = 25 - 0.02x$$

Suponiendo que este costo marginal aún se aplica, determine el costo extra por semana que debería considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

Solución El costo marginal es la derivada de la función de costo. En consecuencia, la función de costo se obtiene integrando la función de costo marginal.

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (25 - 0.02x)\,dx$$

$$= 25x - (0.02)\frac{x^2}{2} + K = 25x - 0.01x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. No tenemos la información suficiente para determinar el valor de K. Sin embargo, deseamos calcular el incremento en el costo que resulta de elevar x de 150 a 200 [esto es, $C(200) - C(150)$].

$$C(200) = 25(200) - 0.01(200)^2 + K = 4600 + K$$
$$C(150) = 25(150) - 0.01(150)^2 + K = 3525 + K$$

Respuesta $g(x) = x - x^2 + 4$

☛ **7.** Determine la función de costo, $C(x)$, en dólares, dado que el costo marginal es $C'(x) = 200 + 2x - 0.003x^2$ y los costos fijos son \$22,000

por consiguiente,

$$C(200) - C(150) = (4600 + K) - (3525 + K) = 1075$$

El incremento en el costo semanal sería por tanto \$1075. Nótese que la constante desconocida K no aparece en la respuesta final. ☛ **7**

EJEMPLO 7 ***(Ingreso y demanda)*** El ingreso marginal de una empresa está dado por

$$R'(x) = 15 - 0.01x$$

a) Determine la función de ingreso.

b) Encuentre la relación de demanda para el producto de la empresa.

Solución

a) La función de ingreso $R(x)$ es la integral de la función de ingreso marginal. Así que

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int (15 - 0.01x)dx$$

$$= 15x - 0.01\frac{x^2}{2} + K = 15x - 0.005x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. A fin de determinar K, usamos el hecho de que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $x = 0$, $R = 0$. Haciendo $x = 0$ y $R = 0$ en nuestra expresión de $R(x)$, obtenemos

$$0 = 15(0) - 0.005(0^2) + K$$

lo que da $K = 0$. Por consiguiente, la función de ingreso es

$$R(x) = 15x - 0.005x^2$$

b) Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio p, se sigue que el ingreso obtenido por la venta de x artículos está dado por $R = px$. Así que

$$px = 15x - 0.005x^2 \quad \text{o bien} \quad p = 15 - 0.005x$$

que es la relación de demanda requerida.

Respuesta $C(x) = 22{,}000 + 200x + x^2 - 0.001x^3$

EJERCICIOS 5-1

(1-52) Determine las integrales de las siguientes funciones.

1. x^7

2. $\sqrt[3]{x}$

3. $1/x^3$

4. $1/\sqrt{x}$

5. $7x$

6. $\ln 2$

7. $\dfrac{e^3}{x}$

8. $x \ln 3$

9. $\dfrac{1}{x \ln 2}$

10. $3x + \dfrac{1}{3x}$

11. $\dfrac{e}{x} + \dfrac{x}{e}$

12. $xe^{-2} + ex^{-2}$

13. $(e^2 - 2^e)e^x$

14. $\sqrt{3x}$

15. $\dfrac{\ln 2}{x^2}$

16. ex^{e+1}

17. $x^7 + 7x + \dfrac{7}{x} + 7$

18. $e^x + x^e + e + x$

19. $7x^2 - 3x + 8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

20. $3x^2 - 5x + \dfrac{7}{x} + 2e^3$

21. $(x + 2)(x + 3)$

22. $(x - 2)(2x + 3)$

23. $(x + 1)(3x - 2)$

24. $(x + 3)(2x - 1)$

25. $(x + 2)^2$

26. $(2x - 3)^2$

27. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

***28.** $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$

29. $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)^2$

30. $x^2(x + 1)^2$

31. $x^2\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

32. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2$

33. $x^3(x + 1)(x + 2)$

34. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \dfrac{2}{x}\right)$

35. $(x + 2)\left(3x - \dfrac{1}{x}\right)$

36. $\dfrac{(x + 2)(x + 3)}{x^2}$

***37.** $\dfrac{\ln x^3}{\ln x^2}$

***38.** $\dfrac{\ln x^2}{\ln x}$

***39.** $\dfrac{\ln x}{\ln \sqrt{x}}$

40. $e^x \ln 3$

41. $\dfrac{e^x}{\ln 2}$

***42.** $\dfrac{e^{x+2}}{e^{x+1}}$

43. $e^{\ln(x^2 + 1)}$

44. $e^{3 \ln x}$

45. $(\sqrt{x} + 3)^2$

46. $\dfrac{3\sqrt{x} + 7}{\sqrt[3]{x}}$

47. $\dfrac{3x^4 - 12}{x^2 + 2}$

48. $e^{2 \ln x}$

49. $x\, e^{\ln(x+1)}$

50. $\dfrac{4 - x}{\sqrt{x} + 2}$

51. $\dfrac{2x - 18}{\sqrt{x} + 3}$

***52.** $\dfrac{x - 8}{2 - \sqrt[3]{x}}$

(53-58) Encuentre las antiderivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable independiente según el caso.

53. $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

54. $3e^t - 5t^3 + 7 + \dfrac{3}{t}$

55. $\sqrt{u}(u^2 + 3u + 7)$

56. $\dfrac{2y^3 + 7y^2 - 6y + 9}{3y}$

57. $\sqrt{x}(x + 1)(2x - 1)$

58. $\dfrac{(t - t^2)^2}{t\sqrt{t}}$

(59-62) Evalúe las siguientes integrales.

59. $\displaystyle\int \frac{1 + 3x + 7x^2 - 2x^3}{x^2}\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{(2t + 1)^2}{3t}\, dt$

61. $\displaystyle\int \left(3\theta^2 - 6\theta + \frac{9}{\theta} + 4e^\theta\right) d\theta$

62. $\displaystyle\int (\sqrt{2}y + 1)^2\, dy$

63. Encuentre $f(x)$ si $f'(x) = (x + 2)(2x - 3)$ y $f(0) = 7$

64. Encuentre $f(e)$ si $f'(t) = \dfrac{2t + 3}{t}$ y $f(1) = 2e$

65. *(Velocidad y distancia)* La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + \sqrt{t})^2$. Calcule la distancia recorrida en el instante t

66. *(Aceleración)* La aceleración de un móvil en el instante t es $3 + 0.5t$

a) Determine la velocidad en cualquier instante t si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 60 unidades.

b) Calcule la distancia recorrida por el móvil en el instante t si la distancia es cero cuando $t = 0$

67. *(Costo marginal)* La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 30 + 0.05x$

a) Determine la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de \$2000 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

c) Si los artículos se pueden vender a \$55 cada uno, ¿cuántos deben producirse para maximizar la utilidad? (*Sugerencia*: véase página 570).

68. *(Costo marginal)* El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x) = 24 - 0.03x + 0.006x^2$. Si el costo de producir 200 unidades es de \$22,700, encuentre:

a) la función de costo;

b) los costos fijos de la empresa;

c) el costo de producir 500 unidades.

d) Si los artículos pueden venderse a \$90 cada uno, determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

69. *(Costo marginal)* El costo marginal de los Productos ABC es $C'(x) = 3 + 0.001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es \$1005. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades? Los artículos se venden a \$5 cada uno. Determine el incremento en la utilidad si el volumen de venta se incrementa de 1000 a 2000.

70. *(Costo marginal)* El costo marginal de cierta empresa es $C'(x) = 5 + 0.002x$. ¿Cuáles son los costos totales variables de fabricar x unidades?

71. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 4 - 0.01x$$

a) Determine el ingreso obtenido por la venta de x unidades de su producto.

b) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

72. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 20 - 0.02x - 0.003x^2$$

a) Encuentre la función de ingreso.

b) ¿Cuánto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

73. *(Utilidad marginal)* La función de utilidad marginal de una empresa es $P'(x) = 5 - 0.002x$ y la empresa obtiene una utilidad de \$310 al venderse 100 unidades. ¿Cuál es la función de utilidad de la empresa?

***74.** *(Consumo de agua)* Durante el verano, en cierta ciudad, el consumo de agua (millones de galones por hora) está dado por la siguiente función.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 6 \\ t - 5 & \text{si } 6 \le t < 9 \\ 4 & \text{si } 9 \le t < 21 \\ 25 - t & \text{si } 21 \le t < 24 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas durante el día (reloj de 24 horas). Determine el consumo total entre las 6 A.M. y las 9 A.M. y el consumo total durante un día completo.

***75.** *(Demanda telefónica)* Durante la jornada laboral (8 A.M. a 5 P.M.) el número de llamadas telefónicas por minuto que pasan por un conmutador varía de acuerdo con la fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 5t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 5 & \text{si } 1 \le t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 \le t < 5 \\ 3 & \text{si } 5 \le t < 8 \\ 27 - 3t & \text{si } 8 \le t < 9 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas, medido a partir de las 8 A.M. Calcule el número total de llamadas durante la jornada laboral. ¿Cuántas llamadas hay entre las 8 y las 11 A.M.?

76. *(Crecimiento de población)* Una población de insectos crece de un tamaño inicial de 3000 a un tamaño $p(t)$ después de un tiempo t (medido en días). Si la razón de crecimiento es $5(t + 2t^2)$ en el tiempo t, determine $p(t)$ y $p(10)$.

■ 5-2 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

No todas las integrales pueden evaluarse en forma directa usando las integrales estándar expuestas en la sección previa. Sin embargo, muchas veces la integral dada puede reducirse a una integral estándar ya conocida mediante un cambio en la va-

riable de integración. Tal método se conoce como **método de sustitución** y corresponde a la regla de la cadena en diferenciación.

Suponga que F es una antiderivada de f, de modo que

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

En esta ecuación podemos cambiar el nombre de la variable de x a u:

$$\int f(u)\, du = F(u) + C$$

Ahora el teorema básico del método de sustitución establece que podemos reemplazar u por $g(x)$, en donde g es cualquier función diferenciable, no constante, y esta ecuación permanece siendo verdadera. En este reemplazo, du se trata como una diferencial, en otras palabras, $du = g'(x)dx$. Así tenemos:

TEOREMA 1 Si $\int f(u)\, du = F(u) + C$, entonces,

$$\int f[g(x)]g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

para cualquier función diferenciable g que no sea una función constante.

Ilustramos este teorema con algunos ejemplos antes de demostrarlo. Iniciamos con la fórmula de la potencia

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

que corresponde a tomar $f(u) = u^n$ y $F(u) = u^{n+1}/(n + 1)$. Entonces, de acuerdo con el teorema 1, debemos reemplazar el argumento u en estas dos funciones por $g(x)$:

$$f[g(x)] = [g(x)]^n \qquad \text{y} \qquad F[g(x)] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$$

Entonces, en este caso particular el teorema establece que

$$\int [g(x)]^n\, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

En este resultado, $g(x)$ puede ser cualquier función diferenciable que no sea constante. Por ejemplo, tomamos $g(x) = x^2 + 1$ y $n = 4$. Entonces $g'(x) = 2x$ y obtenemos

$$\int (x^2 + 1)^4 \cdot\ 2x\, dx = \frac{(x^2 + 1)^{4+1}}{4+1} + C$$

Después de dividir entre 2, esto se transforma en

$$\int (x^2 + 1)^4 x\, dx = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C_1$$

en donde $C_1 = C/2$. (Obsérvese que C, aún puede ser cualquier constante, ya que el dividir entre 2 no altera la arbitrariedad).

☛ **8.** Establezca los resultados que se obtienen a partir de la fórmula para la potencia tomando
a) $g(x) = x^2 + 1$ y $n = \frac{1}{2}$
b) $g(x) = \ln x$ y $n = -2$

Como otro ejemplo más, tomemos $g(x) = \ln x$ y $n = 2$. Puesto que $g'(x)$ es ahora $1/x$, obtenemos el resultado

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad ☛ \mathbf{8}$$

Es claro que al elegir diferentes funciones $f(x)$ y $g(x)$, pueden evaluarse una gran cantidad de integrales. Cuando en realidad usamos este método de sustitución con el propósito de evaluar una integral dada, es necesario reconocer cómo elegir estas funciones en tal forma que la integral dada se exprese en la forma $f(u)\, du$ cuando sustituimos $u = g(x)$, con f una función lo bastante simple para que la nueva integral pueda evaluarse con facilidad. Desarrollaremos esto más tarde, pero antes nos detendremos a demostrar el teorema.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Sea $u = g(x)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{du}F(u) \cdot \frac{du}{dx} = f(u)g'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

En consecuencia, por la definición de antiderivada, se sigue que

$$\int f[g(x)]g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

como se requería.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\, dx$

Solución Observamos que la diferencial de $x^2 + 3x - 7$ es igual a $(2x + 3)\, dx$, que aparece en la integral. Por tanto, hacemos $x^2 + 3x - 7 = u$. Luego, $(2x + 3)\, dx = du$. Usando esta sustitución, la integral se reduce a

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\, dx = \int u^5\, du = \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 3x - 7)^6 + C$$

en donde sustituimos el valor de u otra vez.

EJEMPLO 2 Calcule $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Solución La integral dada es

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Respuesta
a) $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x\, dx = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$
b) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = -\frac{1}{\ln x} + C$

☛ **9.** Establezca las sustitución y evalúe la integral en cada uno de los siguientes casos:

a) $\int \frac{2x}{x^2 + 2}\, dx$

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$ *c*) $\int xe^{x^2}\, dx$

Obsérvese que hemos separado el integrando de tal manera que la expresión $(1/x)$ dx ocurre como un factor distinto. Ésta es la diferencial de ln x, y más aún, el resto del integrando también es una función simple de ln x. De modo que hacemos $\ln x = u$. Se sigue que $(1/x)\, dx = du$. La integral dada se reduce ahora a

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln |u| + C$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

después de sustituir $u = \ln x$

A partir de estos ejemplos observamos que la técnica apropiada al utilizar el método de sustitución consiste *en buscar una función* u = g(x) *con una diferencial* g′(x) dx *que aparezca en la integral original. El resto del integrando debe ser una función simple de* u. La elección de la sustitución no es del todo obvia, pero pronto aprenderemos por experiencia cómo reconocer la correcta.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int e^{x^2-5x}(2x - 5)\, dx$

Solución Observemos que $(2x - 5)\, dx$ aparece en la integral y esta cantidad es la diferencial de $x^2 - 5x$. En consecuencia, hacemos $u = x^2 - 5x$. Luego, $du = (2x - 5)\, dx$ y la integral se transforma en

$$\int e^{x^2-5x}(2x - 5)\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2-5x} + C$$

Algunas veces, la diferencial exacta apropiada no aparece en la integral misma, sino que la función debe multiplicarse o dividirse por cierta constante. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Calcule $\int x^2 e^{x^3+1}\, dx$

Solución La derivada de $x^3 + 1$ es $3x^2$. Puesto que la expresión $x^2\, dx$ aparecen en el integrando, esto nos sugiere hacer $u = x^3 + 1$. Luego, $du = 3x^2\, dx$, y así $x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$. Así,

$$\int x^2 e^{x^3+1}\, dx = \int e^u(\tfrac{1}{3}du) = \tfrac{1}{3}\int e^u\, du = \tfrac{1}{3}e^u + C = \tfrac{1}{3}e^{x^3+1} + C \quad ☛ \mathbf{9}$$

Respuesta
a) $\ln|x^2 + 2| + C\ (u = x^2 + 2)$
b) $2\sqrt{\ln x} + C\ (u = \ln x)$
c) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C\ (u = x^2)$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \sqrt{2x + 3}\, dx$

Solución Escribiendo $u = 2x + 3$, encontramos que $du = 2dx$, esto es, $dx = \frac{1}{2}du$

Se sigue que

$$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2} du = \tfrac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} u^{3/2} + C = \tfrac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$$

El ejemplo 5 es uno de un tipo especial de sustitución denominada **sustitución lineal**. En el teorema 1 elegimos $u = ax + b$, en donde a y b son constantes ($a \neq 0$). Esto es, $g(x) = ax + b$ y $g'(x) = a$. Entonces, el enunciado del teorema se transforma en

$$\int f(ax+b) \cdot a\, dx = F(ax+b) + C_1$$

Dividiendo todo entre a y denotando $C_1/a = C$, tenemos el siguiente

TEOREMA 2

$$\text{Si} \int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \text{entonces} \quad \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

en donde a y b son dos constantes cualesquiera ($a \neq 0$). En otras palabras, para integrar $f(ax + b)$, manejamos $(ax + b)$ como si fuera una sola variable, y después dividimos la integral resultante entre a, el coeficiente de x.

El teorema 2 es una poderosa herramienta y puede generalizar cada integral de la tabla 1 (véase la sección 5-1) reemplazando x por $ax + b$ ($a \neq 0$). Esto nos conduce a los tipos de integrales listados en la tabla 2.

TABLA 2

1. $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	**1.** $\int (ax+b)^n\, dx = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ $(a \neq 0,\ n \neq -1)$
2. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**2.** $\int \dfrac{1}{ax+b}\, dx = \dfrac{1}{a} \cdot \ln\lvert ax+b\rvert + C\ (a \neq 0)$
3. $\int e^x\, dx = e^x + C$	**3.** $\int e^{ax+b}\, dx = \dfrac{e^{ax+b}}{a} + C\ (a \neq 0)$

EJEMPLO 6 Evalúe $\int (3x - 7)^5 dx$

Solución Por el primer resultado general de la tabla 2,

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

☛ **10.** Utilizando una sustitución lineal apropiada, evalúe:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{2-7x}}\,dx$

b) $\int \frac{x}{x-2}\,dx$

Debemos hacer $a = 3$, $b = -7$ y $n = 5$ en esta fórmula general con el objetivo de evaluar la integral requerida.

$$\int (3x-7)^5\,dx = \frac{(3x-7)^{5+1}}{(3)(5+1)} + C = \frac{1}{18}(3x-7)^6 + C$$

EJEMPLO 7 Calcule $\int e^{5-3x}\,dx$

Solución Haciendo $a = -3$ y $b = 5$ en la fórmula 3 de la tabla,

$$\int e^{5-3x}\,dx = \frac{e^{5-3x}}{(-3)} + C = -\frac{1}{3}e^{5-3x} + C$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

Solución Nuevamente este ejemplo puede resolverse por medio de una sustitución lineal, aunque no es difícil hacerlo directamente como en los ejemplos 6 y 7. Tomamos $u = 1 - x$, de modo que $du = -dx$. El factor $\sqrt{1-x}$ en el integrando se transforma en $\sqrt{u}$, ya que $x = 1 - u$. Así,

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-u)\sqrt{u}(-du) = -\int (u^{1/2} - u^{3/2})\,du$$

$$= -\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} + C$$ ☛ **10**

Respuestas
a) $-\frac{2}{7}\sqrt{2-7x} + C$
$(u = 2 - 7x)$
b) $(x-2) + 2\ln|x-2| + C = x + 4\ln|x-2| + C_1$
$(u = x - 2)$

EJERCICIOS 5-2

(1-14) Por medio de una sustitución lineal o aplicando el teorema 1 evalúe las siguientes integrales.

1. $\int (2x+1)^7\,dx$

2. $\int \sqrt{3x-5}\,dx$

3. $\int \frac{1}{(2-5t)^2}\,dt$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,dx$

5. $\int \frac{1}{2y-1}\,dy$

6. $\int \frac{1}{1-3t}\,dt$

7. $\int \frac{2u-1}{4u^2-1}\,du$

8. $\int \frac{2x+3}{9-4x^2}\,dx$

9. $\int e^{3x+2}\,dx$

10. $\int e^{5-2x}\,dx$

11. $\int \frac{e^5}{e^x}\,dx$

12. $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}}\,dx$

13. $\int \frac{e^{2x+3}}{e^{1-x}}\,dx$

14. $\int \left(\frac{e^3}{e^{x-1}}\right)^2 dx$

(15-64) Mediante una sustitución apropiada encuentre las siguientes antiderivadas.

15. $\int (x^2+7x+3)^4(2x+7)\,dx$

16. $\int (x+2)(x^2+4x+2)^{10}\,dx$

17. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}\,dx$

18. $\int \frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1}\,dx$

19. $\int x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

20. $\int x\sqrt{3x^2 + 4}\,dx$

21. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

22. $\int \frac{x^2}{x^3 + 7}\,dx$

23. $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 8}}\,dt$

24. $\int t^2\sqrt{1 + t^3}\,dt$

25. $\int \frac{(\sqrt{x} + 7)^5}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})}\,dx$

27. $\int \sqrt{x}\,(2 + x\sqrt{x})^5\,dx$

28. $\int x\sqrt{x}\,(1 + x^2\sqrt{x})^4\,dx$

29. $\int te^{t^2}\,dt$

30. $\int x^3e^{x^4}\,dx$

31. $\int \frac{e^{x^n}}{x^{1-n}}\,dx$

32. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

34. $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx$

35. $\int \frac{x}{e^{x\sqrt{x}}}\,dx$

36. $\int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3 - 3x^{-1}}\,dx$

37. $\int x^2e^{x^3}\,dx$

38. $\int x^{n-1}e^{x^n}\,dx$

39. $\int \frac{(2x - 1)e^{x^2}}{e^x}\,dx$

40. $\int \frac{1}{e^xe^{1/x^2}}\,dx$

41. $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx$

42. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$

43. $\int \frac{e^{3x}}{3 - e^{3x}}\,dx$

44. $\int \frac{e^{x/2}}{1 - e^{x/2}}\,dx$

45. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

46. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

47. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

48. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

49. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

50. $\frac{1}{x(1 + \ln x)^4}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$

52. $\int \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}\,dx$

53. $\int \frac{1}{x(1 + \ln x)}\,dx$

54. $\int \frac{1}{(x + 3)\ln(x + 3)}\,dx$

55. $\int \frac{3t^2 + 1}{t(t^2 + 1)}\,dt$

56. $\int \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy$

57. $\int (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 1}\,dx$

58. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\,dx$

59. $\int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$

60. $\int e^{x^2 + \ln x}\,dx$

61. $\int \frac{t^2}{t - 1}\,dt$

62. $\int \frac{t^3}{t - 1}\,dt$

63. $\int x\sqrt{x + 1}\,dx$

(*Sugerencia*: Haga $\sqrt{x + 1} = u$ o $x + 1 = u^2$)

64. $\int x^2\sqrt{x - 3}\,dx$

65. Encuentre $g(x)$ si $g'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ si $g(0) = 2$

66. Encuentre $f(e)$ si $f'(x) = (x + x\ln x)^{-1}$ y $f(1) = 0$

(67-72) Si $f'(x) = g(x)$, calcule las siguientes integrales.

67. $\int g(3x)\,dx$

68. $\int x\,g(x^2)\,dx$

69. $\int \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

70. $\int e^x\,g(e^x)\,dx$

71. $\int x^{-1}\,g(\ln x)\,dx$

72. $\int x^2\,g(x^3)\,dx$

73. *(Costo marginal)* El costo marginal (en dólares) de una compañía que fabrica zapatos está dado por

$$C'(x) = \frac{x}{1000}\sqrt{x^2 + 2500}$$

en donde x es el número de pares de zapatos producidos. Si los costos fijos son de \$100, determine la función de costo.

74. *(Costo marginal)* Un industrial textil tiene un costo marginal (en dólares) por rollo de una tela particular dado por $C'(x) = 20xe^{0.01x^2}$, en donde x es el número de rollos producidos de la tela. Si los costos fijos ascienden a \$1500, determine la función de costo.

75. *(Tasa de desempleo)* Durante una crisis económica reciente, el porcentaje de desempleados creció a razón de

$$P'(t) = \frac{0.4e^{-0.1t}}{(1 + e^{-0.1t})^2}$$

donde t es el tiempo en meses. Dado que en $t = 0$ había 4% de desempleados, ¿qué porcentaje estaba desempleado:

a) 10 meses después? *b*) 20 meses después?

76. *(Recurso natural)* Actualmente una compañía maderera tiene una reserva de 100 millones de pies de madera en tablones. La razón a la cual esta compañía corta y vende la madera es $R(t) = 3e^{0.06t}$ millones de pies por año, donde t es el tiempo en años medidos a partir de ahora. Calcule la reserva que quedará después de t años. ¿Cuántos años durará la reserva sin ninguna reforestación?

77. *(Producción petrolífera)* La razón de producción de un pozo petrolero en barriles diarios varía de acuerdo con la fórmula

$$P'(t) = \frac{1{,}200{,}000}{(t + 1600)^{3/2}}$$

donde t es el tiempo (en días) a partir del inicio de la producción. Calcule la producción total hasta el tiempo t. También encuentre la producción total posible, esto es, $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

78. *(Crecimiento de población)* Una población de bacterias está creciendo de tal manera que la razón de crecimiento en el tiempo t (medido en horas), es igual a $1000(1 + 3t)^{-1}$. Si el tamaño de la población en $t = 0$ es 1000, ¿cuál será su tamaño después de 4 horas?

79. *(Reacción de una droga)* La velocidad de producción de anticuerpos t horas después de inyectar un suero está dada por $f(t) = 10t/(t^2 + 9)$. Encuentre el valor de t en el cual $f(t)$ es el máximo y el número total de anticuerpos producidos hasta ese tiempo.

■ 5-3 TABLAS DE INTEGRALES

En la sección previa, presentamos el método de sustitución, por medio del cual ciertas integrales complejas pueden reducirse a una de las tres integrales estándar listadas en la sección 5-1. Aparte del método de sustitución, existen otras técnicas que son de utilidad cuando se requiere evaluar integrales, una de éstas se expondrá en la sección 5-4.

En general, la evaluación de integrales es una tarea que requiere considerable destreza y a menudo ingenio. La variedad de métodos de que se dispone para este fin es una indicación de este hecho. Más aún, no es posible formular reglas contundentes y rápidas acerca de que tal método o sustitución funcionará en una situación dada, sino que es necesario desarrollar a través de la experiencia una intuición de cuál método es probablemente el más conveniente.

Al afrontar estas dificultades, la manera apropiada de evaluar integrales es usando una tabla de integrales. Una tabla de integrales consta de una lista de un gran número de integrales, junto con sus valores. Para evaluar una integral determinada, sólo es necesario extraer la respuesta de la tabla, sustituyendo los valores de cualesquiera constantes que sean necesarias. Existe un buen número de tales tablas, algunas más completas que otras; en el apéndice II aparece una tabla de integrales breve; sin embargo, es lo bastante completa para evaluar todas las integrales que aparecen en nuestros ejemplos y ejercicios.

Las integrales de esta tabla están clasificadas de acuerdo con ciertos encabezados con la finalidad de facilitar su uso. Por ejemplo, todas las integrales en que aparece un factor de la forma $\sqrt{ax + b}$ están listadas juntas y todos los integrandos en que aparece $\sqrt{x^2 + a^2}$ también están listados juntos, así como aquellos en que intervienen funciones exponenciales, etcétera.

EJEMPLO 1 Calcule $\int \frac{1}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx$

Solución Debemos buscar en la tabla hasta que encontremos una integral de la misma forma que la dada. La sección titulada ‘‘Integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$’’ es el lugar apropiado para buscarla, y por la fórmula 33, encontramos el resultado

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Esto es válido para cualquier valor distinto de cero de la constante a, de modo que si hacemos $a = 2$, obtenemos la integral requerida.

$$\int \frac{1}{(4 - x^2)^{3/2}}\, dx = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C$$

☛ **11.** Utilice la tabla para encontrar
$\int \frac{x}{3x - 7}\, dx$

Observe que debemos sumar la constante de integración. ☛ **11**

EJEMPLO 2 Encuentre $\int \frac{1}{2x^2 - 7x + 4}\, dx$

Solución Si la comparamos con la integral estándar

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

que aparece en la tabla de integrales, tenemos que $a = 2$, $b = -7$ y $c = 4$. En consecuencia,

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(4) = 49 - 32 = 17 > 0$$

Cuando $b^2 - 4ac > 0$, tenemos que (véase la fórmula 66)

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$$

Sustituyendo los valores de a, b y c, resulta que

$$\int \frac{1}{2x^2 - 7x + 4}\, dx = \frac{1}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{4x - 7 - \sqrt{17}}{4x - 7 + \sqrt{17}} \right| + C$$

en donde C es la constante de integración que siempre debe incluirse.

Algunas veces el uso de las tablas no es así de directo y puede ser necesario usar la tabla dos o más veces al evaluar una integral. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2 - 3x}}\, dx$

Solución Si buscamos en las integrales que incluyen $\sqrt{ax + b}$ en la tabla, entonces la fórmula 23 establece que

$$\int \frac{1}{x^n\sqrt{ax + b}}\, dx = -\frac{\sqrt{ax + b}}{(n - 1)bx^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2b)} \int \frac{1}{x^{n-1}\sqrt{ax + b}}\, dx; \;\; (n \neq 1)$$

Respuesta
$\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}\ln|3x - 7| + C$

En nuestro ejemplo, $n = 2$, $a = -3$ y $b = 2$. En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-3x}}\,dx = -\frac{\sqrt{2-3x}}{2x} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x\sqrt{2-3x}}\,dx \qquad (1)$$

A fin de evaluar la integral del lado derecho de la ecuación (1), buscamos de nuevo en la parte de la tabla de integrales en donde aparezca $\sqrt{ax+b}$; la fórmula 22 da

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|, \text{ si } b > 0$$

Haciendo $a = -3$ y $b = 2$ en la expresión anterior, tenemos

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2-3x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2}}\right|$$

Usando este valor en el lado derecho de la ecuación (1),

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2-3x}}\,dx = -\frac{\sqrt{2-3x}}{2x} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2}}\right| + \mathrm{C}$$

en donde otra vez sumamos la constante de integración C. ☛ **12**

☛ **12.** Utilice la tabla para encontrar $\int (\ln x)^2\,dx$

Algunas veces, antes de aplicar una tabla de integrales, es necesario realizar un cambio de variable mediante sustitución con el objetivo de reducir la integral dada a una que aparezca en la tabla.

***EJEMPLO 4** Encuentre $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx$

Solución En este caso, no encontramos la integral en la tabla. En primer término, cambiamos la variable de integración. Es claro que, $e^x\,dx$, la diferencial de e^x aparece en el integrando, de modo que $e^x = y$. Luego, $e^x\,dx = dy$ y la integral dada ahora se transforma en

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx = \int \frac{1}{(y+2)(3-y)}\,dy$$

Una integral general de esta forma aparece en la tabla (fórmula 15):

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad} \ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right| \quad (bc - ad \neq 0)$$

En nuestro ejemplo, $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = 3$, y x en lugar de y. Así,

$$\int \frac{1}{(y+2)(3-y)}\,dy = \frac{1}{(2)(-1)-(1)(3)} \ln\left|\frac{-y+3}{y+2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{5} \ln\left|\frac{3-y}{y+2}\right| + C$$

Respuesta
$x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

☛ **13.** Utilice una sustitución y luego la tabla para encontrar $\int x\sqrt{x^4+1}\,dx$

en donde C es la constante de integración. Sustituyendo $y = e^x$, tenemos

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}\,dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3-e^x}{e^x+2}\right| + C \quad ☛ \textbf{13}$$

Siempre que se evalúe una integral usando una tabla de integrales, podemos verificar que la respuesta obtenida es correcta derivándola: el resultado de la derivación debería ser el integrando original. Por ejemplo, es fácil verificar por los métodos estándar de derivación que

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3-e^x}{e^x+2}\right|\right) = \frac{e^x}{(e^x+2)(3-e^x)}$$

Esto representa una comprobación de la respuesta obtenida en el ejemplo 4.

El lector puede preguntarse cómo se construyeron las tablas de integrales en un principio. Existen en realidad, varias técnicas (aparte del método general de sustitución) que son de utilidad al evaluar integrales y que se usan al construir tablas del tipo dado en el apéndice. En la siguiente sección, se hará una breve exposición de una de las más importantes de tales técnicas.

Si el lector ha desarrollado la suficiente destreza en el uso de las integrales, la técnica dada en la próxima sección no la utilizará con mucha frecuencia. Sin embargo, será de utilidad, dado que en algunas ocasiones el integrando considerado no estará listado en la tabla de que se disponga. En tal caso, esta técnica puede ser útil al transformar la integral dada en una que esté listada.

Respuesta La sustitución $u = x^2$: $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1} + \frac{1}{4}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right| + C$

EJERCICIOS 5-3

(1-26) Aplique tablas de integrales a fin de evaluar las siguientes integrales.

1. $\int \frac{1}{x^2-3x+1}\,dx$

2. $\int \frac{1}{2x^2+5x-3}\,dx$

3. $\int \frac{x}{(2x-3)^2}\,dx$

4. $\int \frac{y}{(3y+7)^5}\,dy$

5. $\int \frac{\sqrt{3x+1}}{x}\,dx$

6. $\int \frac{t}{(2t+3)^{5/2}}\,dt$

7. $\int \frac{1}{t\sqrt{16+t^2}}\,dt$

8. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2+25}}\,du$

9. $\int \frac{y^2}{\sqrt{y^2-9}}\,dy$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x+4}}\,dx$

12. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

13. $\int \frac{1}{x\,(2x+3)^2}\,dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

15. $\int x^2(x^2-1)^{3/2}\,dx$

16. $\int x^3(\ln x)^2\,dx$

17. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

18. $\int y^2 e^{-3y}\,dy$

19. $\int \sqrt{\frac{2x+3}{4x-1}}\,dx$

20. $\int \frac{x^2}{3x-1}\,dx$

***21.** $\int \frac{e^x}{(1-e^x)(2-3e^x)}\,dx$

***22.** $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x(1 + \ln x)}\, dx$

***23.** $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 1)(2x^2 + 3)}\, dx$

***24.** $\displaystyle\int \frac{y}{(2y^2 + 1)(3y^2 + 2)}\, dy$

***25.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(3 + 2 \ln x)}\, dx$

***26.** $\displaystyle\int x^5 e^{-x^2}\, dx$

■ 5-4 INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes puede utilizarse a menudo con el propósito de evaluar una integral, cuyo integrando consista de un producto de funciones. Es análogo a la fórmula del producto del cálculo diferencial y en realidad se deduce de ella.

Del cálculo diferencial, sabemos que

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

o bien,

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - u'(x)v(x)$$

Integrando ambos lados con respecto a x, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx \tag{1}$$

Esta ecuación por lo regular se escribe en la forma

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

después de introducir las diferenciales $du = u'(x)\, dx$ y $dv = v'(x)\, dx$. Una manera alternativa de escribirla es como sigue.

Sea $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = g(x)$. Se sigue que podemos escribir $v(x) = G(x)$, en donde $G(x)$ denota la integral de $g(x)$ y, entonces, la ecuación (1) se transforma en

$$\boxed{\int f(x)g(x)\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\, dx}$$

Esta fórmula expresa la integral del producto $f(x)g(x)$ en términos de la integral del producto $f'(x)G(x)$. Es útil porque en muchos casos la integral de $f'(x)G(x)$ es más fácil de evaluar que la integral del producto original $f(x)g(x)$. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx$

Solución Elijamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^{2x}$, de modo que la integral dada tiene la forma $\int f(x)g(x)\,dx$. Se sigue que $f'(x) = 1$ y $G(x)$, la integral de $g(x)$, está dada por $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, en donde C_1 es una constante de integración. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx\\ \int xe^{2x}\,dx &= x(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1) - \int (1)(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{2}\int (e^{2x} + 2C_1)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{4}e^{2x} - C_1x + C\\ &= \tfrac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + C\end{aligned}$$

en donde otra vez C es una constante de integración.

La integral de este ejemplo también pudo encontrarse usando la fórmula 69 del apéndice II. El lector deberá verificar que la respuesta obtenida sea la misma que la del ejemplo 1.

Observación Tiene que advertirse que la primera constante de integración C_1 en el ejemplo anterior, que surge integrar $g(x)$ para obtener $G(x)$, se cancela en la respuesta final. Esto siempre sucede al integrar por partes. Por consiguiente, en la práctica nunca debemos preocuparnos por incluir una constante de integración en $G(x)$, sino simplemente en tomar $G(x)$ como cualquier antiderivada particular de $g(x)$. ☛ **14**

☛ **14.** Utilice integración por partes para encontrar
$\int xe^{-3x}\,dx$

Al usar este método, es importante realizar la elección correcta de $f(x)$ y $g(x)$ al expresar el integrando original como un producto. De otra manera, la integral de $f'(x)G(x)$ puede que no resulte más fácil de evaluar que la integral de $f(x)g(x)$. Por ejemplo, si cambiamos las elecciones en el ejemplo 1, haciendo $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x$, entonces, $f'(x) = 2e^{2x}$ y $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, de modo que la fórmula de integración por partes se convierte en

$$\int e^{2x}\,x\,dx = e^{2x}\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \int 2e^{2x}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\,dx$$

Esta ecuación es muy correcta, pero no es de mucha utilidad, dado que el integrando de la derecha es más complicado que nuestra integral original.

Un criterio evidente al elegir f y g es que debemos ser capaces de integrar $g(x)$ para determinar $G(x)$. Por lo regular, elegiríamos $g(x)$ en tal forma que su antiderivada sea una función bastante simple. Los siguientes principios serán de utilidad al decidir sobre la elección de f y g.

1. Si el integrando es el producto de un polinomio en x y una función exponencial, a menudo es útil elegir $f(x)$ como el polinomio dado. El ejemplo anterior ilustra este tipo de elección.
2. Si el integrando contiene una función logarítmica como factor, con frecuencia conviene elegir esta función como $f(x)$. Si el integrando consta por completo de

Respuesta
$-\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx$
$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$

una función logarítmica, podemos elegir $g(x) = 1$. En el siguiente ejemplo se ilustran estos principios.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int x^2 \ln x \, dx (x > 0)$

Solución Elegimos $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2$. Luego, $f'(x) = 1/x$ y $G(x) = \frac{1}{3}x^3$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int \ln x \cdot x^2\,dx = \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\,dx$$

☛ **15.** Utilice integración por partes para encontrar $\int x^{-3} \ln x \, dx$

En consecuencia,

$$\int x^2 \ln x\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C$$ ☛ **15**

EJEMPLO 3 Calcule $\int \ln(2x - 1)\,dx$

Solución En este caso, podemos expresar el integrando como un producto escribiendo $f(x) = \ln(2x - 1)$ y $g(x) = 1$. Se sigue que

$$f'(x) = \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \frac{2}{2x-1} \text{ y } G(x) = x$$

Integrando por partes resulta

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

o bien,

$$\begin{aligned}\int \ln(2x-1)\,dx &= \ln(2x-1)\cdot x - \int \frac{2}{2x-1}\cdot x\,dx \\ &= x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\,dx \\ &= x\ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx \qquad \text{por división larga*} \\ &= x\ln(2x-1) - x - \frac{\ln|2x-1|}{2} + C \\ &= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\ln(2x-1) - x + C\end{aligned}$$

Respuesta $-\dfrac{\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + C$

*De manera alterna, puede sustituir $n = 2x - 1$

☛ **16.** Determine $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

[*Sugerencia*: Primero sustituya $u = x^2$]

En el último paso hemos escrito $\ln |2x - 1| = \ln (2x - 1)$, ya que la integral sólo está definida si $2x - 1 > 0$

EJEMPLO 4 Encuentre $\int x^2 e^{mx}\, dx \qquad (m \neq 0)$

Solución Aquí elegimos $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{mx}$. Luego, $f'(x) = 2x$ y $G(x) = e^{mx}/m$. Usando la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g(x)\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\, dx \tag{2}$$

o asimismo

$$\int x^2 e^{mx}\, dx = x^2 \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \int 2x \cdot \frac{e^{mx}}{m}\, dx = \frac{1}{m} x^2 e^{mx} - \frac{2}{m} \int x e^{mx}\, dx \tag{3}$$

(Compare lo anterior con la fórmula 70 del apéndice II). Con el propósito de evaluar la integral de la derecha, usamos otra vez integración por partes, con $f(x) = x$ y $g(x) = e^{mx}$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $G(x) = e^{mx}/m$. Aplicando la ecuación (2),

$$\int x e^{mx}\, dx = x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \int 1 \cdot \frac{e^{mx}}{m}\, dx = \frac{x}{m} e^{mx} - \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{mx}}{m}$$

Sustituyendo el valor de esta integral en la ecuación (3), resulta

$$\int x^2 e^{mx}\, dx = \frac{1}{m} x^2 e^{mx} - \frac{2}{m}\left(\frac{x}{m} e^{mx} - \frac{1}{m^2} e^{mx}\right) + C$$

$$= \frac{1}{m^3} e^{mx} (m^2 x^2 - 2mx + 2) + C$$

en donde por último sumamos la constante de integración C ☛ **16**

Respuesta
Integral $= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^4 - 2x^2 + 2) + C$

EJERCICIOS 5-4

(1-34) Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int x \ln x\, dx$

2. $\int x^3 \ln x\, dx$

3. $\int x^n \ln x\, dx$

4. $\int \ln (x + 1)\, dx$

5. $\int \ln x\, dx$

6. $\int \frac{\ln (x^2)}{x^2}\, dx$

7. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$

8. $\int x^3 \ln (x^3)\, dx$

9. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

10. $\int (x^2 + 5)\ln x\, dx$

11. $\int (x + 1)^2 \ln (x + 1)\, dx$

12. $\int (x - 2)^3 \ln (x - 2)\, dx$

13. $\int \ln (ex)\, dx$

14. $\int \ln (2x)\, dx$

15. $\int x^2 \ln (ex)\, dx$

16. $\int x^3 \ln (3x)\, dx$

***17.** $\int \log x\, dx$

***18.** $\int \log_2 x\, dx$

***19.** $\int x \log x\, dx$

***20.** $\int x^3 \log x\, dx$

21. $\int x\, e^x\, ax$

22. $\int x\, e^{-x}\, dx$

23. $\int x\, e^{mx}\, dx$

24. $\int \frac{x}{e^{2x}}\, dx$

25. $\int (2x+1)e^{3x}\, dx$

***26.** $\int e^{x+\ln x}\, dx$

27. $\int \ln (x^x)\, dx$

28. $\int \ln (xe^x)\, dx$

29. $\int x^2 e^x\, dx$

30. $\int y^2 e^{3y}\, dy$

31. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$ (*Sugerencia*: Sea $x^2 = u$)

32. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ (*Sugerencia*: Sea $\sqrt{x} = u$)

33. $\int \ln (x^{x^2})\, dx$

34. $\int e^{2x} \ln (e^x)\, dx$

35. Mediante integración por partes verifique la fórmula 74 del apéndice II.

36. Compruebe la fórmula 64 del apéndice II.

37. *(Costo marginal)* Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{5000 \ln (x+20)}{(x+20)^2}$$

en donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a \$2000, determine la función de costo.

38. *(Epidemia)* Durante el desarrollo de una epidemia la razón de llegada de casos nuevos a cierto hospital es igual a $5\, te^{-(t/10)}$, donde t está medido en días, $t = 0$ es el inicio de la epidemia. ¿Cuántos casos ha tratado el hospital en total cuando $t = 5$ y cuando $t = 10$?

REPASO DEL CAPÍTULO 5

Términos, símbolos y conceptos importantes

5.1 Cálculo diferencial, cálculo integral. Integración. Antiderivada o integral indefinida. Constante de integración, integrando, variable de integración; $\int f(x)\, dx$.

Fórmula de la potencia para integración.

5.2 Método de sustitución. Sustitución lineal.

5.3 Tabla de integrales.

5.4 Integración por partes.

Fórmulas

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Propiedades de las integrales:

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} F(x)\, dx = F(x) + C$$

Si $\int f(u)\, du = F(u) + C$, entonces podemos sustituir $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$. Esto es,

$$\int f[g(x)]g'(x)\, dx = F[g(x)] + C$$

Si $\int f(u)\, du = F(u) + C$, entonces

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Integración por partes:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

en donde $G(x) = \int g(x)\,dx$

o $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) La integral del producto de dos funciones integrables es igual al producto de las integrales.

b) La integral de la diferencia de dos funciones integrables es igual a la diferencia de las integrales.

c) La antiderivada de una función integrable es única.

d) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$

e) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

f) Si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x)$

g) $\int e^u du = e^u + C$

h) $\int \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{e^t} + C$

i) $\int 3f(x)dx = 3\int f(x)dx$

j) $\int [g(x)]^n dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$

k) $\int \frac{dx}{x^3} = \ln|x^3| + C$

l) $\int e^n dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} + C$

m) $\int e^{x^2} dx = e^{x^3/3} + C$

(2-11) Calcule las siguientes integrales.

2. $\int (x-2)(6x-4)dx$

3. $\int (x^2+1)^3 dx$

***4.** $\int (x^2+1)^3 2x\,dx$

5. $\int \sqrt[3]{e^x}\,dx$

6. $\int (\log 5)dx$

7. $\int \frac{e^{x+1}}{e^{x-1}}\,dx$

8. $\int \frac{3x^4+2x^3}{x^2}\,dx$

9. $\int \sqrt{x+1}\,dx$

***10.** $\int t^2\sqrt{t^3+4}\,dt$

11. $\int (x^{10}+x^9)dx$

(12-19) Por medio de una sustitución adecuada, evalúe las siguientes integrales.

12. $\int 2x(x^2-7)^{10}dx$

13. $\int e^{x^2} 2x\,dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

15. $\int \sqrt[3]{e^x+1}\,e^x dx$

16. $\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt$

17. $\int \frac{e^{-1/t}}{t^2}\,dt$

18. $\int \frac{1}{x\sqrt{10+\ln x}}\,dx$

***19.** $\int t^t(1+\ln t)dt$

(20-39) Con ayuda de las tablas de este libro u otros, calcule las siguientes integrales.

20. $\int \frac{2t-3}{(t-1)(t-3)}\,dt$

21. $\int \frac{5u}{\sqrt{2u+1}}\,du$

22. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

23. $\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{6t}\,dt$

24. $\int \frac{y^2}{e^y}\,dy$

25. $\int x^3 e^x dx$

26. $\int \frac{1}{1+4e^{2x}}\,dx$

***27.** $\int \log_2 x\,dx$

28. $\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx$

29. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

30. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

31. $\int x \ln x^2 dx$

32. $\int 6\ln\left(\frac{x}{3}\right)dx$

33. $\int \frac{\sqrt{m^2 + 9}}{2m}\, dm$

34. $\int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25}$

35. $\int \frac{dt}{t^2 + 10t + 20}$

36. $\int \frac{5}{x(2x^4 + 1)}\, dx$

37. $\int \frac{du}{u\sqrt{2u^4 + 9}}$

38. $\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx$

39. $\int \frac{[\ln x^2]^2}{x}\, dx$

40. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

41. Si $f'(x) = \ln(x)$ y $f(1) = 1$, determine $f(t)$

42. Si $g'(x) = e^x$ y $g(0) = 5$, determine $g(x)$

43. Si $h'(x) = 2x + 3$ y $h(0) = 5$, determine el valor de $h(1)$

44. Si $g'(x) = 1 + \ln(x)$ y $g(1) = 2$, determine el valor de $g(e)$

45. *(Costo marginal)* Si el costo marginal de cierta empresa a un nivel de producción x es $C'(x) = 10x$ y el costo de fabricar 30 unidades es $5000, determine el costo de fabricar 40 unidades.

46. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de una empresa es $R'(x) = 10 - 0.02x$

a) Determine la función de ingreso.

b) ¿Qué ingreso se obtendrá al vender 200 artículos?

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

d) ¿Cuántas unidades podrá vender la empresa si les fija un precio de $5 a cada una?

47. *(Ingreso marginal)* El ingreso marginal de una empresa está dado por $R'(x) = 0.1 - 0.002x^2 - 0.000025x^{3/2}$

a) Determine la función de ingreso.

b) Determine la relación de demanda.

48. *(Ingreso y demanda)* El ingreso marginal de una empresa por su producto es $R'(x) = 20(35 - x)e^{-x/25}$. Determine la función de ingreso y la ecuación de demanda del producto.

49. *(Costo extra de producción)* Una compañía produce 200 unidades por semana de producto. Sabe que el costo marginal está dado por

$$C'(x) = 100 - 0.04x$$

Suponiendo que este costo marginal se mantenga, determine el costo extra por semana que debería considerar al elevar la producción de 200 a 300 unidades por semana.

50. *(Ingreso y demanda)* El ingreso marginal de una empresa está dado por la expresión $R'(x) = 30 - 0.02x$

a) Determine la función de ingreso.

b) Determine la relación de demanda para el producto de la empresa.

51. *(Costo marginal)* La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 50 + 0.04x$

a) Determine la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de $3000 al mes.

b) ¿Cuánto costará producir 250 unidades en un mes?

52. *(Ingreso marginal)* La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 50 - 0.04x - 0.0018x^2$$

a) Determine la función de ingreso.

b) ¿Cuál es el ingreso que se obtendrá por la venta de 200 unidades del producto de la empresa?

c) Determine la función de demanda del producto de la empresa.

53. *(Curva de aprendizaje)* Después que una persona ha estado trabajando por t horas con una máquina en particular, habrá rendido x unidades, en donde la tasa de rendimiento (número de unidades por hora) está dada por

$$\frac{dx}{dt} = 20(1 - e^{-t/30})$$

a) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus primeras 30 horas?

b) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus segundas 30 horas?

Aproxime sus respuestas al entero más cercano de unidad.

54. *(Crecimiento de población)* Una población de bacterias crece de tal manera que la razón de crecimiento en el tiempo t (medido en horas) es igual a $90x + 500/(1 + x)$. Si el tamaño de la población en $t = 0$ es 2000, ¿cuál será el tamaño de la población al cabo de 3 horas?

55. *(Costo marginal)* Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{8000 \ln(x + 25)}{(x + 25)^2}$$

en donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a $2000, determine la función de costo.

56. *(Productividad física)* La productividad física marginal, dp/dx, para una industria de zapatos es $dp/dx = 1000(1+x)$. Determine la productividad física p cuando están en funcionamiento 3 máquinas.

57. *(Productividad física)* La productividad física marginal, dp/dx, para una industria de colchones es $dp/dx = 3000(1 +$

$2x)^{1/2}$. Determine la productividad física p cuando están en funcionamiento 4 máquinas.

58. *(Reacción de una droga)* La velocidad de producción de anticuerpos t horas después de inyectar un suero, está dada por

$$K(t) = \frac{20t}{t^2 + 1} \text{ miles de anticuerpos/hora}$$

Determine el valor de t en el cual $K(t)$ es máximo y calcule el número total de anticuerpos producidos hasta ese instante.

***59.** *(Densidad de tráfico)* La densidad de tráfico en un puente durante las tres horas pico del día, varía de acuerdo con la fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 3 + 10t & 0 \le t < 1.5 \\ 30 - 8t & 1.5 \le t < 3 \end{cases}$$

donde t está medido en horas a partir del inicio de la hora pico y $f(t)$ está medido en miles de vehículos por hora. ¿Cuántos vehículos cruzan el puente:

a) las primeras 1.5 horas?

b) durante el total de las tres horas pico?

***60.** *(Consumo de petróleo)* Desde 1970, la razón de consumo de petróleo en cierto país, ha sido dada en millones de barriles por día mediante la siguiente función:

$$B(t) = \begin{cases} 1 + 0.1t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 1.68 - 0.07t & \text{si } 4 \le t < 12 \\ 0.24 + 0.05t & \text{si } 12 \le t < 18 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en años a partir de 1970. Calcule el consumo total:

a) Entre 1970 y 1975

b) Entre 1980 y 1985

c) Entre 1970 y 1980

Nota: No olvide multiplicar $B(t)$ por 365, y suponga que todos los años tienen 365 días.

***61.** *(Aceleración)* La aceleración de un móvil en el instante t está dada por $2 + 6t m/s^2$

a) Determine la velocidad, $v(t)$, en el instante t, si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 50 m/s.

b) Calcule la distancia, $d(t)$, recorrida por el móvil durante los primeros t segundos.

62. *(Velocidad y distancia)* La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + 2\sqrt{t})^2$. Calcule la distancia recorrida hasta el instante t.

63. *(Velocidad y distancia)* La velocidad en el instante t de un objeto está dada por $10 - 5t$. La velocidad inicial, es decir $v(0) = 10$ metros/segundo. Determine la distancia, $d(t)$, que viaja durante t segundos y de aquí encuentre la distancia requerida para llegar al alto total.

64. En el punto $(x, f(x))$ en la gráfica de $y = f(x)$, la pendiente de la recta tangente es $f'(x) = 4x - 7$. Si el punto $(2, 2)$ pertenece a la gráfica, determine $f(x)$.

65. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en cualquier punto $(x, g(x))$ está dada por $g'(x) = 2e^{2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Si el punto $(0, 1)$ está en la gráfica, determine $g(x)$

CASO DE ESTUDIO

UTILIDADES EN LA PRODUCCIÓN

Con base en la información dada al inicio del capítulo, se sabe que la función de ingreso marginal es

$$I'(x) = 10e^{-x/50}(50 - x)$$

con las técnicas de integración analizadas en este capítulo se tiene que

$$I(x) = 500xe^{-x}/50 + K$$

donde K es una constante, pero se supone que si se venden 0 productos el ingreso es cero, entonces,

$$I(0) = 500(0)e^{-0/50} + K = 0, \text{ implica que } K = 0$$

Por tanto, la función de ingreso está dada por

$$I(x) = 500xe^{-x/50} \qquad (1)$$

Dado que una forma de escribir el ingreso es $I(x) = px$, donde p es el precio de cada artículo, a partir de la ecuación (1) se deduce que la relación de demanda es

$$p = 500e^{-x/50}$$

Lo cual responde la primera interrogante de la licenciada Adriana. La gráfica de la función anterior es la siguiente,

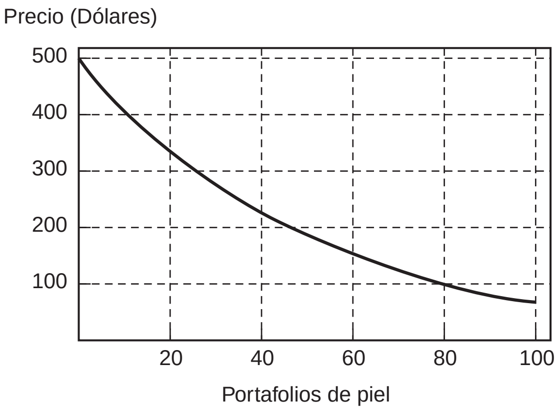
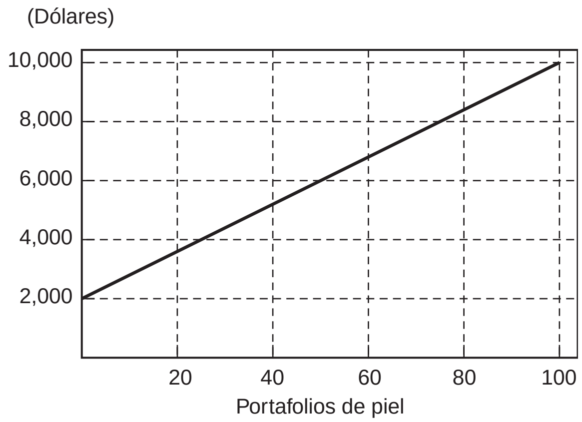


FIGURA 3

Se puede notar que conforme el precio baja la demanda por portafolios crece y viceversa.

Para responder la segunda pregunta de la licenciada Adriana, se observa la gráfica 1, que se reproduce a continuación,



Se supone que la función de costos es lineal. Para obtener una expresión para la ecuación de una recta, basta con conocer dos puntos de la misma; en este caso, se tiene que la recta pa- sa por (0, 2000) y (100, 10,000). Así que se deduce que la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos, escrita en la forma punto pendiente es,

$$C(x) = 2000 + 80x$$

De la cual se obtiene que los costos fijos son \$2000 semanales. Con esto, se puede escribir la función de utilidad como

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

es decir,

$$U(x) = 500xe^{-x/50} - (2000 + 80x)$$

Así por ejemplo, la utilidad por la producción y venta de 50 portafolios es

$$U(50) = 500(50)e^{-50/50} - (2000 + 80(50)) \approx \$3{,}197$$

Ahora bien, por la gráfica de la utilidad se observa que en el intervalo de interés se tiene un valor máximo entre 30 y 40. Si se utilizan las técnicas de los capítulos previos para maximizar, se deben calcula $U'(x)$,

$$U'(x) = 500e^{-x/50} - 10xe^{-x/50} - 80$$

al igualar a cero se enfrenta a un problema que no es sencillo resolver, por medio de aproximaciones se obtiene que

$$U'(34.15) \approx 0$$

A la izquierda de esta abscisa, la función $U(x)$ es creciente, mientras que a la derecha es decreciente.

Ahora bien, por otro lado,

$$U''(x) = \frac{1}{5} e^{-x/50}(x - 100)$$

la cual indica que $U''(x) < 0$ para $x < 100$, así que en todo este intervalo la función es cóncava hacia abajo y, por tanto, el máximo se alcanza en 34.15. Puesto que la respuesta de interés en el problema de la licenciada Adriana debe ser un entero, se calcula

$$U(34) \approx 3892.49$$

y

$$U(35) \approx 3890.24$$

Así que el plan de producción óptimo sería producir y vender 34 portafolios de piel cada semana, con lo cual la utilidad sería de 3892.49 dólares.

Ahora bien, para poder vender 34 portafolios, ¿cuál es el precio al que debe venderse cada uno?

Si se toma la decisión de vender cada portafolio en $200, ¿cuál es la utilidad que se obtendría? Y de acuerdo con la relación de demanda, ¿cuántos portafolios se venderían?

CAPÍTULO 6

La integral definida

Un problema de inventario

Para la fabricación de ciertos muebles para computadora, la compañía *El mueble elegante* compra las cubiertas a un distribuidor externo, con un costo unitario de $24, y dado que el distribuidor no está localizado en la misma ciudad, el costo de entrega, sin importar la cantidad de cubiertas, es de $400; no puede enviar más de 1000 cubiertas, por la capacidad de sus camiones. Debido a este costo, algunos opinan que se deben solicitar las cubiertas lo más espaciado posible, para reducir el costo promedio del flete. Pero, por otro lado, hacer pedidos grandes ocasiona tener grandes inventarios y los costos asociados a tener las cubiertas en un almacén; además de que el dinero que se utilice en la compra de una gran cantidad de cubiertas se podría destinar mejor a ganar intereses en un banco. Este último se conoce como costo de oportunidad. Después de analizar la información, se ha llegado a la conclusión de que el costo de mantener en inventario se estima en $0.20 por cubierta por semana. Lo que, aseguran algunos, justificaría hacer pedidos más pequeños y con mayor frecuencia. Víctor Daniel García, gerente de compras, se puso a investigar más y, después de preguntar a diferentes áreas, revisar el historial de la compañía y hacer muchas preguntas, llegó a lo siguiente:

1. Cada semana se venden alrededor de 100 muebles para computadora, la variación es mínima alrededor de este valor y no se vislumbra que cambie mucho en el futuro cercano.
2. Se tendrían pérdidas monetarias considerables, si se detiene la producción por falta de estas cubiertas.
3. La proveedora de estas cubiertas es sumamente confiable y, si un pedido se realiza por la mañana, las cubiertas las entrega el mismo día por la tarde. Listas para utilizarse en la producción del día siguiente.
4. El grupo de asesores coincide que decidir con qué frecuencia y cuántas cubiertas comprar se debe basar en minimizar los costos promedio semanales asociados con la compra y almacenamiento de las cubiertas. Respecto al costo de mantenimiento, con mayor precisión se determinó que el costo de mantenimiento promedio semanal debería medirse como 0.20 dólares/cubierta/semana por el inventario promedio entre dos órdenes; esto es, el número promedio de cubiertas almacenadas desde que llega el pedido hasta el momento en que llega el siguiente pedido.
5. Aunque en la realidad las semanas y el número de cubiertas son números enteros, para simplificar la modelación se supone que éstas son variables continuas.

Con base en lo anterior, ayude a Víctor Daniel a tomar la decisión de cuántas y con qué frecuencia deben hacer los pedidos de las cubiertas.

TEMARIO

■ 6-1 ÁREAS BAJO CURVAS

En esta sección y en las siguientes, nos ocuparemos del cálculo de áreas de regiones que tienen fronteras curveadas. Éstas pueden evaluarse usando las integrales definidas.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función con una antiderivada que denotaremos por $F(x)$. Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y $F(x)$ existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces, la **integral definida** de $\boldsymbol{f(x)}$ de $\boldsymbol{x = a}$ a $\boldsymbol{x = b}$ se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Los números a y b se denominan los **límites de integración**, a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por lo regular $a < b$, pero esto no es esencial.

Cuando evaluamos una integral definida, por conveniencia se acostumbra utilizar unos paréntesis rectangulares grandes en el lado derecho, de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Leemos esto como la *integral definida de* f(x) *de* x = a *a* x = b *es* F(x) *en b menos* F(x) *en* a. La notación de paréntesis que aparece enmedio significa que la función dentro de ellos debe evaluarse en los dos valores del argumento que aparecen después de los paréntesis. La diferencia entre estos dos valores de la función se toma en el siguiente orden: el valor en el argumento superior menos el valor en el argumento inferior.

Al evaluar integrales definidas, omitimos la constante de integración de la antiderivada de $f(x)$, porque esta constante de integración se cancela en la respuesta final. Sea $F(x) + C$ cualquier antiderivada de $f(x)$, en donde C es la constante de integración. Luego, por la definición anterior

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

y C ha desaparecido de la respuesta.

EJEMPLO 1 Evalúe las siguientes integrales definidas:

$$a)\ \int_a^b x^4\,dx \qquad b)\ \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt \qquad c)\ \int_0^2 e^{3x}\,dx$$

Solución

a) Tenemos que $\int x^4\,dx = x^5/5$. Así que

$$\int_a^b x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3$

☛ **1.** Evalúe *a*) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$
b) $\int_{-3}^{3} x^5\,dx$ *c*) $\int_1^3 \ln t\,dt$

(Nótese que $\ln 1 = 0$).

c) $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2 = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \tfrac{1}{3}(e^6 - 1)$ ☛ **1**

Cuando evaluamos integrales definidas, en las cuales la antiderivada se encuentra por el método de sustitución, es importante observar que los límites de integración también cambian cuando la variable de integración se cambia. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$

Solución Sea $I = \displaystyle\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$. Para encontrar la antiderivada de xe^{x^2}, podemos utilizar el método de sustitución. Escribimos la integral dada como

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}\cdot 2x\,dx$$

Ya que $2x\,dx$, la diferencial de x^2, aparece en la integral hacemos $x^2 = u$ de modo que $2x\,dx = du$. En consecuencia,

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{x=1}^{x=2} e^u\,du$$

Hasta ahora hemos dejado los límites de integración sin cambio y hemos enfatizado que aún son límites para la variable original x. Podemos cambiarlos a límites para u: cuando $x = 1$, $u = 1^2 = 1$ y cuando $x = 2$, $u = 2^2 = 4$, por lo que los límites son $u = 1$ y $u = 4$. Así que

$$I = \tfrac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$$

Respuesta *a*) $\frac{16}{3}$ *b*) 0
c) $3\ln 3 - 2$

Aquí, se entiende que los límites son con respecto a la nueva variable de integración u. Por lo que, finalmente,

☛ **2.** Evalúe *a*) $\int_0^2 x^2e^{x^3}\,dx$
b) $\int_{-1}^{3} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$I = \tfrac{1}{2}\Big[e^u\Big]_1^4 = \tfrac{1}{2}(e^4 - e^1) = \tfrac{1}{2}e(e^3 - 1)$$ ☛ **2**

Respuesta *a*) $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$
b) $\frac{1}{2}\ln 5$

Nuestro principal interés en esta sección será el cálculo de áreas de regiones acotadas por curvas. Sea $f(x)$ una función dada definida y continua en un intervalo

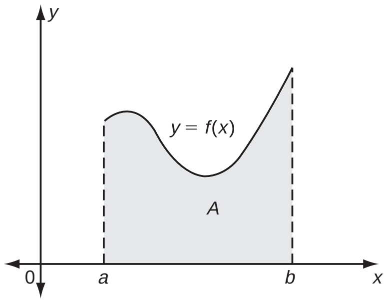


FIGURA 1

$a \leq x \leq b$ y que toma valores *no negativos* en tal intervalo. La gráfica de $y = f(x)$ se encuentra por completo por arriba del eje x, como se ilustra en la figura 1. Deseamos encontrar una fórmula para el área A que está entre tal gráfica, el eje x y las rectas verticales en $x = a$ y $x = b$. Esta área aparece sombreada en la figura 1.

Existe una estrecha relación entre el área A y la antiderivada de la función $f(x)$. Esta relación es el contenido del llamado *teorema fundamental del cálculo,* quizá el teorema más importante de todo el cálculo.

TEOREMA 1 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) Sea $f(x)$ una función continua *no negativa* en $a \leq x \leq b$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces A, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Antes de presentar la demostración del teorema, ilustraremos su aplicación mediante algunos ejemplos.

EJEMPLO 3 Evalúe el área entre la gráfica $y = x^2$ y el eje x de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución El área requerida está sombreada en la figura 2. Puesto $f(x) = x^2$ es no negativa, esta área es igual a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x) = x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Así que el área es

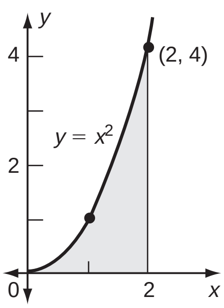


FIGURA 2

☛ **3.** Cálcule el área entre el eje x y
a) la gráfica de $y = x^2$ para $-2 \le x \le 1$
b) la gráfica de $y = 16 - x^2$ para $0 \le x \le 4$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$ ☛ **3**

EJEMPLO 4 Determine el área acotada por la curva $y = 3x^2 + 2x + 5$, el eje x y las líneas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución Es claro que $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ es no negativa para valores de x en el intervalo definido por $1 \le x \le 3$. Así, el área requerida está dada por la siguiente integral definida:

Respuesta *a*) 3 *b*) $\frac{128}{3}$

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx &= \left[x^3 + x^2 + 5x\right]_1^3\\ &= [3^3 + 3^2 + 5(3)] - [1^3 + 1^2 + 5(1)]\\ &= 51 - 7 = 44 \text{ unidades cuadradas}\end{aligned}$$ ☛ **4**

☛ **4.** En el ejemplo 4, convénzase por usted mismo de que $f(x) \ge 0$ para $1 \le x \le 3$

Si $C(x)$ denota el costo total de producir x unidades de cierto artículo, se sigue que $C'(x)$ representa la función de costo marginal. Ahora, por la definición de integral definida,

$$\int_a^b C'(x)dx = \left[C(x)\right]_a^b = C(b) - C(a)$$

Pero $C(b) - C(a)$ representa el cambio en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de a a b unidades. Se sigue que $\int_a^b C'(x)$ también representa ese mismo cambio en el costo total.

Así que tenemos el siguiente importante resultado: el cambio en los costos de producción al incrementar el nivel de producción de a a b unidades es igual al área bajo la gráfica de la función de costo marginal ($y = C'(x)$) entre $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, si $R'(x)$ es la función de ingreso marginal, entonces, el cambio en el ingreso cuando el nivel de ventas se incrementa de a a b unidades está dado por $\int_a^b R'(x)\,dx$. Una interpretación análoga puede darse a $\int_a^b P'(x)\,dx$ en donde $P'(x)$ es la función de utilidad marginal; es el cambio en la utilidad cuando x se incrementa de a a b.

EJEMPLO 5 La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción x es

$$C'(x) = 23.5 - 0.01x$$

Calcule el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1000 a 1500 unidades.

Solución El incremento en el costo total está dado por

Respuesta Cada uno de los tres términos en $f(x)$ es positivo cuando $x > 0$

$$\int_{1000}^{1500} C'(x)\,dx = \int_{1000}^{1500} (23.5 - 0.01x)\,dx$$

$$= \left[23.5x - 0.01\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{1000}^{1500}$$

$$= 23.5(1500) - 0.005(1500^2)$$

$$- [23.5(1000) - 0.005(1000^2)]$$

$$= 35{,}250 - 11{,}250 - (23{,}500 - 5000) = 5500$$

El incremento en el costo es por consiguiente de \$5500 ☛ **5**

☛ **5.** La función de ingreso marginal es $(25 - 3x)$. ¿Cuál será el cambio en el ingreso, si el nivel de ventas se aumenta de $x = 2$ a $x = 4$?

Los teoremas 2 y 3 nos dan algunas propiedades sencillas de las integrales definidas.

TEOREMA 2 Si $f(t)$ es continua en $a \leq t \leq x$, se sigue que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(t)$ una antiderivada de $f(t)$; entonces, por la definición de integral definida,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

Ésta es una función de x y puede derivarse con respecto a x. Así,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x)$$

Pero puesto que $F(t)$ es una antiderivada de $f(t)$, $F'(t) = f(t)$,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

EJEMPLO 6 Evalúe $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right]$

Solución Por el teorema 2, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right] = xe^x$$

Sería más tardado evaluar en primer término la integral, pero por supuesto la respuesta es la misma:

$$\int_1^x te^t\,dt = \Big[(t-1)e^t\Big]_1^x = (x-1)e^x \qquad \text{(usando la fórmula 69 del apéndice II)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x te^t\,dt\right] = \frac{d}{dx}[(x-1)e^x] = (x-1)e^x + 1 \cdot e^x = xe^x$$

Respuesta $\int_2^4 (25 - 3x)\,dx = 32$

EJEMPLO 7 Realice las siguientes operaciones:

$$a)\ \frac{d}{dx}\left[\int_0^1 x^3e^{\sqrt{x}}\,dx\right] \qquad b)\ \int_0^1 \frac{d}{dx}\,(x^3e^{\sqrt{x}})\,dx$$

Solución

a) En este caso, es importante observar que la integral definida $\int_0^1 x^3e^{\sqrt{x}}\,dx$ tiene un valor constante que no depende de x. En consecuencia,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^1 x^3e^{\sqrt{x}}\,dx\right] = 0$$

b) Por la definición de antiderivada, si $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Así,

$$\int \frac{d}{dx}(x^3e^{\sqrt{x}})\,dx = x^3e^{\sqrt{x}} + C$$

de modo que, omitiendo C,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\,(x^3e^{\sqrt{x}})\,dx = \left[x^3e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 1^3e^{\sqrt{1}} - 0\cdot e^{\sqrt{0}} = e$$

Observación Vale la pena notar la diferencia entre las partes *a*) y *b*) del ejemplo 7. Las posiciones del signo de integral y del operador de diferenciación d/dx están invertidos. ☛ **6**

☛ **6.** Evalúe

a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}\,(\ln(3+1))\,dx$

b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(t^3+1)\,dt$

c) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(t^3+1)\,dt$

TEOREMA 3

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ en donde c es cualquier número real

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$. Entonces, por la definición de integral definida, tenemos lo siguiente:

a) $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

b) Tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Respuesta *a*) ln 2 *b*) 0 *c*) $\ln(x^3+1)$

y asimismo

$$\int_b^a f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_b^a = F(a) - F(b)$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

c) La demostración de esta parte se deja como ejercicio.

EJEMPLO 8

a) $\int_2^2 x^3 e^{\sqrt{x}}\, dx = 0$

b) $\int_0^2 x^2\, dx = \int_0^3 x^2\, dx + \int_3^2 x^2\, dx$ por el teorema 3(c)

$= \int_0^3 x^2\, dx - \int_2^3 x^2\, dx$ por el teorema 3(b)

(De la misma forma, puede verificar esto por medio de la evaluación de las tres integrales). ☛ **7**

☛ **7.** *a*) Dado que $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 3$ y $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = 1$, evalúe $\int_3^2 f(x)\, dx$

b) Evalúe $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\, dt$

Respuesta *a*) 2 *b*) $-f(x)$

Concluimos esta sección dando una demostración del teorema fundamental del cálculo. La demostración que daremos carecerá de rigor, dado que no dimos una definición matemática propia del área bajo una curva. Sin embargo, la demostración será convincente, y podemos asegurar a los lectores más escépticos que existe una demostración rigurosa.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Empezamos probando el teorema en el caso particular en que $f(x)$ sea una función *creciente* no negativa en $a \le x \le b$, si bien es fácil extender la demostración a todas las funciones continuas.

Cuando $f(x) \ge 0$, buscamos una expresión para A, el área total bajo la curva $y = f(x)$. Definamos la función de área $A(x)$, que representa el área bajo la curva $y = f(x)$ desde el valor a hasta el valor x de la abscisa, en donde x es cualquier número tal que $a \le x \le b$.

$A(x)$ es el área sombreada de la figura 3. Así, $A(a) = 0$, porque es obvio que el área se reduce a cero cuando x tiende a a. Más aún, $A(b)$ es sin duda el área bajo la curva entre a y b, esto es, la cantidad A que requerimos es tal que $A(b) = A$.

Si x se cambia a $x + \Delta x$ ($\Delta x > 0$), el área $A(x)$ también se aumenta a $A(x) + \Delta A$, que es el área bajo la curva entre los valores a y $x + \Delta x$ de la abscisa. (Véase la figura 4). Es razonable esperar que ΔA sea igual al área que aparece sombreada en esta figura. (No podemos probar esto en forma estricta aquí, dado que no ofrecimos una definición rigurosa de área).

El área ΔA es mayor que el área del rectángulo inscrito con altura $f(x)$ y ancho Δx; ΔA es menor que el área del rectángulo circunscrito con altura $f(x + \Delta x)$

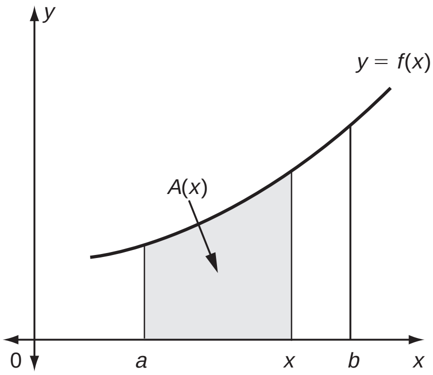


FIGURA 3

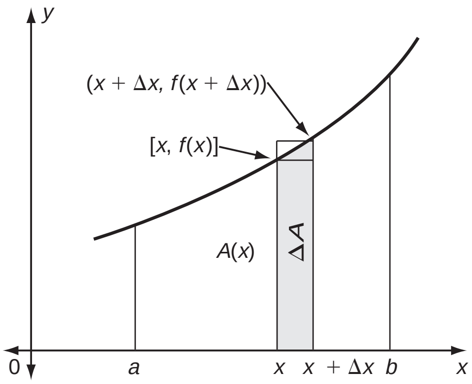


FIGURA 4

y ancho Δx. Por tanto,

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta A < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Dividiendo toda la expresión anterior entre Δx, obtenemos

$$f(x) < \frac{\Delta A}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

Puesto que $f(x)$ es continua, $f(x + \Delta x) \to f(x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Después de tomar límites en las desigualdades anteriores cuándo $\Delta x \to 0$, se sigue que $\Delta A/\Delta x$ tiene un límite, y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x) \qquad \text{o bien} \qquad A'(x) = f(x)$$

Debido a que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, se sigue que $F'(x) = f(x)$. En consecuencia, tanto $F(x)$ como $A(x)$ son antiderivadas de $f(x)$ y por ello sólo pueden diferir a lo más en una constante; esto es,

$$A(x) = F(x) + C \tag{1}$$

en donde C es alguna constante.

Haciendo $x = a$ y recordando que $A(a) = 0$, tenemos

$$A(a) = F(a) + C = 0$$

de modo que $C = -F(a)$. Reemplazando C por $-F(a)$ en la ecuación (1) anterior, obtenemos

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Por último, haciendo $x = b$ en la igualdad anterior, resulta que

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

Pero $A(b) = A$, o sea el área total requerida bajo la curva, y hemos probado que

$$A = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

(por la definición de integral definida).

EJERCICIOS 6-1

(1-26) Evalúe las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^1 x^2\, dx$

2. $\int_{-1}^3 x^3\, dx$

3. $\int_{-1}^1 t^5\, dt$

4. $\int_0^1 x^{3/2}\, dx$

5. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\, dx$

6. $\int_0^5 (u^2 + u + 1)\, du$

7. $\int_1^2 (3x^2 - 5x + 7)\, dx$

8. $\int_0^3 (x + 1)(2x - 3)\, dx$

9. $\int_1^2 \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x}\, dx$

10. $\int_1^3 \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

11. $\int_0^1 t^4 \ln (e^t)\, dt$

12. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}\, dx}$

13. $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

14. $\int_0^1 x\, e^{x^2} dx$

15. $\int_1^0 (e^x + e^{-x})\, dx$

16. $\int_0^1 \frac{e^{5x} + e^{6x}}{e^{3x}}\, dx$

17. $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}\, dt$

18. $\int_1^e \frac{1}{y(1 + \ln y)}\, dy$

19. $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

20. $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

21. $\int_2^2 (x + 1)(x^2 + 2x + 7)^5\, dx$

22. $\int_3^3 (e^x - \sqrt{\ln x})\, dx$

23. $\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\frac{e^t + 2t - 1}{3 + \ln (1 + t)}\right] dt$

24. $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{2x} + e^x + 1}\right) dx$

25. $\int_1^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{1 + e^x}\right) dx$

26. $\int_2^2 \frac{d}{du}\left(\frac{\ln u}{u + 7}\right) du$

(27-40) Calcule las áreas bajo las gráficas de las siguientes funciones entre los valores de x dados.

27. $y = 3x + 2$, $x = 1$ y $x = 3$

28. $y = 5x^2$, $x = 0$ y $x = 2$

29. $y = 4 - x^2$, $x = 0$ y $x = 2$

30. $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x = 1$ y $x = 4$

31. $y = x^3$, $x = 0$ y $x = 3$

32. $y = 1 + x^3$, $x = 0$ y $x = 2$

33. $y = 2 + x - x^2$, $x = -1$ y $x = 2$

34. $y = x^3 - x$, $x = -1$ y $x = 0$

35. $y = \frac{1}{x + 1}$, $x = 0$ y $x = 1$

36. $y = \frac{2x}{x^2 + 4}$, $x = 1$ y $x = 3$

37. $y = xe^x$, $x = 0$ y $x = 1$

38. $y = xe^{x^2}$, $x = 0$ y $x = 1$

39. $y = \ln x$, $x = 1$ y $x = e$

40. $y = \frac{\ln x}{x}$, $x = 1$ y $x = e^2$

(41-46) Realice las siguientes operaciones.

41. $\frac{d}{dx}\left(\int_2^x \frac{e^t \ln t}{1 + t^2}\, dt\right)$

42. $\frac{d}{du}\left(\int_u^3 [e^x(\ln x)^4]\, dx\right)$

43. $\frac{d}{dx}\left(\int_1^2 \frac{e^t \ln (t^2 + 1)}{1 + t^3}\, dt\right)$

44. $\frac{d}{dt}\left(\int_2^5 \frac{e^{x^2}}{x + 1}\, dx\right)$

45. $\int_1^2 \frac{d}{dx}\, (x^2 e^{\sqrt{x}} \ln x)\, dx$

46. $\int_e^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right) dx$

47. *(Cambio en el ingreso)* La función de ingreso marginal de una empresa está dada por $R'(x) = 12.5 - 0.02x$. Determine el incremento en el ingreso total de la empresa cuando el nivel de ventas se incrementa de 100 a 200 unidades.

48. *(Incremento en las utilidades)* El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x) = 15.7 - 0.002x$, mientras que su ingreso marginal es $R'(x) = 22 - 0.004x$. Determine el incremento en las utilidades de la empresa si las ventas se incrementan de 500 a 600 unidades.

49. *(Cambio en el ingreso)* En el ejercicio 47, el nivel de ventas primero decrece de 100 a 80 unidades y luego se incrementa a 150 unidades. Determine el incremento global en el ingreso total.

50. *(Cambio en las utilidades)* En el ejercicio 48, determine el cambio en las utilidades si las ventas decrecen de 500 a 400 unidades.

51. *(Reparación de un automóvil)* Si el costo promedio de reparación de un automóvil con t años de antigüedad es $10(6 + t + 0.6t^2)$ dólares por año, calcule el costo total de reparación durante los primeros 2 años y durante el periodo entre $t = 4$ y $t = 6$.

■ 6-2 MÁS SOBRE ÁREAS

En la sección 6-1, se estableció que el área bajo la curva $y = f(x)$ acotada por las líneas $x = a$, $x = b$ y $y = 0$ (el eje x) está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ en el caso en que $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$.

Consideremos ahora el caso correspondiente a la región acotada por la curva $y = f(x)$, las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x cuando $f(x) \leq 0$ si $a \leq x \leq b$. Es claro que el área en cuestión está situada por completo por debajo del eje x, como se advierte en la figura 5.

Definamos $g(x) = -f(x)$ de modo que $g(x) \geq 0$ si $a \leq x \leq b$. El área acotada por $y = g(x)$ (o $y = -f(x)$), las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x se encuentra por arriba del eje x. (Véase figura 6). Esta área, como en la última sección, está dada por la integral definida $\int_a^b g(x)\, dx$. Ahora

$$\int_a^b g(x)\, dx = G(b) - G(a)$$

en donde $G(x)$ es la antiderivada de $g(x)$. Pero ya que $g(x) = -f(x)$, debe seguirse que $F(x) = -G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Así que, $G(b) - G(a) = -F(b) +$

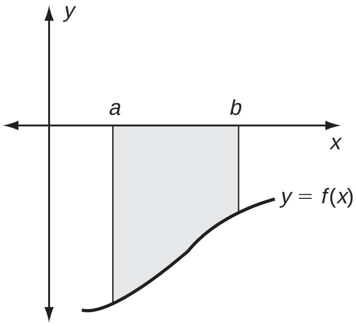


FIGURA 5

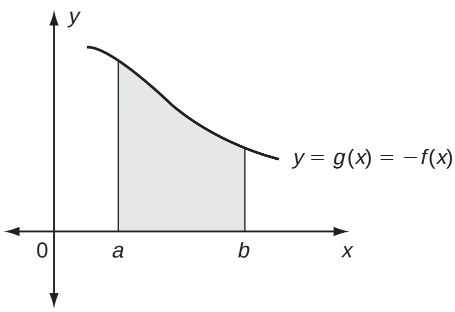


FIGURA 6

$F(a)$, o bien,

$$\int_a^b g(x)\,dx = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Comparando las figuras 5 y 6, es claro que las dos regiones sombreadas tienen áreas de igual magnitud, dado que una región puede obtenerse reflejando la otra con respecto al eje x. En consecuencia, el área situada por debajo del eje x, acotada por la curva $y = f(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área acotada por $y = x^2 - 9$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x.

Solución La gráfica de $y = x^2 - 9$ está debajo del eje x si $0 \le x \le 2$. El área requerida (que aparece sombreada en la figura 7) está dada por

$$\begin{aligned} -\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx &= \int_0^2 (9 - x^2)\,dx \\ &= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \left(9(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(0) - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Consideremos ahora el área de la región acotada por la curva $y = f(x)$ y las líneas $x = a$, $x = b$ y el eje x en el caso que $f(x)$ es algunas y otras veces negativa en el intervalo $a \le x \le b$. (Véase la figura 8). Tal región tiene partes por debajo del eje x y otras por encima del eje x. Supondremos que podemos determinar los pun-

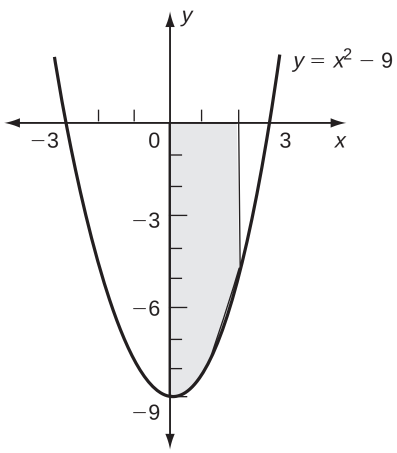


FIGURA 7

tos en que la gráfica $y = f(x)$ cruza al eje x, esto es, los valores de x en que $f(x) = 0$. En la figura 8, ilustramos el caso en que hay dos de tales puntos, denotados por $x = p$ y $x = q$. En este caso,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad a \leq x \leq p$$
$$f(x) \leq 0 \quad \text{para} \quad p \leq x \leq q$$

y asimismo

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad q \leq x \leq b$$

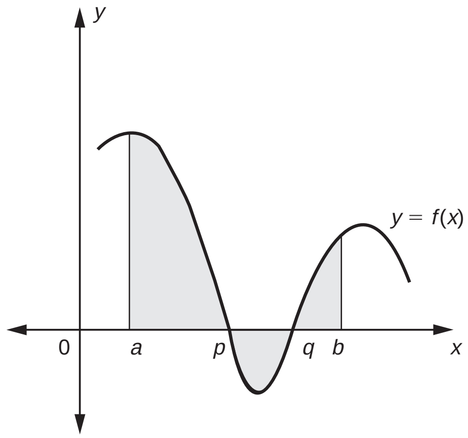


FIGURA 8

En un problema de este tipo, calculamos el área en cada subintervalo por separado; el área requerida es, entonces, la suma de todas estas áreas. En la figura 8, las áreas entre $x = a$ y $x = p$ y entre $x = q$ y $x = b$ están por encima del eje x, mientras que el área entre $x = p$ y $x = q$ está por debajo del eje x. Por consiguiente, el área requerida es igual a

$$\int_a^p f(x)\,dx + \left[-\int_p^q f(x)\,dx\right] + \int_q^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 2 Determine el área acotada por el eje x, la curva $y = x^2 - 9$, y las líneas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución La gráfica de $y = x^2 - 9$ aparece en la figura 7. Si $0 \leq x < 3$, está por debajo del eje x; mientras que si $3 < x < 4$, está por encima. Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_0^3 -(x^2 - 9)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 9)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^4$$

☛ **8.** Determine el área entre el eje x y la gráfica de $y = 4 - x^2$ para
a) $2 \le x \le 3$
b) $-2 \le x \le 4$

$$= (-\frac{3^3}{3} + 9 \cdot 3) - \left(-\frac{0^3}{3} + 9 \cdot 0\right) + \left(\frac{4^3}{3} - 9 \cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3\right)$$

$$= 18 - 0 + (-\tfrac{44}{3}) - (-18) = \tfrac{64}{3} \text{ unidades cuadradas} \quad ☛ \ \mathbf{8}$$

Área de regiones entre curvas

Consideremos ahora el área acotada entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$. En primer lugar, supondremos que $f(x) > g(x) \ge 0$ en $a \le x \le b$ de modo que ambas curvas están arriba del eje x y la curva $y = f(x)$ está por encima de la curva $y = g(x)$. El área considerada aparece en la figura 9. Es claro que esta área es la diferencia entre el área de la región acotada por $y = f(x)$, y el eje x y el área de la región acotada por $y = g(x)$ y el eje x; esto es, el área de la región *CDEF* entre las dos curvas es igual al área de *ABEF* menos el área de *ABDC*.

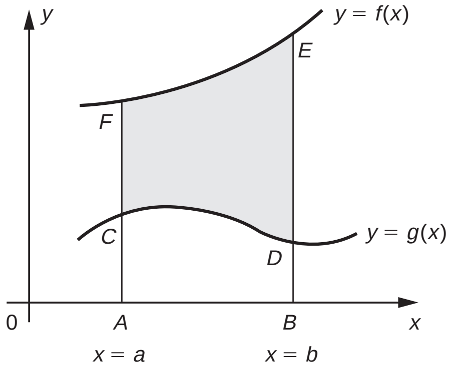


FIGURA 9

Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Note que en el integrando $[f(x) - g(x)]$, el primer término está relacionado con la curva superior y el segundo término $g(x)$ con la curva inferior. Una manera conveniente de recordar esta fórmula es, por consiguiente,

$$\boxed{\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx}$$

Esta forma también puede usarse a fin de calcular el área entre dos curvas cuando una o ambas están por debajo del eje x y, asimismo, si las dos curvas se cruzan entre sí.

Respuesta *a*) $\frac{7}{3}$ *b*) $\frac{64}{3}$

EJEMPLO 3 Determine el área entre las curvas $y = x^2 + 5$ y $y = x^3$ y las líneas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución La gráfica de $y = x^2 + 5$ está por encima de la curva $y = x^3$ el intervalo $1 \leq x \leq 2$. Así que el área requerida (que aparece sombreada en la figura 10) está dada por

$$A = \int_1^2 (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx = \int_1^2 (x^2 + 5) - x^3]\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 5x - \frac{x^4}{4}\right] = (\tfrac{8}{3} + 10 - 4) - (\tfrac{1}{3} + 5 - \tfrac{1}{4}) = 3\tfrac{7}{12}$$

o $3\frac{7}{12}$ unidades cuadradas ☛ ***9***

☛ ***9.*** Evalúe el área entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x$ para
a) $0 \leq x \leq 1$
b) $1 \leq x \leq 2$

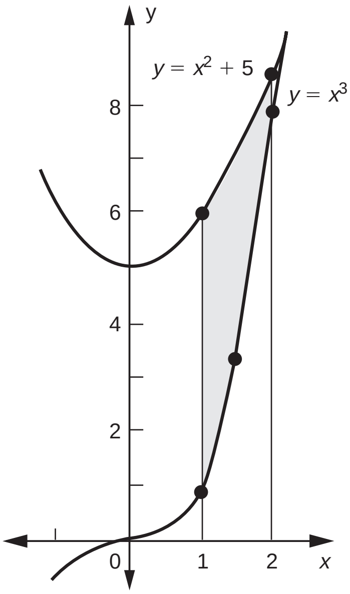


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Determine el área de la región encerrada por las curvas $y = -x^2$ y $y = x^2 - 8$.

Solución En este caso no se dan los límites de integración. La primera etapa es bosquejar las gráficas de las dos curvas para determinar el área requerida que encierran además de los límites de integración. En la figura 11 aparecen las gráficas de las dos curvas, en la cual se ha sombreado la región en cuestión.

Con el objetivo de encontrar los puntos de intersección de las curvas, debemos manejar las ecuaciones de las curvas como ecuaciones simultáneas y resolverlas para x y y. En este ejemplo particular, al igualar las dos expresiones de y resulta:

$$-x^2 = x^2 - 8 \quad \text{o} \quad 2x^2 - 8 = 0$$

Respuesta *a*) $\frac{1}{6}$ *b*) $\frac{5}{6}$

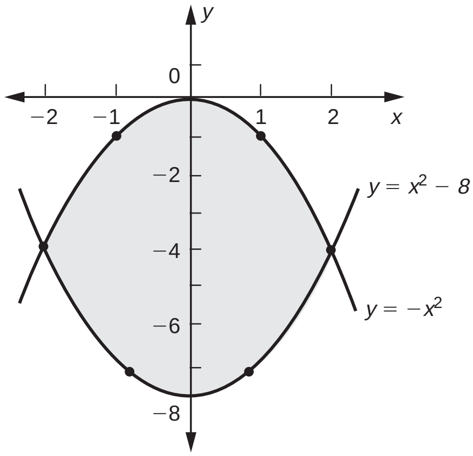


FIGURA 11

En consecuencia, $x = \pm 2$. En la región que aparece en la figura 11, x varía entonces entre -2 y $+2$. Por consiguiente,

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\, dx$$

Esta fórmula conocida aún se aplica, aunque ambas gráficas estén por debajo del eje x. La manera más fácil de ver esto es añadir una constante suficientemente grande a las y, con la finalidad de mover ambas gráficas por encima del eje x (para este caso, bastará sumar 8). Cuando formamos la diferencia entre y_{superior} y y_{inferior}, esta constante que se suma desaparecerá. En este caso, la curva superior es $y = -x^2$, de modo que

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-2}^{2} [(-x^2) - (x^2 - 8)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx = \left[8x - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= (16 - \tfrac{16}{3}) - (-16 + \tfrac{16}{3}) = \tfrac{64}{3} \text{ unidades cuadradas}\end{aligned}$$ ☛ **10**

☛ **10.** Determine el área encerrada entre $y = 3 - x^2$ y $y = x^2 - 5$

EJEMPLO 5 Determine el área acotada por las curvas $y = 1/x$ y $y = x^2$ entre $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$.

Solución Las curvas $y = 1/x$ y $y = x^2$ se intersectan si $1/x = x^2$ o $x^3 = 1$; esto es, cuando $x = 1$. (Véase la figura 12). En este caso, dividimos el problema en dos partes, debido a que si $\frac{1}{2} < x < 1$, $y_{\text{superior}} = 1/x$, pero cuando $1 < x < 2$, $y_{\text{superior}} = x^2$.

Así que el área requerida está dada por

$$A = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$$

Respuesta $\frac{64}{3}$

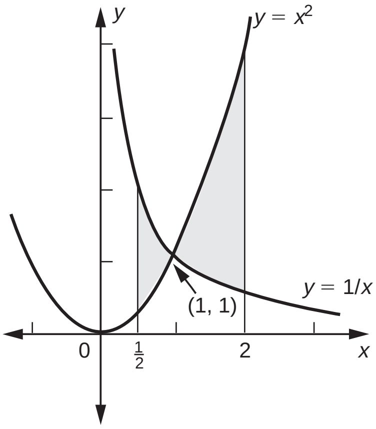


FIGURA 12

☛ **11.** Determine el área encerrada entre $y = x^2 + x + 1$ y $y = x^3 + x^2 + 1$
[*Sugerencia*: Encuentre los intervalos en los que $y_1 - y_2 = x - x^3$ es positiva y en los que es negativa].

$$= \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{49}{24} \text{ unidades cuadradas} \quad ☛ \textbf{11}$$

Concluimos esta sección dando la expresión para el área acotada por la curva $x = g(y)$, el eje y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$. Esta área (cuya región aparece sombreada en la figura 13) está dada por

$$\int_c^d g(y)\, dy$$

en donde $d \geq c \geq 0$. Podemos advertir esto si dibujamos de nuevo la figura con el eje y horizontal y el eje x vertical, como se aprecia en la figura 14. Así, el área en cuestión se convierte en el área entre la curva y el eje horizontal, y está dada por la integral definida. Sólo se han intercambiado las variables x y y.

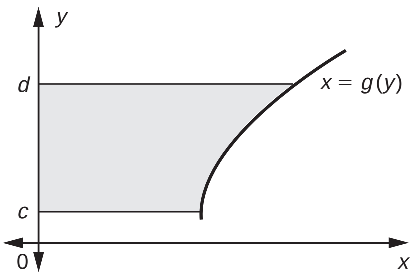


FIGURA 13

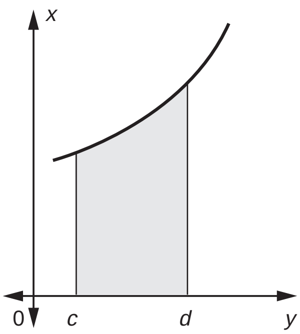


FIGURA 14

Respuesta
Área $= \int_0^1 (x - x^3)\, dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 6 Encuentre el área acotada por la parábola $y^2 = 4x$, el eje y y las líneas horizontales $y = 1$ y $y = 3$.

☛ **12.** Haga un bosquejo del área encerrada entre las gráficas de $x = y^2$ y $x = y + 2$. Exprésela como una integral con respecto a y y luego evalúela.

Solución El área requerida se observa en la figura 15. Aquí $x = y^2/4$, de modo que $g(y) = y^2/4$. En consecuencia, el área que se busca es

$$\int_1^3 \frac{y^2}{4}\, dy = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{3} = \frac{1}{12}(3^3 - 1^3) = \frac{13}{6} \text{ unidades cuadradas} \quad ☛\ \mathbf{12}$$

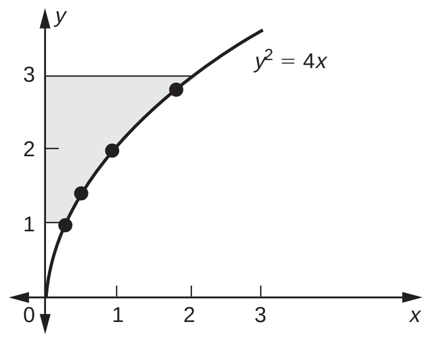


FIGURA 15

Integrales impropias

Algunas veces necesitamos evaluar integrales en las cuales el intervalo de integración se extiende a $+\infty$ o a $-\infty$ o ambos. Estas integrales están definidas como sigue:

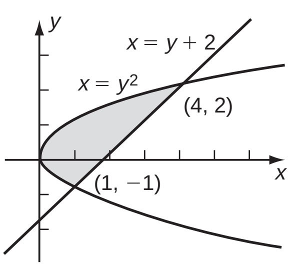
$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

suponiendo que el límite pertinente exista. Dichas integrales son **integrales impropias**.* Una aplicación importante sobre estas integrales es en la teoría de la probabilidad. (Véase la sección 6-8).

Respuesta



Área $= \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2}$

* Hay otro tipo de integrales impropias, en las cuales el integrando no está acotado en algún punto. Por ejemplo, definimos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to0+} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a\to0+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

☛ **13.** Evalúe las integrales impropias siguientes, si existen:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ *b*) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x^3}\, dx$

c) $\int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx \quad (k > 0)$

EJEMPLO 7 Evalúe las siguientes integrales siempre y cuando existan.

$$a)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad b)\ \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx \qquad c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Soluciones

$$a)\ \int_1^{\infty} x^{-2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [1 - b^{-1}] = 1 - 0 = 1$$

$$b)\ \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [1 - e^a] = 1 - 0 = 1$$

$$c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Hacemos la sustitución $x^2 + 1 = u$. Entonces, $2x\, dx = du$ y

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{2u}\, du = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

(ignorando la constante de integración). Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}\ln(a^2+1)\right]$$

Ahora cuando $b \to \infty$, el primer término de la derecha se vuelve infinitamente grande, por lo cual el límite no existe. Por tanto, la integral impropia en esta parte no existe. (Nótese que **no debemos** hacer $a = -b$ y simplemente hacer $b \to \infty$. Debemos hacer $a \to -\infty$ como un límite distinto y separado de $b \to \infty$). ☛ **13**

Respuesta *a*) No existe *b*) $-\frac{1}{8}$ *c*) $\frac{1}{k}$

EJERCICIOS 6-2

(1-8) En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el área de la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.

1. $y = -x^2;\quad x = 0, x = 3$

2. $y = 1 - \sqrt{x};\quad x = 1, x = 9$

3. $y = -e^x;\quad x = \ln 2, x = \ln 5$

4. $y = x^3;\quad x = -1, x = 1$

5. $y = x^2 - 4;\quad x = 0, x = 3$

6. $y = x^2 - 3x + 2;\quad x = 0, x = 3$

7. $y = 1 - x^2;\quad x = 0, x = 2$

8. $y = 2x - 1;\quad x = 0, x = 1$

(9-14) Encuentre el área entre los siguientes pares de curvas y entre las líneas verticales dadas.

9. $y = x^2, y = 3x;\quad x = 1, x = 2$

10. $y = x^2, y = 2x - 1; x = 0, x = 2$

11. $y = \sqrt{x}, y = x^2; x = 0, x = 1$

12. $y = x^2, y = x^3;\quad x = 0, x = 2$

13. $y = e^x, y = x^2; \quad x = 0, x = 1$

14. $y = x^3, y = 3x - 2; \quad x = 0, x = 2$

(15-18) Determine el área de la región encerrada entre los siguientes pares de curvas.

15. $y = x^2, y = 2 - x^2$

16. $y = x^2, y = \sqrt{x}$

17. $y = x^3, y = x^2$

18. $y = x^2, y = 2x$

(19-20) Encuentre el área acotada por las siguientes curvas y las líneas.

19. $y = x^2, y = 0, y = 4$ y $x = 0$ (eje y)

20. $y^2 = x, y = 0, y = 2$ y $x = 0$

(21-30) Determine las siguientes integrales impropias, si existen.

21. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

22. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$

23. $\int_{-\infty}^{0} (2-x)^{-3/2}\, dx$

24. $\int_{-1}^{\infty} (2x+3)^{-4}\, dx$

25. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$

26. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$

27. $\int_{-\infty}^{2} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}\, dx$

28. $\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$

29. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$

30. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}\, dx$

■ 6-3 APLICACIONES EN LA ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA

Coeficientes de desigualdad para distribuciones de ingreso

Sea y la proporción del ingreso total de cierta población que se recibe por la proporción x de captadores de ingresos cuyo ingreso es mínimo. Por ejemplo, suponga que cuando $x = \frac{1}{2}$ entonces $y = \frac{1}{4}$. Esto significaría que al 50% de la población que recibe el ingreso más bajo corresponde el 25% del ingreso total. O si $y = 0.7$ cuando $x = 0.9$, entonces el 90% de la población con los ingresos más bajos recibiría el 70% del ingreso total. En general, dado que x y y son fracciones de un todo, están entre 0 y 1 incluso ($0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$) y y es una función de x, esto es, $y = f(x)$.

Supondremos que no hay personas que reciban un ingreso cero, de modo que $f(0) = 0$. Más aún, todo el ingreso es recibido por el 100% de los captadores de ingresos, y así $f(1) = 1$. La gráfica de la función $f(x)$ que describe la distribución de ingreso real se denomina una **curva de Lorentz**.

Suponga que una curva de Lorentz está dada por la ecuación $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$. (Véase la figura 16). Cuando $x = 0.2$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.2)^2 + \tfrac{1}{16}(0.2) = 0.05$$

Esto significa que el 20% de la gente con los ingresos más bajos sólo recibe el 5% del ingreso total. De manera similar, si $x = 0.5$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.5)^2 + \tfrac{1}{16}(0.5) = 0.2656$$

esto es, que el 50% de tal gente sólo recibe 26.56% del ingreso total.

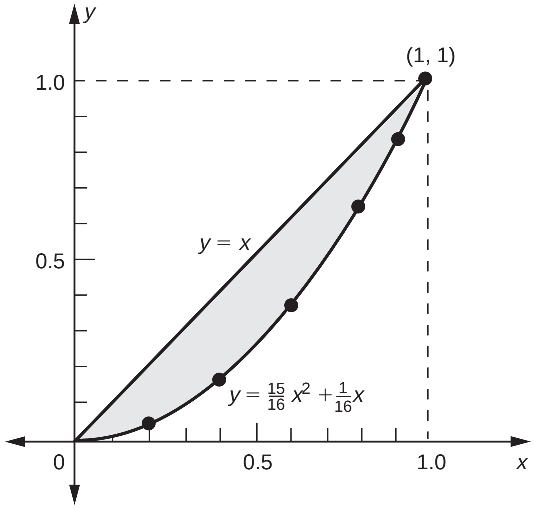


FIGURA 16

La equidad perfecta de la distribución del ingreso está representada por la línea $y = x$. Por ejemplo, de acuerdo con esto el 10% de la gente recibe el 10% del ingreso total, 20% de las personas reciben el 20% del ingreso total, etc. La desviación de la distribución de ingreso real de la equidad perfecta se mide por el grado en que la curva de Lorentz real se aparta de la línea recta $y = x$. Si la curva de Lorentz está cerca de la línea recta, el ingreso estará distribuido casi de manera uniforme, mientras que una gran desviación de la línea indica una considerable desigualdad en la distribución. Definimos el **coeficiente de desigualdad** de la curva de Lorentz como

$$L = \frac{\text{Área entre la curva y la línea } y = x}{\text{Área bajo la línea } y = x}$$

Ahora bien, el área bajo la línea $y = x$ es un triángulo rectángulo, de modo que está dada por

$$\tfrac{1}{2}(\text{base}) \times (\text{altura}) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

En consecuencia, el coeficiente de desigualdad de una curva de Lorentz está dado por

$$\boxed{\begin{aligned} L &= 2 \cdot \text{Área entre la curva de Lorentz y la línea } y = x \\ &= 2\int_0^1 [x - f(x)]\, dx \end{aligned}}$$

en donde $y = f(x)$ es la ecuación de la curva de Lorentz.

Por ejemplo, el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz dada por $y = f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$ es

$$L = 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x\right)\right] dx$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2\right) dx$$
$$= 2 \cdot \frac{15}{16}\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0\right) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{16}$$

☛ **14.** Calcule el coeficiente de la desigualdad para la curva de Lorentz dada por $y = ax^2 + (1 - a)x$, en donde a es una constante. Verifique el resultado en el ejemplo dado en el texto.

El coeficiente de desigualdad siempre está entre 0 y 1, como es evidente por su definición geométrica. Cuando el coeficiente es cero, el ingreso está distribuido de manera uniforme perfecta; cuanto más cerca esté de 1, mayor será la desigualdad en la distribución del ingreso. ☛ **14**

Curvas de aprendizaje

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar de antemano el número total de horas-hombre que requerirá con la finalidad producir un número determinado de unidades de su producto. Por ejemplo, esto se requiere para establecer el precio de venta, la fecha de entrega o la concertación de un contrato. Una herramienta que con frecuencia se utiliza para tal predicción se denomina *curva de aprendizaje.*

Se sabe que una persona tiende a requerir menos tiempo en la ejecución de una tarea particular si ya la ha realizado antes un número de veces. En otras palabras, cuanto más repita una persona una tarea, será más eficiente y empleará menos tiempo al realizarla de nuevo. Así, entre más unidades se produzcan en una serie de producción, el tiempo necesario para producir cada unidad irá descendiendo.

Sea $T = F(x)$ el tiempo (por ejemplo, en horas-hombre) necesario en la producción de las primeras x unidades. Un incremento Δx en la producción demanda un incremento ΔT en el tiempo, y la razón $\Delta T/\Delta x$ es el tiempo promedio por unidad adicional producida cuando el número de unidades producidas cambia de x a $x + \Delta x$. En el límite cuando $\Delta x \to 0$, esta razón se aproxima a la derivada $dT/dx = F'(x)$, que es el tiempo requerido por unidad adicional cuando ocurre un pequeño incremento en la producción. Al igual que las otras tasas marginales, esta cantidad es casi igual al tiempo requerido en la producción de la siguiente unidad; esto es, la unidad número $(x + 1)$.

Si hacemos $F'(x) = f(x)$, la función que por lo regular se utiliza en tal situación es de la forma

$$f(x) = ax^b$$

en donde a y b son constantes con $a > 0$ y $-1 \le b < 0$. La elección de ax^b con $-1 \le b < 0$ asegura que el tiempo requerido por unidad disminuye a medida que se producen más y más unidades. (Véase la figura 17). La gráfica de $f(x)$ se denomina una **curva de aprendizaje**. En la práctica, las constantes a y b se determinarían con base en series de producción preliminar o por experiencias con productos similares.

Respuesta $\frac{1}{3}a$. El ejemplo en el texto corresponde a $a = \frac{15}{16}$

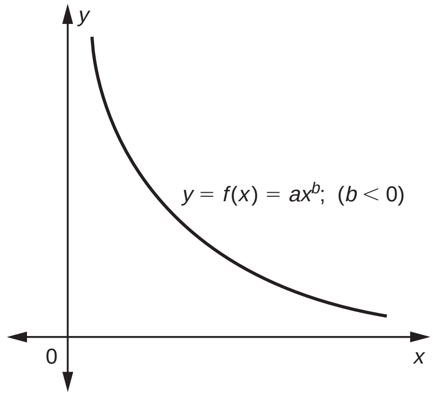


FIGURA 17

☛ **15.** Una curva de aprendizaje está dada por $f(x) = 1 + 3x^{-0.2}$. Calcule el número de horas de trabajo necesarias para producir las primeras 100 unidades y las segundas 100 unidades.

A condición de que el mejoramiento en la eficiencia o el aprendizaje sea lo bastante regular, la curva de aprendizaje (una vez que se ha establecido) puede utilizarse en la predicción del número total de horas-hombre requeridas en niveles de producción futuros. *El número total de horas-hombre ΔT requeridas para producir unidades numeradas $c + 1$ hasta d está dado por*

$$\Delta T = \text{(horas-trabajo para unidades producidas } d)$$
$$-\text{(horas-trabajo para producir las primeras } c \text{ de ellas}$$
$$= F(d) - F(c)$$

Esto es,

$$\boxed{\Delta T = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d ax^b\,dx}$$

EJEMPLO 1 Después de producir 1000 televisores, una empresa determina que su planta de ensamblado está siguiendo una curva de aprendizaje de la forma

$$f(x) = 20x^{-0.152}$$

en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridos con el propósito de ensamblar el televisor número $(x + 1)$. Estime el número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales.

Solución El número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales después de los primeros 1000 está dado por

$$\Delta T = \int_{1000}^{5000} f(x)\,dx = \int_{1000}^{5000} 20x^{-0.152}\,dx = \left[20 \cdot \frac{x^{-0.152+1}}{-0.152 + 1}\right]_{1000}^{5000}$$
$$= \frac{20}{0.848}[(5000)^{0.848} - (1000)^{0.848}] = 23.59(1370 - 350)$$
$$= 24{,}060 \quad ☛ \ \mathbf{15}$$

Respuesta 249.3 y 210.6

Maximización de la utilidad con respecto al tiempo

Existen ciertas empresas como la explotación de minas y la perforación de pozos petroleros que se tornan no rentables después de cierto periodo. En tales operaciones, la tasa de ingreso $R'(t)$ (digamos dólares por mes) puede ser muy alta al inicio de la operación, aunque puede decrecer a medida que transcurre el tiempo debido al agotamiento del recurso. Esto es, $R'(t)$ a la larga se convierte en una función decreciente con respecto al tiempo. Por otra parte, la tasa de costo $C'(t)$ de operación es pequeña en un principio pero con frecuencia se incrementa a medida que el tiempo transcurre por el incremento en el mantenimiento, costo de extracción más altos y muchos otros factores. Por ello, la tasa de costo $C'(t)$ a menudo es una función creciente con respecto al tiempo. En tales operaciones existe un instante en que el costo de mantener la operación se hace más alto que el ingreso y la empresa empieza a perder dinero. El administrador de tal operación afronta el problema de seleccionar un instante para cerrar la empresa que resultaría en la utilidad máxima obtenida.

Denotemos con $C(t)$, $R(t)$ y $P(t)$ el costo total, el ingreso total y la utilidad total hasta el instante t (medidas desde el inicio de la operación), respectivamente. Se sigue que

$$P(t) = R(t) - C(t) \qquad \text{y asimismo} \qquad P'(t) = R'(t) - C'(t)$$

La utilidad máxima total ocurre cuando

$$P'(t) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad R'(t) = C'(t)$$

En otras palabras, la operación debería realizarse hasta el instante t_1, en que $R'(t_1) = C'(t_1)$, esto es, hasta el instante en que la tasa de ingreso y la tasa de costo sean iguales. (Véase la figura 18).

La utilidad total en el instante t_1 está dada por

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} P'(t)\,dt = \int_0^{t_1} [R'(t) - C'(t)]\,dt$$

Ésta es la máxima utilidad que puede obtenerse y sin duda puede interpretarse como el área de la región acotada por las gráficas de $R'(t)$ y $C'(t)$ situada entre $t = 0$ y $t = t_1$.

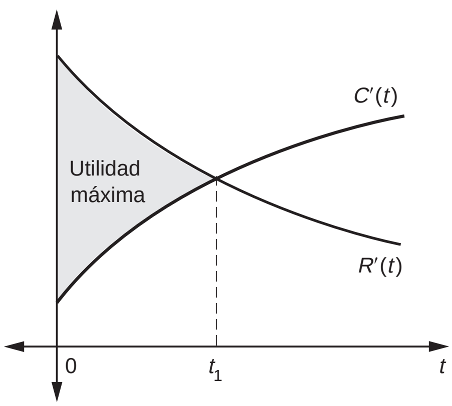


FIGURA 18

Observación Puesto que $t = 0$ es el instante en que la operación inicia la producción, el ingreso total $R(0)$ en este instante es cero. En el análisis anterior, habíamos supuesto también que el costo total $C(0)$ era cero. En general, esto no puede ser cierto, debido a los costos fijos (esto es, costos de apertura) que deben realizarse antes de que la producción se inicie. Así que, en la práctica, debemos restar estos costos fijos de la expresión anterior de $P(t_1)$ a fin de obtener la utilidad máxima real.

EJEMPLO 2 Las tasas de costo e ingreso de cierta operación minera están dados por

$$C'(t) = 5 + 2t^{2/3} \qquad \text{y} \qquad R'(t) = 17 - t^{2/3}$$

en donde C y R se miden en millones de dólares y t en años. Determine qué tanto deberá prolongarse la operación y encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución El instante óptimo t_1 que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que las dos tasas (de costo y de ingreso) son iguales. Es decir,

$$\begin{aligned} C'(t) &= R'(t) \\ 5 + 2t^{2/3} &= 17 - t^{2/3} \\ 3t^{2/3} &= 17 - 5 = 12 \\ t^{2/3} &= 4 \\ t &= 4^{3/2} = 8 \end{aligned}$$

En consecuencia, la operación deberá mantenerse por $t_1 = 8$ años. La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por

$$\begin{aligned} P &= \int_0^8 [R'(t) - C'(t)]\, dt \\ &= \int_0^8 [17 - t^{2/3} - (5 + 2t^{2/3})]\, dt \\ &= \int_0^8 (12 - 3t^{2/3})\, dt = \left[12t - 3\,\frac{t^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 \\ &= 96 - \tfrac{9}{5}(32) = 38.2 \text{ (millones de dólares)} \end{aligned}$$

Valor presente de un ingreso continuo

En los ejemplos como el que acabamos de dar, donde un ingreso está repartido a lo largo de un número de años futuros, a veces es útil calcular el valor presente de este ingreso. Esto puede ser particularmente valioso cuando una compañía tiene que elegir entre tasas alternativas para explotar sus recursos.

Como en estos casos el ingreso se obtiene continuamente sobre un periodo, es necesario utilizar descuentos continuos para calcular el valor presente. De acuerdo

con este método, el valor presente de un ingreso I obtenido t años futuros es Ie^{-rt}, donde $r = R/100$ y R es la tasa de interés nominal. Si $f(t)$ es la tasa de utilidad en el tiempo t, entonces, el valor presente de la utilidad total obtenida entre $t = 0$ y $t = T$ está dada por

$$\text{Valor presente} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \tag{1}$$

☛ **16.** ¿Cuál es el valor presente de un centavo por minuto recibido de manera continua durante el periodo de los siguientes 5 años?
Suponga una tasa de interés anual de 6%

Otra aplicación de esta idea es el caso de una anualidad que se paga sobre un periodo desde $t = 0$ hasta $t = T$. Si la anualidad se paga frecuentemente, podemos verla al menos aproximadamente como si se pagara de manera continua. El valor presente (o sea, el valor en $t = 0$) de la anualidad está dado por la ecuación (1), donde $f(t)$ es la tasa de la anualidad (en dólares por año). ☛ **16**

Respuesta
$$\text{V.P.} = \int_0^5 (60 \cdot 24 \cdot 365)e^{-0.06t}\,dt$$
$= 2{,}270{,}432$ centavos
$= \$22{,}704.32$

EJEMPLO 3 ***(Estrategia de desarrollo de recursos)*** Una compañía minera debe decidir entre dos estrategias para explotar sus recursos. Invirtiendo \$10 millones en maquinaria será capaz de producir una utilidad neta de \$3 millones anuales de manera que el recurso durará 10 años. Alternativamente, la compañía puede invertir \$15 millones en una maquinaria mejor para obtener una utilidad neta de \$5 millones al año por un periodo de 7 años. Suponiendo una tasa de descuento nominal de 10%, ¿cuál estrategia deberá utilizar la compañía?

Solución La primera estrategia tiene una razón de utilidad de $f(t) = 3$, así que su valor presente es ($r = 0.1$, $T = 10$)

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{10} 3e^{-0.1t}\,dt - 10 \\ &= \Big[-30e^{-0.1t}\Big]_0^{10} - 10 \\ &= 30(1 - e^{-1}) - 10 = \$8.964 \text{ millones.} \end{aligned}$$

☛ **17.** Una persona estima que su ingreso anual t años a partir de hoy será de $(60 + 2t)$ miles de dólares. Calcule el valor presente de este ingreso en los siguientes 20 años, suponiendo que el ingreso se recibe de manera continua y utilizando una tasa de interés anual de 8%.

(Nótese que la inversión inicial de \$10 millones se debe restar del valor presente de la utilidad). Similarmente, el valor presente de la segunda estrategia es

$$P_2 = \int_0^7 5e^{-0.1t}\,dt - 15 = 50(1 - e^{-0.7}) - 15 = \$10.171 \text{ millones}$$

La segunda estrategia es mejor que la primera, por aproximadamente \$1.2 millones. ☛ **17**

Superávit del consumidor y del productor

Sea $p = f(x)$ la curva de demanda de cierto artículo y $p = g(x)$ la curva de la oferta del mismo artículo. Aquí x denota la cantidad del artículo que puede venderse o suministrarse a un precio p por unidad. En general, la función de demanda $f(x)$ es una función decreciente indicando que los consumidores dejarán de comprar si el precio se incrementa. Por otro lado, la función de la oferta $g(x)$ por lo regular es una función creciente porque los productores con todo gusto proveerán más si consiguen

Respuesta
$$\text{V.P.} = \int_0^{20} (60 + 2t)e^{-0.08t}\,dt$$
$= 747.04$ miles de dólares

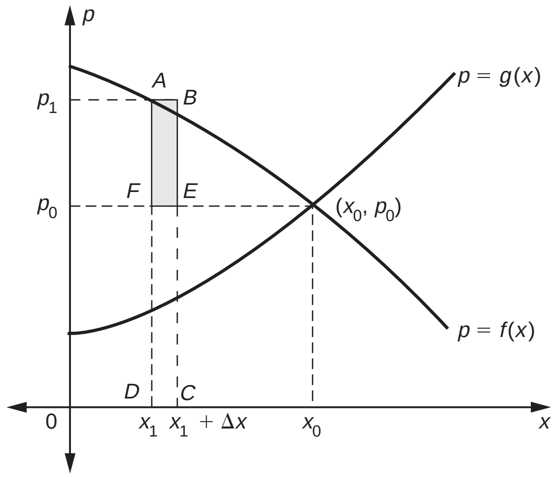


FIGURA 19

precios más altos. El equilibrio del mercado (x_0, p_0) es el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta. (Véase la figura 19).

A partir de la gráfica de la curva de demanda, es claro que a medida que el precio se incrementa, la demanda decrece. Esto implica que hay algunos consumidores que estarían dispuestos a comprar el artículo a un precio más alto, que el precio en el equilibrio del mercado p_0 que en realidad deberían pagar. Por tanto, estos consumidores ahorran dinero como resultado de la operación del mercado de libre competencia.

Considere la cantidad Δx de unidades entre x_1 y $x_1 + \Delta x$. El área $p_1\Delta x$ del rectángulo *ABCD* de la figura anterior puede interpretarse como la cantidad total de dinero que los consumidores pagarían por estas Δx unidades si el precio fuera $p_1 = f(x_1)$ por unidad. En el precio de equilibrio del mercado p_0, la cantidad real gastada por los consumidores en estas Δx unidades es $p_0\Delta x$. En otras palabras, los consumidores ahorran una cantidad igual a $p_1\Delta x - p_0\Delta x = [f(x_1) - p_0]\Delta x$ en estas unidades. Este ahorro es igual al área del rectángulo sombreado *ABEF* de la figura 19. Si dividimos el rango de $x = 0$ a $x = x_0$ en un gran número de intervalos de longitud Δx, obtenemos un resultado similar en cada intervalo: los ahorros de los consumidores son iguales al área de un rectángulo como *ABEF* situado entre la curva de demanda y la línea horizontal $p = p_0$. Sumando todos esos ahorros entre $x = 0$ y $x = x_0$, obtenemos el monto total (o ahorro) de los consumidores. Éste se conoce como el **superávit de los consumidores** (SC) y está dado por el área entre la curva de demanda $p = f(x)$ y la línea horizontal $p = p_0$. (Véase la figura 20).

El superávit de los consumidores está representado por la integral definida

$$\boxed{\mathrm{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\,dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0}$$

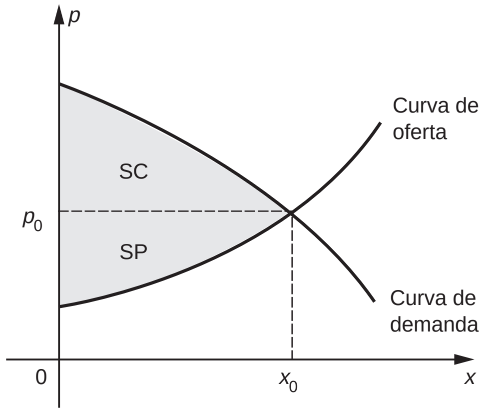


FIGURA 20

De manera similar, en un mercado de libre competencia existen también productores que estarían dispuestos a vender el artículo a un precio menor, que el de equilibrio de mercado p_0 que los consumidores en realidad pagan. En tal situación, los productores también se benefician; este beneficio de los productores se denomina el **superávit de los productores** (SP).

Usando un razonamiento similar al que se acaba de exponer, podemos comprobar que la ganancia total de los productores o superávit de los productores (SP) está dado por el área entre la curva de oferta y la recta horizontal $p = p_0$. (Véase la figura 20). Esto es,

$$\boxed{\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\,dx = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx}$$

en donde $p = g(x)$ es la relación de la oferta.

EJEMPLO 4 Las funciones de la oferta y la demanda de cierto producto están dadas por

$$S: \quad p = g(x) = 52 + 2x \tag{2}$$

$$D: \quad p = f(x) = 100 - x^2 \tag{3}$$

Determine el superávit del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio del mercado.

Solución El punto de equilibrio (x_0, p_0) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda simultáneamente para x y p. Igualando las dos expresiones de p de las ecuaciones (1) y (2),

$$52 + 2x = 100 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x - 6)(x + 8) = 0$$

☛ **18.** Calcule el superávit del consumidor y del productor, si las ecuaciones de la demanda y de la oferta son $3p + 5x = 28$ y $p = 2x + 2$, respectivamente.

que da $x = 6$ o $x = -8$. Dado que el valor negativo de x es inadmisible, nos quedamos con $x = 6$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2), obtenemos que $p = 52 + 12 = 64$. Por consiguiente, tenemos los valores de equilibrio $x_0 = 6$ y $p_0 = 64$. El superávit del consumidor está dado ahora por

$$\text{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\, dx$$

$$= \int_0^{6} [(100 - x^2) - 64]\, dx$$

$$= \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 216 - \frac{216}{3} = 144$$

Y el superávit de los productores es

$$\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\, dx$$

$$= \int_0^{6} [64 - (52 + 2x)]\, dx$$

$$= \left[12x - x^2\right]_0^6 = 72 - 36 = 36$$ ☛ **18**

Respuesta
$\text{SC} = \frac{10}{3}$, SP = 4

EJERCICIOS 6-3

1. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proporción recibe el 20% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz.

2. *(Curva de Lorentz)* Repita el ejercicio 1 en el caso de la curva de Lorentz $y = 0.94x^2 + 0.06x$.

3. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar los primeros 40 automóviles, un establecimiento de pintado de automóviles estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 10x^{-0.25}$. Encuentre el número total de horas-hombre que se requerirán para pintar 60 automóviles más.

4. *(Curva de aprendizaje)* Sonido X & Y produce radiorreceptores en su línea de ensamblado. Se sabe que los primeros 100 aparatos (1 unidad) les lleva un total de 150 horas-hombre y por cada unidad adicional de 100 aparatos, se requirió menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 150x^{-0.2}$, en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridas para ensamblar la unidad número $(x + 1)$. ¿Cuántas horas-hombre se requerirán con el objetivo de ensamblar 5 unidades (esto es, 500 radiorreceptores) después de que se han ensamblado las primeras 5 unidades?

5. *(Curva de aprendizaje)* Electrónica Morales produce calculadoras electrónicas en su línea de ensamblado. Las primeras 50 calculadoras demandan 70 horas, y por cada unidad adicional de 50 calculadoras, se requiere menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 70x^{-0.32}$. ¿Cuánto tiempo demandará el ensamblado de 500 calculadoras después de que se han ensamblado las primeras 200 calculadoras?

6. *(Curva de aprendizaje)* Suponiendo que existe una mejora del 20% cada vez que la producción se duplica (por ejemplo, la sexta unidad requiere 80% del tiempo consumido por la tercera unidad, la vigésima unidad requiere 80% del tiempo demandado por la décima unidad, etc.) determine el valor de la constante b para la curva de aprendizaje $f(x) = ax^b$.

7. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de ingreso y costo en una operación de perforación petrolera están dados por

$$R'(t) = 14 - t^{1/2} \qquad \text{y} \qquad C'(t) = 2 + 3t^{1/2}$$

respectivamente, en donde el tiempo t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. ¿Cuánto deberá prolongarse la perforación para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

8. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de ingreso y de costo de cierta operación minera están dadas por

$$R'(t) = 10 - 2t^{1/3} \qquad \text{y} \qquad C'(t) = 2 + 2t^{1/3}$$

respectivamente, en donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. Determine por cuánto tiempo deberá continuarse la operación con la finalidad de obtener una utilidad máxima. ¿Cuál es el monto de la utilidad máxima, suponiendo que los costos fijos de operación inicial son de \$3 millones?

(9-14) *(Superávit del consumidor y del productor)* Determine el superávit del consumidor y del productor en el caso de un producto cuyas funciones de demanda y de oferta aparecen enseguida. (Suponga que se ha establecido el equilibrio del mercado).

9. $D\text{:}\ p = 15 - 2x$
$S\text{:}\ p = 3 + x$

10. $D\text{:}\ p = 17 - 0.5x$
$S\text{:}\ p = 5 + 0.3x$

11. $D\text{:}\ p = 1200 - 1.5x^2$
$S\text{:}\ p = 200 + x^2$

12. $D\text{:}\ p = 120 - x^2$
$S\text{:}\ p = 32 + 3x$

13. $D\text{:}\ p = \dfrac{280}{x + 2}$
$S\text{:}\ p = 20 + 2.5x$

14. $D\text{:}\ p = \dfrac{370}{x + 6}$
$S\text{:}\ p = 3.8 + 0.2x$

15. *(Decisión de inversión)* Una compañía puede reducir sus gastos laborales automatizando su planta. Sin embargo, la automatización de la planta requiere mantenimiento sustancial extra, el cual se incrementa con el tiempo. El ahorro neto anual después de t años está dado por $S'(t) = 120 - 4t - (1/2)t^2$ (millones de dólares por año). Calcule el ahorro total sobre los 8 primeros años. ¿Cuántos años debe conservarse el equipo automatizado antes de que los ahorros totales empiecen a decrecer? ¿Cuál es el valor máximo de los ahorros totales?

16. *(Decisión de inversión)* Una compañía está considerando la compra de una nueva maquinaria con un costo de \$5000. Se estima que la máquina ahorrará dinero a la compañía a una tasa de $160(5 + t)$ dólares anuales en un tiempo t después de la adquisición. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 5 años?

17. *(Decisión de inversión)* Para tomar la decisión correcta en el ejercicio anterior, la compañía debe calcular el valor presente de sus ahorros futuros y compararlos con el costo de la máquina. Calcule el valor presente de los ahorros en los primeros 5 años después de la adquisición de la máquina, suponiendo una tasa de interés nominal del 8%. ¿Se pagará la máquina a sí misma ahora en este periodo de 5 años?

18. *(Maximización de utilidad)* En una operación de extracción de petróleo las tasas de ingresos y costos son

$$R'(t) = 20 - t, \qquad C'(t) = 4$$

donde t está en años, R y C en millones de dólares. Encuentre el número de años que tiene que funcionar la operación para asegurar una utilidad total máxima. Calcule el valor presente de la utilidad total suponiendo una tasa nominal de descuento de 10%.

19. *(Maximización de utilidad)* Repita el ejercicio anterior si

$$R'(t) = 50 - 2t, \qquad C'(t) = 20 + t$$

y la tasa de descuento nominal es 12.5%

20. *(Estrategia de desarrollo)* Una compañía minera puede escoger entre dos estrategias para explotar sus recursos. La primera implica un costo inicial de \$25 millones y producirá una utilidad neta de \$10 millones anuales durante los próximos 20 años. La segunda representa un costo inicial de \$60 millones y producirá una utilidad neta de \$20 millones anuales por un periodo de 10 años. Calcule el valor presente de estas dos estrategias suponiendo una tasa de descuento nominal de 10%. ¿Cuál es la mejor estrategia?

21. *(Estrategia de desarrollo)* Repita el ejercicio 20 cuando la tasa de utilidad para la primera estrategia es $P'(t) = (20 - t)$ millones de dólares y la tasa de utilidad para la segunda es de $P'(t) = (40 - 4t)$ millones de dólares. Suponga los mismos costos y tasa de descuentos iniciales.

22. *(Ahorro de maquinaria y costos)* Una compañía adquirió una máquina nueva a un costo de \$19,000. Estiman que esta máquina ahorrará dinero a la compañía a razón de $1000(5 + t)$ dólares por año en un tiempo de t años después de su adquisición. Sin embargo, el costo de operación de la máquina en ese tiempo será $(1500 + 135t^2)$ dólares anuales. Calcule el ahorro neto total de la compañía durante los primeros t años. Pruebe que después de 5 años estos ahorros netos han sobrepasado el precio de adquisición. Determine el número de años que la compañía deberá quedarse con la máquina y el ahorro neto total durante ese tiempo.

23. *(Crecimiento del capital)* Si $A(t)$ es el capital de una empresa en el instante t e $I(t)$ es la tasa de inversión, se sigue que $dA/dt = I$. Determine el incremento en el capital entre $t = 4$ y $t = 9$ si la tasa de interés está dada por $I(t) = 4 + \sqrt{t}$ (en miles de dólares por año).

(24-26) *(Crecimiento de capital)* Durante el periodo $0 \le t \le T$, un capital es invertido continuamente en una empresa a una tasa $I(t)$. Si la inversión crece continuamente a una ta-

sa de interés nominal R, entonces, el capital invertido en un tiempo t habrá crecido en valor por el factor $e^{r(T-t)}$ al final del periodo ($r = R/100$). Por tanto, el valor final de la inversión es igual a

$$A(T) = \int_0^T I(t)e^{r(T-t)}\,dt$$

Calcule el valor final si $r = 0.1$ y $T = 10$ en los siguientes casos.

24. $I(t) = I$, constante

25. $I(t) = \begin{cases} 2I & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$

26. $I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ 2I & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$

¿Cuál de las tres estrategias en los ejercicios 24-26 da el valor final máximo? ¿Por qué?

***27.** *(Superávit del consumidor y del productor)* Si la curva de demanda es $p = f(x)$, demuestre que

$$\left(\frac{d}{dx_0}\right)(\text{SC}) = -x_0 f'(x_0)$$

[*Sugerencia*: si $x_0 \to x_0 + \Delta x_0$, se sigue que $\Delta(\text{SC}) \approx x_0(-\Delta p_0)$]. Si la curva de oferta es $p = g(x)$, pruebe que

$$\left(\frac{d}{dx_0}\right)(\text{SP}) = x_0 g'(x_0)$$

Demuestre también que

$$\text{SC} = -\int_0^{x_0} xf'(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \text{SP} = \int_0^{x_0} xg'(x)\,dx$$

Usando integración por partes, obtenga las expresiones de SC y SP dadas en el texto.

28. Pruebe que

$$\text{SP} = \int_0^{p_0} x\,dp \qquad \text{y} \qquad \text{SC} = \int_{p_0}^{p_m} x\,dp$$

en donde p_m es el precio en que la demanda cae a cero.

***29.** *(Rentabilidad financiera)* En una empresa en que los bienes de capital se consideran fijos, sea $P(x)$ el valor en dólares de la producción cuando se emplean por semana x horas-hombre de mano de obra. La derivada $P'(x)$ se denomina la **productividad marginal de la mano de obra**. Si w es la tasa de salarios (en dólares por hora-hombre), la función de utilidad está dada por $P(x) - wx$ (ignorando costos fijos). Demuestre que tiene sentido contratar x_0 horas-hombre en donde x_0 es la solución de la ecuación $P'(x_0) = w$. Luego, pruebe que la utilidad está dada por

$$\int_0^{x_0} [P'(x) - P'(x_0)]\,dx$$

e interprete esto como un área apropiada. Esta cantidad se conoce como la **rentabilidad financiera** de los bienes de capital dados. Encuentre la rentabilidad financiera si la productividad marginal está dada por $P'(x) = 120(x + 400)^{-1/2}$, en donde la tasa de salarios es:

a) \$3 por hora

b) \$4 por hora

c) \$5 por hora

■ 6-4 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Sea $y = f(x)$ una función definida en los n puntos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Entonces el valor promedio de los n valores de la función correspondientes $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ se denota por $\overline{f}$ o $\overline{y}$ y está dado por

$$\overline{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Esta definición puede extenderse al caso cuando $f(x)$ está definida y es *continua* para todos los puntos en un intervalo $[a, b]$. Entonces, el valor promedio de $f(x)$ sobre $[a, b]$ está definido como

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces podemos interpretar $\overline{f}$ geométricamente como sigue. De la definición anterior de $\overline{f}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f}(b - a) \tag{1}$$

Pero $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área entre el eje x, la curva $y = f(x)$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. De la ecuación (1), esta área es igual $\overline{f}(b - a)$, la cual es igual al área de un rectángulo de altura $\overline{f}$ y ancho $b - a$, como se muestra en la figura 21. Así, $\overline{f}$ es la altura del rectángulo que contiene la misma área que aquélla bajo la curva.

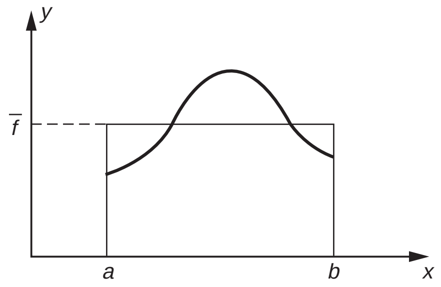


FIGURA 21

EJEMPLO 1 Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$, e interprete geométricamente el resultado.

Solución Tenemos

$$\overline{f} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3 - 1}\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = 10$$

Un rectángulo de altura 10 y ancho $b - a = 3 - 1 = 2$ tiene la misma área que la región bajo la curva $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 3$. ☛ **19**

☛ **19.** Calcule *a*) el valor promedio de e^x en $-1 \leq x \leq 1$ *b*) el valor promedio de x en $a \leq x \leq b$

EJEMPLO 2 Una dosis de 2 miligramos de cierta droga es inyectada en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de t horas está dada por $f(t) = 2e^{-0.32t}$. Encuentre la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo durante la segunda hora.

Solución Aquí tenemos que encontrar el valor promedio de $f(t)$ en el intervalo desde $t = 1$ a $t = 2$. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2 - 1}\int_1^2 2e^{-0.32t}\,dt = 2\left[\frac{e^{-0.32t}}{-0.32}\right]_1^2 \\ &= \frac{-1}{0.16}(e^{-0.64} - e^{-0.32}) = 1.24\end{aligned}$$

Respuesta
a) $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$ *b*) $\frac{1}{2}(a + b)$

☛ **20.** En el ejemplo 3, calcule la utilidad promedio esperada semanal durante el segundo año, suponiendo que la tasa de crecimiento permanece igual.

EJEMPLO 3 Una compañía introduce un producto nuevo, al que le pone un precio de \$5. El costo de producir x unidades semanales es $(1000 + 2x)$ dólares. Se proyecta que durante el primer año, las ventas semanales aumentarán a una tasa constante de 200 a 600 unidades. Calcule la utilidad promedio esperada semanal durante el primer año.

Solución El ingreso de x unidades semanales es $5x$ dólares. Por tanto, la función de utilidad semanal es

$$P(x) = \text{Ingreso} - \text{Costo} = 5x - (1000 + 2x) = 3x - 1000$$

El valor promedio de esta función en el intervalo $200 \leq x \leq 600$ es, entonces,

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{600 - 200}\int_{200}^{600}(3x - 1000)\,dx = \frac{1}{400}\left[\frac{3}{2}x^2 - 1000x\right]_{200}^{600} = 200$$

Por tanto, la utilidad promedio es \$200 semanales durante el primer año. ☛ **20**

Respuesta \$1400

EJERCICIOS 6-4

(1-12) Encuentre el valor promedio de las funciones en los intervalos dados.

1. $f(x) = 3;\quad [a, b]$
2. $f(x) = 2x + 5;\quad [1, 4]$
3. $f(x) = x^2;\quad [0, 2]$
4. $f(x) = 4 - 3x^2;\quad [-1, 1]$
5. $f(x) = x^3;\quad [0, 2]$
6. $f(x) = 5 - 4x^3;\quad [1, 2]$
7. $f(x) = x^2 + 2x;\quad [1, 3]$
8. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16};\quad [0, 3]$
9. $f(x) = e^x;\quad [0, \ln 2]$
10. $f(x) = (\ln x)/x;\quad [1, 5]$
11. $f(x) = 1/x;\quad [1, e]$
12. $f(x) = \ln x;\quad [1, 3]$

13. *(Costo promedio)* El costo semanal C (en dólares) de producir x unidades de un producto está dado por

$$C(x) = 5000 + 16x + 0.1x^2$$

El fabricante estima que la producción será entre 200 y 300 unidades. ¿Cuál será el costo promedio semanal en ese intervalo?

14. *(Ingreso promedio)* La función de demanda de un producto es $p = 20 - 0.05x$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Encuentre el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $x = 100$ hasta $x = 200$.

15. *(Valor promedio de una inversión)* Si una suma de \$1000 se invierte al 6% compuesto continuamente, entonces el valor V de la inversión después de t años es $V = 1000e^{0.06t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a 5 años.

16. *(Tamaño promedio de una población)* La población de un pueblo pequeño era de 2000 en 1987 y ha crecido de acuerdo con la fórmula $p(t) = 2000e^{0.03t}$, donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde a 1987. Encuentre la población promedio del pueblo entre los años 1987 y 1997.

17. *(Inventario promedio)* Un almacén pide a un fabricante 100 artículos cada 4 semanas. Durante las primeras 4, los artículos se venden a razón de 20 por semana, durante las segundas 4 se venden 30 artículos por semana. Calcule el número promedio de artículos almacenados durante un periodo de 8 semanas.

18. *(Rendimiento promedio)* El ingreso de una inversión minera es cero durante los primeros dos años y después varía de acuerdo con la fórmula $R(t) = 5e^{-0.1(t-2)}$ $(t \geq 2)$, donde t es el tiempo en años. Calcule la ganancia promedio anual en el intervalo $0 \leq t \leq 10$.

19. *(Tamaño promedio de una población)* Una población está disminuyendo de acuerdo con la fórmula $P(t) = 2 \times 10^6/(1 + t)$, donde t es el tiempo. Encuentre el tamaño promedio de la población entre $t = 1$ y $t = 3$.

20. *(Temperatura promedio)* Cierto día entre las 6 A.M. y las 6 P.M., la temperatura en Vancouver varía de acuerdo con la

fórmula $T(t) = 13 + 3t - \frac{3}{16}t^2$. (Donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 a.m.) Calcule la temperatura promedio:

a) Entre las 6 A.M. y mediodía

b) Entre mediodía y las 6 P.M.

21. *(Velocidad promedio)* La velocidad de un objeto arrojado verticalmente al aire está dado por $V(t) = 64 - 32t$, donde t es el tiempo en segundos. Calcule la velocidad promedio:

a) Durante el primer segundo

b) Entre $t = 1$ y $t = 3$

22. *(Costo promedio y curva de aprendizaje)* Una fábrica de televisores encuentra que la curva de aprendizaje para una línea de montaje es $f(x) = 20x^{-0.152}$, donde $f(x)$ es el número de horas de trabajo necesarias para armar el aparato número $(x + 1)$. Calcule el número promedio de horas de trabajo en armar aparatos:

a) Durante los primeros 1000

b) De 3001 a 4000

23. *(Presión promedio de la sangre)* En el transcurso de la reunión muy tensa de un comité, la presión sistolítica de la sangre del presidente de la sesión aumentó de acuerdo con la fórmula $P(t) = 140 + 4t + \frac{1}{2}t^2$, donde t es el tiempo en horas. Calcule la presión promedio de la sangre:

a) Durante la primera media hora

b) Durante la tercera hora

■ 6-5 INTEGRACIÓN NUMÉRICA (SECCIÓN OPCIONAL)

Considere la integral $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$. Como $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ es continua y no negativa en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, esta integral representa el área bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^4}$ entre $x = 0$ y $x = 1$. Pero no podemos encontrar la antiderivada de $\sqrt{1 + x^4}$ por los métodos estudiados en este libro. De hecho, esta antiderivada no puede expresarse en términos de funciones elementales. En realidad, hay muchas de esas funciones cuyas antiderivadas no pueden encontrarse por los métodos de integración conocidos. Por ejemplo, otra función es $f(x) = e^{-x^2/2}$, la cual se usa frecuentemente en estadística y cuya antiderivada no puede encontrarse en términos de funciones elementales. En esos casos, no podemos usar el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida. Pero existen métodos que nos permiten calcular valores aproximados de cualquier integral definida y el proceso se conoce como **integración numérica**. En esta sección describiremos dos de estos métodos para evaluar aproximadamente la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$.

Regla del trapecio

Considere la integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Para deducir la regla del trapecio, primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, de longitud h cada uno, de manera que $h = (b - a)/n$. Los extremos de los subintervalos son $a, a + h, a + 2h, a + 3h, \ldots,$ y denotamos los valores de $f(x)$ en esos puntos por $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$, como se muestra en la figura 22. En cada subintervalo, aproximamos el área bajo la curva por el área del trapecio que consiste en la figura de cuatro lados con dos lados verticales y cuyo lado superior se obtiene uniendo los dos puntos de la gráfica correspondientes a los extremos del subintervalo. (Véase la figura 23). Entonces, el área total bajo la curva desde $x = a$ a $x = b$ es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los n trapecios.

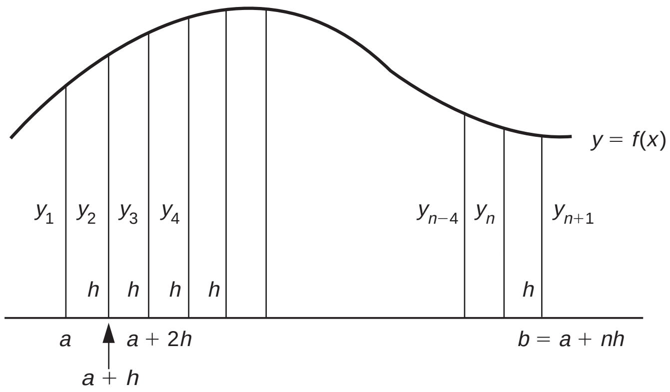


FIGURA 22

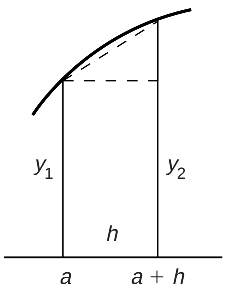


FIGURA 23

Considere el trapecio en el primer subintervalo. El área de este trapecio es igual a la suma de las áreas del rectángulo de altura y_1, y ancho h y del triángulo de base h y altura $(y_2 - y_1)$, como se muestra en la figura 23. Por tanto, el área de este trapecio es

$$h \cdot y_1 + \frac{1}{2}h(y_2 - y_1) = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$

Análogamente, las áreas de los trapecios en los otros subintervalos son

$$\frac{h}{2}(y_2 + y_3),\ \frac{h}{2}(y_3 + y_4), \ldots,\ \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1})$$

Así,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \text{Suma de las áreas de los trapecios}$$

$$= \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \frac{h}{2}(y_3 + y_4)$$

$$+ \cdots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1})$$

$$= \frac{h}{2}[y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}]$$

Podemos resumir la regla del trapecio como sigue.

Regla del trapecio

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}[y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}]$$

donde $h = (b - a)/n$ y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ son los valores de $y = f(x)$ en $x = a$, $a + h, a + 2h, \ldots, a + nh = b$

Es intuitivamente claro que tendremos una mejor aproximación incrementando el número de subintervalos n.

EJEMPLO 1 Encuentre el valor aproximado de $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ usando la regla del trapecio con $n = 6$.

Solución Aquí $a = 0$ y $b = 3$, así que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0.5$$

Entonces los extremos de los seis subintervalos son $x = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3, y los valores correspondientes de $y = e^{-x^2}$, están dados en la tabla 1. Entonces, por la regla del trapecio tenemos

$$\int_0^3 e^{-x^2}\,dx \simeq \frac{h}{2}\,[(y_1 + y_7) + 2(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)]$$

$$\simeq \frac{0.5}{2}\,[(1 + 0.0001) + 2(0.7788 + 0.3679 + 0.1054 + 0.0183 + 0.0019)]$$

$$\simeq 0.8862$$ ☛ **21**

☛ **21.** Utilice la regla del trapecio para aproximar $\int_0^5 x^2\,dx$ utilizando
a) 5 subintervalos
b) 10 subintervalos.
¿Cuál es el valor exacto?

TABLA 1

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	e^0	$e^{-0.25}$	e^{-1}	$e^{-2.25}$	e^{-4}	$e^{-6.25}$	e^{-9}
	1	0.7788	0.3679	0.1054	0.0183	0.0019	0.0001
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Regla de Simpson

En la evaluación aproximada mediante la regla del trapecio de $\int_a^b f(x)\,dx$, aproximamos la curva $y = f(x)$ por un conjunto de segmentos de rectas. En la regla de Simpson aproximamos la curva $y = f(x)$ por un conjunto de arcos parabólicos. La fórmula resultante da una mejor aproximación a la integral que la regla del trapecio con el mismo número n de subintervalos.

Regla de Simpson (enunciado)

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[y_1 + y_{n+1} + 2(y_3 + y_5 + \cdots)\ 4(y_2 + y_4 + \cdots)]$$

donde n es **par** $h = (b - a)/n$, y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$ son los valores de $y = f(x)$ en $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh = b$.

Respuesta *a*) 42.5; *b*) 41.875
(valor exacto = 41.666. . .)

La demostración de esta regla es complicada y se omite.

Forma práctica de la regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[X + 2O + 4E]$$

donde

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{\text{Número de subintervalos (par)}}$$

X = Suma de las ordenadas **extremas** (o sea, la primera y la última ordenadas)

O = Suma de las **otras** ordenadas **impares** (o sea, omitiendo la primera y la última ordenadas)

E = Suma de las ordenadas **pares**

Nota Aquí X representa a Ex, las primeras dos letras de la palabra **extremas**.

EJEMPLO 2 Aplique la regla de Simpson de integración aproximada para aproximar $\int_2^{10} \frac{1}{x+1}\,dx$ tomando $n = 8$ subintervalos iguales. Dé la respuesta correcta con tres cifras decimales.

Solución Cuando calculamos la respuesta correcta con tres cifras decimales, primero calculamos cada término correcto con cuatro decimales (uno más) y después redondeamos la respuesta a tres decimales. Aquí $y = f(x) = 1/(x+1)$, $a = 2$, $b = 10$ y $n = 8$ (par). Por tanto $h = (b-a)/n = (10-2)/8 = 1$. Así los valores de x, llamados $a, a+h, a+2h, \ldots, a+8h$, son 2, 3, 4, . . . , 10, y los valores de $y = f(x)$, llamados $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ están dados por la tabla 2. Ahora,

$$X = \text{Suma de las ordenadas extremas} = y_1 + y_9$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = 0.3333 + 0.0909 = 0.4242$$

$$O = \text{Suma de las otras ordenadas impares (excluyendo la primera y la última)}$$

$$= y_3 + y_5 + y_7 = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

$$= 0.2000 + 0.1429 + 0.1111 = 0.4540$$

$$E = \text{Suma de las ordenadas pares} = y_2 + y_4 + y_6 + y_8$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$$

$$= 0.2500 + 0.1667 + 0.1250 + 0.1000 = 0.6417$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[X + 2O + 4E]$$

TABLA 2

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = f(x)$	$\frac{1}{3}$ y_1	$\frac{1}{4}$ y_2	$\frac{1}{5}$ y_3	$\frac{1}{6}$ y_4	$\frac{1}{7}$ y_5	$\frac{1}{8}$ y_6	$\frac{1}{9}$ y_7	$\frac{1}{10}$ y_8	$\frac{1}{11}$ y_9

☛ **22.** Utilice la regla de Simpson para aproximar $\int_0^x x^4\,dx$ utilizando
a) 4 subintervalos
b) 8 subintervalos
¿Cuál es el valor exacto?

o

$$\int_2^{10} \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}[0.4242 + 2(0.4540) + 4(0.6417)] \simeq 1.300$$

(El valor real es $\frac{11}{3} \simeq 1.299$). ☛ **22**

EJEMPLO 3 Use la regla de Simpson para encontrar el área aproximada entre el eje x, las rectas $x = 2$, $x = 8$ y una curva continua que pasa por los puntos listados en la siguiente tabla.

TABLA 3

x	2	3	4	5	6	7	8
y	3.2	3.7	4.1	5	4.3	3.5	3.1

Solución Aquí $f(x)$ no está dada en forma explícita. De los datos dados, la longitud de cada subintervalo es $h = 1$ y los valores de $y_1, y_2, \ldots$ están dados. Nótese que tenemos los resultados que se muestran en la tabla 4. Así,

$$X = \text{Suma de las ordenadas extremas} = y_1 + y_7$$

$$= 3.2 + 3.1 = 6.3$$

$$O = \text{Suma de las otras ordenadas impares} = y_3 + y_5$$

$$= 4.1 + 4.3 = 8.4$$

$$E = \text{Suma de las ordenadas pares} = y_2 + y_4 + y_6$$

$$= 3.7 + 5 + 3.5 = 12.2$$

TABLA 4

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
3.2	3.7	4.1	5	4.3	3.5	3.1

Respuesta *a*) 6570.67
b) 6554.67 (valor exacto = 6553.6)

Por tanto, por la regla de Simpson, el área aproximada está dada por

$$\int_2^8 f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[X + 2O + 4E]$$

$$\simeq \frac{1}{3}\,[6.3 + 2(8.4) + 4(12.2)]$$

$$\simeq 24.0 \text{ unidades} \qquad \text{(redondeado a un decimal).}$$

Las fórmulas para la evaluación numérica aproximada de las integrales como las que acabamos de dar se calculan muy bien utilizando una computadora digital. En esos casos se puede tomar un número muy grande de subintervalos n y se pueden obtener valores en extremo exactos para muchas de las integrales. Si ha tomado un curso de programación puede encontrar interesante escribir programas para calcular integrales usando cualquiera de las dos reglas dadas en esta sección. Pruebe sus programas con varios valores de n para los ejercicios dados en la sección 6-l.

EJERCICIOS 6-5

(1-4) Utilice la regla del trapecio de integración aproximada para evaluar las siguientes integrales definidas. Redondee la respuesta a tres decimales. (En los ejercicios 1 y 4 verifique la exactitud de la respuesta por antiderivación).

1. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

2. $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$ tomando cinco intervalos iguales

4. $\int_4^8 \frac{1}{x - 3}\,dx$ tomando ocho intervalos iguales

(5-8) Utilizado la regla de Simpson, encuentre los valores aproximados para las siguientes integrales definidas (con tres decimales).

5. $\int_4^8 \frac{1}{x}\,dx$ tomando ocho intervalos iguales

6. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

7. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2 + x}}\,dx$ tomando seis intervalos iguales

8. $\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$ tomando cuatro intervalos iguales

9. Use la regla de Simpson para encontrar el valor aproximado de $\int_{-3}^{3} x^4\,dx$ tomando siete ordenadas equidistantes. Compárelo con el valor exacto.

10. Sabiendo que $e^0 = 1$, $e^1 = 2.718$, $e^2 = 7.389$, $e^3 = 20.086$ y $e^4 = 54.598$ utilice la regla de Simpson para encontrar el valor aproximado de $\int_0^4 e^x\,dx$ y compárelo con el valor exacto utilizando antiderivación.

11. Use ambas reglas, la del trapecio y la de Simpson, para encontrar el área aproximada bajo la curva continua que pasa por los puntos:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1.82	4.19	6.90	9.21	11.65	14.36	16.72

12. Repita el ejercicio 11 para la curva que pasa por los puntos:

x	0	0.5	1	1.5	2
y	2	2.03	2.24	2.72	3.46

13. *(Área de una sección transversal)* Un río tiene 80 pies de ancho. La profundidad d a una distancia de x pies de una de las orillas está dada por la siguiente tabla:

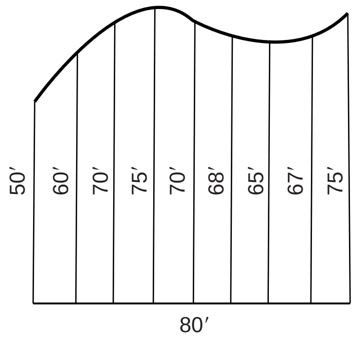
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

pruebe que el área aproximada de la sección transversal es de 710 pies cuadrados de acuerdo con la regla de Simpson.

14. *(Medida de terrenos)* Una parcela tiene un frente de 80 pies de largo. En la figura se muestran los anchos a intervalos de 10 pies. Encuentre el área aproximada del terreno utilizando:

a) La regla del trapecio

b) La regla de Simpson



■ 6-6 ECUACIONES DIFERENCIALES: UNA INTRODUCCIÓN

Existe una gran cantidad de situaciones en la administración y la economía en que la formulación matemática de un problema da como resultado una ecuación en que interviene la derivada de una función desconocida. Por ejemplo, considere, la siguiente situación.

Un monto de capital A_0 se invierte a una tasa de interés nominal del R por ciento anual, en donde la inversión está sujeta a un crecimiento que se capitaliza en cada instante, esto es, el interés de la inversión es compuesto continuo. Suponga que deseamos determinar el valor total de la inversión $A(t)$ en cualquier instante t. Elegimos $t = 0$ correspondiente al instante en que se realiza lainversión inicial. En otras palabras, $A(0) = A_0$.

Con la finalidad de formular este problema en forma matemática, en primer lugar calculamos el valor de la inversión $A(t)$ cuando la tasa de interés se capitaliza n veces en un año. Si Δt denota la duración de cada periodo y hay n periodos de interés en cada año, entonces $n \cdot \Delta t = 1$ o $\Delta t = 1/n$ años. Si $A(t)$ y $A(t + \Delta t)$ son los montos de la inversión en los instantes t y $t + \Delta t$, se sigue que el interés ganado durante el lapso entre t y $t + \Delta t$ está dado por la diferencia

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \Delta A$$

Este interés ΔA es generado por el capital inicial que era $A(t)$ al inicio del intervalo de tiempo dado. Pero si la tasa de interés anual nominal es del R por ciento, con n periodos por año, se sigue que el porcentaje de interés durante un periodo es de R/n. De modo que el interés efectivo durante Δt es igual a

$$(\text{Capital inicial}) \times (\text{Porcentaje de interés})/100 = A(t)(R/100n) = A(t)r\Delta t$$

en donde $r = R/100$ y $\Delta t = 1/n$. En consecuencia,

$$\Delta A = rA\,\Delta t \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Si el interés ha de capitalizarse en forma continua, debemos incrementar el número de periodos de interés en un año indefinidamente, esto es, debemos tomar

☛ **23.** Proporcione el orden de las ecuaciones diferenciales siguientes y establezca si son lineales o no lineales:

a) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4-y$

b) $\frac{dy}{dt} - t\frac{d^2y}{dt^2} = t^3y$

c) $\frac{du}{dy} - y^2u = 2$

Respuesta *a*) Primer orden, no lineal
b) segundo orden, lineal
c) primer orden, lineal (u es la variable dependiente, no y)

el límite cuando $n \to \infty$. Si $n \to \infty$, $\Delta t = 1/n \to 0$ y $\Delta A/\Delta t \to dA/dt$. Así, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = rA \tag{1}$$

Ahora dA/dt representa la tasa de cambio en el valor de la inversión en cualquier instante t. Por consiguiente, la ecuación anterior establece que la *tasa de crecimiento de la inversión es proporcional al valor de la inversión en el instante* t *en que el interés se capitaliza en forma continua.*

El valor de la inversión $A(t)$ en cualquier instante t debe satisfacer la ecuación (1) en que interviene la derivada de la función desconocida $A(t)$. Esta ecuación es un ejemplo de lo que se conoce como *ecuaciones diferenciales.* Damos ahora algunas definiciones formales.

DEFINICIÓN Sea $y = f(t)$ una función diferenciable de la variable independiente t y denotemos con $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ las derivadas de y con respecto a t hasta de orden n. Entonces una **ecuación diferencial de orden *n*** para la función y es una ecuación que relaciona las variables $t, y, y', \ldots, y^{(n)}$. El **orden** n corresponde a la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1

a) $dy/dt = ry$ es una ecuación diferencial de primer orden. [Sólo hemos escrito de otra manera la ecuación (1)].

b) $d^2y/dt^2 - e^{ty} = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden.

c) $d^4y/dt^4 - t^2(d^3y/dt^3) = t^2 + 1$ es una ecuación diferencial de cuarto orden.

DEFINICIÓN Una ecuación diferencial para y, una función de t, se dice que es **lineal** si los términos en la ecuación consisten en y o una de sus derivadas multiplicadas por una función de t o si no sólo de una función de t.

EJEMPLO 2

a) En el ejemplo 1, las ecuaciones diferenciales de las partes *a*) y *c*) son lineales. Pero la correspondiente a la parte *b*) es no lineal porque y aparece en el término e^{ty}, que no es una función lineal de y.

b) $d^2y/dt^2 = 3(dy/dt)^2$ es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden.

c) $d^2y/dt^2 = 3t^2(dy/dt)$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Observe que y y sus derivadas aparecen linealmente. El hecho de que la variable independiente t aparezca como el factor t^2 no da como resultado que la ecuación sea no lineal. ☛ **23**

DEFINICIÓN Se dice que una función $y(t)$ es una **solución** de una ecuación diferencial si, al sustituir $y(t)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial, esta ecuación se satisface para todos los valores de t en el dominio de $y(t)$.

EJEMPLO 3

a) La función $y = t^2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$t\,\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Esto es así porque $dy/dt = 2t$ de modo que

$$t\,\frac{dy}{dt} = t \cdot 2t = 2t^2 = 2y$$

b) La función $y = e^{kt}$, en donde k es una constante, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k^2y = 0$$

ya que

$$\frac{dy}{dt} = ke^{kt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = k^2e^{kt} = k^2y$$

c) La función $y = 2 \ln t$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

Tenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2}{t^2}$$

y así

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^2 = 0$$ ☛ **24**

☛ **24.** Demuestre que $y = x^2$ es una solución de la ecuación

$$xy\frac{dy}{dx} = y^2 + x^4$$

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación diferencial deducida anteriormente para composición continua:

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

en donde r es una constante y $A(0) = A_0$

Solución La ecuación dada puede escribirse como

$$\frac{dA}{A} = r\,dt$$

en donde hemos multiplicado ambos lados por la diferencial dt y dividido entre A. El propósito de hacer esto es tener todos los términos con A en un lado y los términos que incluyen a t en el otro. Integrando ambos lados, obtenemos

$$\int \frac{1}{A}\, dA = \int r\, dt$$

En consecuencia,

$$\ln A = rt + C_1$$

(debido a que $A > 0$) en donde C_1 es la constante de integración. Despejando A, obtenemos

$$A = e^{rt + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{rt} = Ce^{rt} \qquad (2)$$

en donde $C = e^{C_1}$ es otra constante. El valor de C puede determinarse aplicando el hecho adicional de que $A(0) = A_0$. Por tanto, haciendo $t = 0$ en la ecuación (2),

$$A_0 = A(0) = Ce^{r(0)} = C$$

Por consiguiente, a partir de la ecuación (2), obtenemos

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

En otras palabras, cuando el interés se capitaliza en forma continua la inversión crece en forma exponencial.

Podemos resumir el resultado principal del último ejemplo como sigue:

> La ecuación diferencial $dy/dt = ky$ en donde k es una constante dada, tiene la solución $y = Ce^{kt}$, en donde C es una constante arbitraria.

Observe la presencia de la constante arbitraria C en la solución. A consecuencia de esto $y = Ce^{kt}$ se denomina **solución general** de esta ecuación diferencial. La ecuación diferencial no determina de manera única la solución; la solución general contiene una constante desconocida.

Para determinar el valor de la constante C necesitamos una información adicional además de la ecuación diferencial. Por ejemplo, en el ejemplo 4 se nos dio el valor inicial de la inversión $A(0) = A_0$. En general (excepto para ciertos casos irregulares), la solución de cualquier ecuación diferencial de primer orden contiene una constante arbitraria, y se requiere de una información adicional para determinarla. Por lo regular, esta información toma la forma del valor de la variable dependiente dada para un valor particular de la variable independiente, tal como $A = A_0$ en $t = 0$. Este tipo de información se denomina **condición inicial**.

EJEMPLO 5 ***(Crecimiento poblacional)*** Sea $P(t)$ el tamaño (en millones) de la población de Estados Unidos en el instante t, medido en años, con $t = 0$ co-

rrespondiendo a 1900. Suponga que esta cantidad satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $k = 0.02 \ln 2 \approx 0.01386$. La población en el año 1950 fue de 150 millones. Encuentre una expresión para la población en un instante general t y utilice esta fórmula para evaluar la población en 1900 y en 1980.

Solución La ecuación diferencial es del mismo tipo que la del ejemplo 4. Por tanto, su solución general es

$$P(t) = Ce^{kt}$$

en donde C es una constante arbitraria. Para determinar C utilizamos la información adicional de que $P = 150$ cuando $t = 50$ (esto es, en 1950). Sustituyendo estos valores en la solución general, tenemos

$$150 = Ce^{k(50)} = Ce^{(0.02 \ln 2)(50)} = Ce^{\ln 2} = 2C$$

en donde hemos sustituido el valor dado de k y usado el hecho de que $e^{\ln a} = a$, para cualquier número real positivo a. Por tanto, $C = 75$.

Sustituyendo este valor de C en la solución general, obtenemos la siguiente expresión para la población en el instante t,

☛ **25.** Determine la solución de la ecuación diferencial

$\frac{dy}{dt} = -2y$ que satisface

la condición inicial $y(1) = 3$

$$P(t) = 75e^{kt} = 75e^{(0.01386)t}$$

En 1900 ($t = 0$) la población tiene el valor $P(0) = 75e^{(0.01386)(0)} = 75$ millones. En 1980 ($t = 80$) la población es $P(80) = 75e^{(0.01386)(80)} = 75e^{1.109} = 75(3.03) = 227$ millones. ☛ **25**

Ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes

Continuamos considerando la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky + b \tag{3}$$

donde k y b son dos constantes dadas. Más adelante, en esta sección, mostraremos cómo tal ecuación diferencial puede utilizarse como un modelo de crecimiento poblacional cuando se incluyen efectos, tales como migración o recolección (cosecha). Sin embargo, primero deduciremos su solución general.

Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{dy}{dt} = k\left(y + \frac{b}{k}\right)$$

Ahora cambiamos la variable dependiente a $z = y + b/k$. Entonces, $dz/dt = dy/dt$ y así la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{dz}{dt} = kz$$

Respuesta $y = 4 - 3e^{-2(t-1)}$

Pero, del análisis anterior, ya sabemos que la solución general de esta ecuación es $z = Ce^{kt}$. Por tanto, como $y = z - b/k$, la solución general para y es

$$y = Ce^{kt} - \frac{b}{k} \tag{4}$$

Nuevamente, observe la presencia de la constante arbitraria. Podemos resumir este resultado como sigue:

> La ecuación diferencial $dy/dt = ky + b$, en donde k y b son constantes dadas, tiene la solución general $y = Ce^{kt} - b/k$, en donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLO 6 Determine la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 1$$

que satisface la condición inicial $y(0) = 3$.

Solución Procedemos como en la deducción del caso general. Primero escribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dt} = 2(y + \tfrac{1}{2})$$

Entonces, transformamos la nueva variable $z = y + \frac{1}{2}$. La ecuación diferencial se transforma en $dz/dt = 2z$ y su solución general es $z = Ce^{2t}$. Por tanto, como $y = z - \frac{1}{2}$, la solución general para y es

$$y = Ce^{2t} - \tfrac{1}{2}$$

Por supuesto, podríamos haber obtenido esta solución por la simple sustitución de $k = 2$ y $b = 1$ en la fórmula (4), deducida anteriormente para el caso general.

La constante C es arbitraria y debe determinarse a partir de la condición inicial dada que $y(0) = 3$. Haciendo $t = 0$ y $y = 3$ en la última ecuación, obtenemos

$$3 = Ce^{2(0)} - \tfrac{1}{2} = C - \tfrac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad C = \tfrac{7}{2}$$

Así, sustituyendo C en la solución general, obtenemos

$$y = \tfrac{7}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}$$ ☛ **26**

☛ **26.** Determine la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 4 - y$ que satisface la condición inicial $y(0) = 3$

Respuesta $y = 4 - e^{-t}$

Ahora analizaremos algunas aplicaciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky + b$. Primero considere el crecimiento de una inversión compuesta n veces por año con tasa de interés nominal anual de R%. Sea $A(t)$ el valor de la inversión en el instante t y sea $\Delta t = 1/n$ el intervalo de tiempo entre las composiciones. Entonces, como estudiamos al inicio de esta sección, el incremento en A de una composición a la siguiente está dado por

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t) = rA(t)\,\Delta t$$

en donde $r = R/100$. Ahora, suponga que una cantidad adicional I se invierte cada año en la cuenta en montos iguales, justo antes de cada composición. Entonces, cada inversión adicional es $I \div n = I\,\Delta t$ de modo que el incremento en el valor de la cuenta es

$$\Delta A = \text{Interés durante } \Delta t + \text{Nueva inversión durante } \Delta t$$

$$\Delta A = rA(t)\Delta t + I\,\Delta t$$

Así,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = rA + \mathrm{I}$$

La composición continua corresponde al límite cuando $n \to \infty$, que significa $\Delta t \to 0$. En este límite, la ecuación anterior se transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = rA + I$$

que es exactamente del tipo que hemos estado estudiando.

Una aplicación mucho más importante de la ecuación diferencial (3) es al crecimiento poblacional. La ecuación diferencial $dy/dt = kt$ que corresponde al caso especial $b = 0$, puede aplicarse en muchos casos en donde una población aumenta en un ambiente que no pone restricción sobre su crecimiento. La constante k se denomina **tasa de crecimiento específico** de la población. La ecuación diferencial establece que la tasa de crecimiento natural es proporcional al tamaño de la población. Su solución es una función exponencial de crecimiento en la variable t.

La ecuación más general $dy/dt = ky + b$ puede utilizarse para poblaciones que se desarrollan no sólo a través de su propio crecimiento natural sino también como resultado de una inmigración constante de miembros del exterior. El lado izquierdo de la ecuación diferencial proporciona la tasa total de crecimiento del tamaño de la población y, el primer término de la derecha es la contribución debida a la tasa de crecimiento del desarrollo natural, mientras que el segundo término, b, es la tasa de crecimiento debida a la inmigración. Si la tasa de inmigración es constante, podemos utilizar el método desarrollado anteriormente para encontrar la solución.

El caso de una población que pierde miembros a través de la emigración es similar: la única diferencia es que la constante b se vuelve negativa, con $-b$ como la tasa de emigración. Sin embargo, tal vez el caso más importante es el de una población que pierde miembros como resultado de la caza o recolección (cosecha). Tales ejemplos son fundamentales para la conservación de reservas de ciertas especies que se recolectan para el consumo humano.

EJEMPLO 7 Cierta especie de pez tiene un tamaño inicial de población de 100 unidades, cada unidad es de 1 millón de peces, y tiene una tasa de crecimiento natural específico de 0.25, con el tiempo medido en años. La población será recolectada a

☛ **27.** Una población tiene una tasa de crecimiento específico de 0.01 anual y se captan miembros por medio de inmigración a la tasa de 100,000 por año. Escriba la ecuación diferencial que describe el crecimiento del tamaño, y, de la población (en millones). Si inicialmente y es de 20 millones, ¿cuánto será dentro de t años?

Respuesta

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y + 0.1$$

$y = 30e^{0.01t} - 10$

la tasa de h unidades por año, de modo que el tamaño y satisface la ecuación diferencial y condición inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 0.25y - h \qquad y(0) = 100$$

Determine y como una función de t en los casos *a*) $h = 20$; *b*) $h = 25$; *c*) $h = 30$. Analice el significado de los resultados.

Solución La ecuación diferencial dada es del tipo bajo estudio con $k = 0.25$ y $b = -h$. La solución puede obtenerse siguiendo el mismo procedimiento que antes, o sencillamente sustituyendo estos valores de k y b en la solución general (4). Encontramos

$$y = Ce^{0.25t} + 4h$$

Haciendo $t = 0$ y $y = 100$, encontramos el valor de C: $C = 100 – 4h$. Así,

$$y = (100 – 4h)e^{0.25t} + 4h$$

Para los tres valores dados de la tasa de recolección, esta expresión se transforma en

$$\begin{aligned} h = 20: &\quad y = 20e^{0.25t} + 80 \\ h = 25: &\quad y = 100 \\ h = 30: &\quad y = 120 - 20e^{0.25t} \end{aligned}$$

El significado de estos resultados es el siguiente. Cuando la tasa de recolección es de 25 unidades por año, la recolección equilibra de manera exacta el crecimiento natural de la población y el tamaño permanece constante. En este caso, tenemos un rendimiento estable y sustentable con base en la recolección. Cuando h es menor que 25, como se ilustró para $h = 20$, el crecimiento natural compensa en exceso las recolecciones más grandes en el futuro. Cuando h es mayor que 25, como se ilustró por medio del resultado para $h = 30$, el tamaño de la población decrece, ya que el término exponencial tiene un coeficiente negativo. Eventualmente, la población está siendo llevada a la extinción por esta sobrerrecolección. (Verifique que $y = 0$ cuando $t = 4 \ln 6 \approx 7.2$) ☛ **27**

EJERCICIOS 6-6

(1-4) Demuestre que las funciones que se dan enseguida satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas.

1. $y = t^{-4}$; $\quad t\, dy/dt + 4y = 0$
2. $y = t \ln t$; $\quad t^2\, d^2y/dt^2 - t\, dy/dt + y = 0$
3. $y = te^{-t}$; $\quad t\, dy/dt + ty = y$
4. $y = t^3 + 2\sqrt{t}$; $\quad 2t^2\, d^2y/dt^2 - 5t\, dy/dt + 3y = 0$

(5-16) Encuentre la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes.

5. $dy/dt = t^2 + 1/t$
6. $dy/dx = xe^x$
7. $dy/dt - 4y = 0$
8. $2\, dy/dt + y = 0$
9. $dy/dt - \sqrt{t} = 0$
10. $2\, dy/dt + \ln t = 0$
11. $dy/dt = y + 5$
12. $dy/dt = 1 - 3y$
13. $dy/dt - 2y = 1$
14. $3\, dy/dt + y = 2$
15. $2\, dy/dt + 2y = 3$
16. $dy/dt - 0.5y + 2 = 0$

(17-22) Determine las soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

17. $dy/dt + 2y = 0; \quad y = 1$ cuando $t = 1$

18. $2\,dy/dt - y = 0; \quad y = 3$ cuando $t = \frac{1}{4}$

19. $dy/dt - 2e^t = 0; \quad y = 7$ cuando $t = 0$

20. $dy/dx = xe^{x^2}; \quad y = 3$ cuando $t = 0$

21. $dy/dt = 2y + 3; \quad y = 5$ cuando $t = 0$

22. $dy/dt + 2y = 4; \quad y = 3$ cuando $t = 0$

23. *(Interés compuesto capitalizable en forma continua)* Una inversión inicial de $10,000 crece continuamente a una tasa de interés nominal del 5%

a) Determine el valor de la inversión en cualquier instante t.

b) ¿Cuál es el valor de la inversión después de 8 años?

c) ¿Después de cuántos años el valor de la inversión ascenderá a $20,000?

24. *(Crecimiento continuo del valor de una acción)* Una acción con valor inicial de $2000 crece continuamente a una tasa constante del 6% anual.

a) Encuentre el valor de la acción al cabo de t años.

b) ¿Después de cuánto tiempo la acción tendrá un valor de $3000?

25. *(Crecimiento de la población)* Suponga que la tasa de crecimiento proporcional $y'(t)/y(t)$ de la población de la Tierra es una constante. La población en 1930 era de 2 mil millones y en 1975 fue de 4 mil millones. Considerando a 1930 como $t = 0$, determine la población $y(t)$ de la Tierra en el instante t. De acuerdo con este modelo, ¿cuál debió ser la población en 1960?

26. *(Radiactividad)* Para datar el coral y las conchas se utiliza el torio. Su desintegración satisface la ecuación diferencial $dy/dt = -9.2 \times 10^{-6}\,y$ donde t está medido en años. ¿Cuál es la vida media del torio radiactivo?

27. *(Crecimiento poblacional con inmigración)* Una población tiene un tamaño inicial de 10,000 y una tasa de crecimiento específico de 0.04 (el tiempo medido en años). Si la población aumenta debido a la inmigración a la tasa de 100 por año, ¿cuál será el tamaño de la población después de t años?

28. Repita el ejercicio 27 en el caso cuando, debido a la emigración, la población pierde miembros a una tasa de 150 por año.

29. *(Propagación de epidemias)* Una enfermedad infecciosa se propaga lentamente a una población numerosa. Sea $p(t)$ la proporción de la población que ha sido expuesta a la enfermedad en los t años de su introducción. Si $p'(t) = \frac{1}{5}[1 - p(t)]$ y $p(0) = 0$, encuentre $p(t)$ para $t > 0$. ¿Después de cuántos años la proporción ha crecido a 75%?

30. *(Crecimiento con inmigración)* Una población tiene tamaño $y(t)$ en el instante t. La tasa de crecimiento específico es 0.1 y debido a la inmigración, existe una captación de población a una tasa constante de r.

a) Escriba la ecuación diferencial que es satisfecha por $y(t)$ y determine su solución general.

b) Determine la solución particular en el caso cuando $r = 100$ y el tamaño inicial de la población en $t = 0$ es 2000.

31. *(Epidemias)* Considere la diseminación de una enfermedad que tiene la propiedad de que una vez que un individuo se infecta permanece todo el tiempo infectado. Aunque una pequeña proporción de la población esté infectada con la enfermedad, su diseminación puede ser modelada razonablemente mediante la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ (donde y es el número de individuos infectados al tiempo t). Obtenga y como función de t suponiendo que en el tiempo $t = 0$ hay 587 individuos infectados y en el tiempo $t = 1$ año hay 831 individuos infectados en la población.

***32.** *(Flujo de contaminación)* Un lago pequeño con un volumen de 10^6 metros cúbicos ha sido contaminado accidentalmente por 10,000 kilogramos de una sustancia muy tóxica. Un río entra y después sale del lago a razón de 20,000 metros cúbicos por hora. Suponiendo que la entrada del río contiene agua fresca y que la sustancia tóxica se está mezclando en todo el lago, escriba una ecuación diferencial para la masa del contaminante en el lago. Encuentre la solución y calcule el número de horas para que la masa del contaminante decrezca a 100 kilogramos.

***33.** *(Contaminación)* El lago en el ejercicio 32 se recobra eventualmente del accidente por contaminación, pero después alguien construye una fábrica río arriba y empieza a arrojar mercurio en el río a razón de 0.01 kilogramos por hora. Escriba una ecuación diferencial para la masa del mercurio en el lago y encuentre su solución. ¿Cuánto mercurio contendrá el lago finalmente?

***34.** *(Medicina)* Se inyecta una sustancia en el torrente sanguíneo de un paciente a razón de R miligramos por minuto y ésta se absorbe del torrente sanguíneo a razón kM, donde k es una constante y M es el número de miligramos en el torrente sanguíneo en el tiempo t. Escriba una ecuación diferencial para $M(t)$ y encuentre la solución, suponiendo que la inyección empieza en $t = 0$. ¿Cuál es la cantidad límite de la sustancia en el torrente sanguíneo?

***35.** *(Crecimiento de capital)* Una inversión crece de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = rA + I(t)$$

donde $100r$ es la tasa de interés nominal e $I(t)$ es la tasa de inversión del capital nuevo. Resuelva esta ecuación cuando $I(t)$ es constante y $A(0) = 0$. Compare su respuesta con el ejercicio 24 de la sección 6-3.

***36.** *(Precio en un mercado no equilibrado)* Para cierto bien las ecuaciones de oferta y de demanda son las siguientes.

$$D\colon\ p + 2x_D = 25$$

$$S\colon\ p - 3x_S = 5$$

Supongamos que si el mercado no está en equilibrio ($x_D \neq x_S$), entonces, el precio cambia en razón proporcional al exceso de demanda sobre la oferta:

$$\frac{dp}{dt} = k(x_D - x_S)$$

Sustituya x_D y x_S y resuelva la ecuación diferencial resultante para $p(t)$. Pruebe que no importa cuál sea el precio inicial, el mercado se aproxima eventualmente al equilibrio en $p = 17$.

37. *(Ley de enfriamiento de Newton)* La temperatura T de un cuerpo que se está enfriando cambia de acuerdo con la ecuación diferencial $dT/dt = k(T_s - T)$, donde T_s es la temperatura ambiente. Encuentre una fórmula para $T(t)$ en el caso cuando T_s es constante y $T(0) = T_0$.

***38.** *(Utilidad y publicidad)* Suponga que las utilidades, P, de una compañía como función del gasto, A, en publicidad satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dA} = k(C - A)$$

en donde k y C son constantes positivas. Considerando el signo de dp/dA para $A < C$ y para $A > C$, proporcione el significado de la constante C. Resuelva la ecuación diferencial para $P(A)$ dado que $P(0) = P_0$. Si $P_0 = 100$, $P(100) = 1100$, $P(200) = 1600$, calcule el gasto óptimo en publicidad.

■ 6-7 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **separable** si puede expresarse en la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t)$$

Esto es, el lado derecho es el producto de una función de y por una función de t. ☛ **28**

Una ecuación separable puede resolverse moviendo todos los términos que incluyan y a la izquierda (dividiendo entre $f(y)$) y moviendo todos los términos que incluyan t a la derecha (multiplicando por dt):

$$\frac{1}{f(y)}\,dy = g(t)\,dt$$

Las variables se dice que se han **separado**. Ahora se pueden integrar ambos miembros:

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(t)\,dt$$

En la práctica, estas integrales pueden ser difíciles de integrar, o incluso imposible de evaluar, pero aparte de esta dificultad, siempre podemos resolver de esta forma una ecuación separable.

Reconocerá que éste es precisamente el método utilizado en la sección 6-6 para obtener la solución general de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$. También

☛ **28.** ¿Son separables las ecuaciones diferenciales siguientes?
a) $xy\dfrac{dy}{dx} = y + 1$
b) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$
c) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy$

Respuesta *a*) Sí *b*) no *c*) sí.

podemos utilizar este método en vez del método usado anteriormente para resolver la ecuación $dy/dt = ky + b$. Podemos separar las variables en esta ecuación escribiéndola como

$$\frac{1}{ky + b}\, dy = dt$$

Entonces, integrando ambos lados obtenemos $\int \frac{1}{ky + b}\, dy = \int dt$, o suponiendo que $y + \frac{b}{k} > 0$,

$$\frac{1}{k} \ln\left(y + \frac{b}{k}\right) = t + B$$

en donde B es una constante arbitraria. Resolviendo esto para y, obtenemos

☛ **29.** Determine la solución general de la ecuación diferencial $xy\frac{dy}{dx} = y + 1$ para el caso $y > -1$

$$y + \frac{b}{k} = e^{kt+kB} = Ce^{ky}$$

donde $C = e^{kB}$. Ésta es la misma solución que antes. Le dejamos que verifique que esta misma forma se obtiene para la solución si $y + b/k < 0$. ☛ **29**

EJEMPLO 1 Determine la solución de la ecuación diferencial

$$e^x \frac{dy}{dx} = y^2$$

que satisface la condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$.

Solución Observe que aquí la variable independiente es x, no t. Podemos escribir la ecuación diferencial dada como

$$\frac{1}{y^2}\, dy = \frac{1}{e^x}\, dx \quad \text{o} \quad y^{-2}\, dy = e^{-x}\, dx$$

en donde hemos separado todos los términos que contienen y en el lado izquierdo y aquellos que tienen a x en el derecho. Integrando ambos miembros, obtenemos

$$\int y^{-2}\, dy = \int e^{-x}\, dx$$

Por tanto,

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{e^{-x}}{-1} + C \quad \text{o} \quad \frac{1}{y} = e^{-x} - C$$

donde C es una constante de integración. Resolviendo para y obtenemos

Respuesta $y - \ln(y + 1) = \ln x + C$, o de manera equivalente, $x(y + 1)e^{-y} = B$

$$y = \frac{1}{e^{-x} - C} = \frac{e^x}{1 - Ce^x}$$

Para determinar C utilizamos la condición inicial. Haciendo $y = 2$ y $x = 0$ en la solución general, tenemos

$$2 = \frac{e^0}{1 - Ce^0} = \frac{1}{1 - C}$$

de la cual se sigue que $C = \frac{1}{2}$. Sustituyendo esto en la solución general,

$$y = \frac{e^x}{1 - \frac{1}{2}e^x}$$

que proporciona la solución particular para las condiciones iniciales dadas.

EJEMPLO 2 ***(Función de demanda)*** Si la elasticidad de la demanda para cierto bien es $-\frac{1}{2}$ para todos los valores de su precio unitario, determine la relación de demanda.

Solución Sea x el número de unidades demandadas al precio p. Sabemos que la elasticidad de la demanda η está dada por medio de la fórmula

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

(Véase la sección 4-3). Como $\eta = -\frac{1}{2}$ tenemos que la ecuación diferencial

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{x}{2p}$$

Separando las variables,

$$\frac{2}{x}\,dx = -\frac{1}{p}\,dp$$

e integrando ambos miembros,

$$\int \frac{2}{x}\,dx = -\int \frac{1}{p}\,dp \quad \text{o} \quad 2 \ln x = -\ln p + C$$

en donde C es la constante de integración. Entonces, combinando los logaritmos tenemos $\ln (px^2) = C$. Podemos escribir esto en forma exponencial como

$$px^2 = D$$

donde $D = e^C$. Nuevamente D es una constante arbitraria que no puede determinarse sin información adicional. Ésta es la relación de demanda requerida.

Ecuación diferencial logística

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) \tag{1}$$

en donde p y m son constantes, se denomina **ecuación logística**. Su importancia provino originalmente por ser un modelo de crecimiento poblacional en un ambien-

te restringido, pero se han encontrado varias aplicaciones subsecuentes. Algunas de estas aplicaciones adicionales se encontrarán en los ejercicios.

La ecuación diferencial $dy/dt = ky$ se aplica a una población cuando el ambiente no restringe su crecimiento. Sin embargo, en la mayor parte de los casos, se alcanza una etapa en donde ya no es posible un crecimiento adicional de la población, y el nivel del tamaño de la población se nivela en algún valor que es la población máxima (población límite) que puede sustentarse por el ambiente dado. Denotemos este valor máximo por m. Entonces, cualquier ecuación diferencial que describa el crecimiento debe satisfacer la condición de que la tasa de crecimiento se aproxima a cero conforme y se aproxima a m; esto es,

$$\frac{dy}{dt} \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to m$$

Además, si para alguna elección del tamaño de la población sucede que excede m, entonces, ésta debe decrecer; esto es,

$$\frac{dy}{dt} < 0 \quad \text{si} \quad y > m$$

Observe que la ecuación diferencial (1) satisface estos requisitos.

También existe un requisito adicional, que cualquier modelo razonable de crecimiento poblacional debe satisfacer. Si el tamaño de la población es muy pequeño, entonces las restricciones impuestas por el medio ambiente tendrán un efecto insignificante, y el crecimiento será aproximadamente exponencial. En la ecuación (1), si y es mucho menor que m, entonces $m - y \approx m$, y la ecuación diferencial se transforma en aproximadamente

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy$$

En realidad, esto da un crecimiento poblacional aproximado y la tasa de crecimiento específico es $k = pm$. La ecuación logística (1) no es la única ecuación diferencial que satisface estos requerimientos para crecimiento restringido, pero es la ecuación más sencilla que lo hace.

Ahora pasamos a la solución de la ecuación logística. Deduciremos la solución para constantes generales m y p, pero si tiene alguna dificultad en seguir esto, trate de examinar primero el argumento con algunos valores particulares, tales como $m = 2$ y $p = 3$. Separando las variables en (1),

$$\frac{1}{y(m - y)}\, dy = p\, dt$$

e integrando ambos miembros,

$$\int \frac{1}{y(m - y)}\, dy = \int p\, dt$$

Aquí, la integral del lado izquierdo puede evaluarse usando la fórmula 15 del apéndice II. Sin embargo, en vez de esto, le mostraremos un método útil para encontrar tales integrales (de hecho, ésta es la manera en que se dedujo la fórmula 15). El tru-

co es expresar el integrando en términos de fracciones parciales. En el caso que tenemos, es fácil ver que

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{m - y} = \frac{m}{y(m - y)}$$

(Simplemente, combine las dos fracciones de la izquierda con su común denominador). Así, después de multiplicar todo por m, la ecuación integrada anterior se transforma en

$$\int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{m - y}\right] dy = \int mp\, dt$$

Ahora podemos integrar ambos miembros, y obtenemos

$$\ln y - \ln (m - y) = mpt + B$$

en donde B es la constante de integración. Aquí, hemos supuesto que $0 < y < m$ de modo que los argumentos de los logaritmos son positivos y no necesitamos utilizar signos de valor absoluto. Combinando los logaritmos y haciendo $k = mp$, obtenemos

$$\ln\left(\frac{y}{m - y}\right) = kt + B$$

Así,

$$\frac{y}{m - y} = e^{B+kt} = e^B e^{kt} = A^{-1}e^{kt}$$

donde hemos escrito $A^{-1} = e^B$. La razón para definir A como esto es para hacer más sencilla la respuesta final. Luego resolviendo para y, obtenemos

$$Ae^{-kt}y = m - y, \quad y(1 + Ae^{-kt}) = m, \quad y = \frac{m}{1 + Ae^{-kt}} \tag{2}$$

Ésta es la forma usual en la que se da la solución general y con frecuencia se conoce como la función logística. La constante A se determina como es usual a partir del valor inicial de y.

☛ **30.** Determine la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y(y - 1)$ para el caso cuando $0 < y < 1$

Lo dejamos como un ejercicio para usted, con la finalidad de que verifique que la solución general aún esta dada por medio de la fórmula (2) en el caso cuando $y > m$, la única diferencia es que la constante A es negativa. ☛ **30**

EJEMPLO 3 ***(Crecimiento exponencial)*** Para cierta población de conejos el crecimiento sigue la ecuación logística (1) con la constante $k = pm$ teniendo el valor 0.25 cuando el tiempo se mide en meses. La población de manera repentina, por una epidemia de mixamatosis, se reduce de su valor estable m a un tamaño igual al 1% de m. ¿Cuántos meses pasarán para que la población se recupere al 90% de su valor máximo? Determine una expresión para el tamaño de la población después de t meses.

Solución El tamaño de la población $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) = \frac{0.25}{m}y(m - y)$$

Respuesta $y = \frac{1}{1 + Ae^t}$

ya que se da $p = k/m = 0.25/m$. Separando las variables, obtenemos

$$\frac{m}{y(m-y)}\,dy = 0.25\,dt$$

y procediendo para integrar ambos lados utilizando fracciones parciales en el lado izquierdo, como lo hicimos anteriormente, llegamos al resultado

$$\ln\left(\frac{y}{m-y}\right) = 0.25t + C \tag{i}$$

En este problema, $y > 0$ y $y < m$, así que el argumento del logaritmo es positivo y no requerimos de signos de valor absoluto. En $t = 0$, el tamaño inicial es $y = 0.01m$ y la sustitución de estos valores permite que C se determine:

$$\ln\left(\frac{0.01m}{m-0.01m}\right) = 0.25(0) + C$$

o $C = -\ln 99$. Sustituyendo este valor de C en (i) y combinando los logaritmos, podemos escribir la solución como

$$\ln\left(\frac{99y}{m-y}\right) = 0.25t$$

La primera parte de la pregunta puede responderse de manera directa a partir de esta ecuación. La población alcanza 90% de su tamaño máximo cuando $y = 0.9m$, y obtenemos

$$0.25t = \ln\left(\frac{99(0.9m)}{m-0.9m}\right) = \ln 891$$

De aquí, $t = 4\ln 891 \approx 27.2$. Así que toma 27.2 meses para que la población se recupere al 90% de su valor máximo.

Para completar la solución para y, la escribimos como

$$\frac{99y}{m-y} = e^{0.25t}$$

y entonces de ésta despejamos a y. El resultado es

$$y = \frac{m}{1 + 99e^{-0.25t}}$$

EJERCICIOS 6-7

(1-10) Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $dy/dx = xy$ **2.** $dy/dx = x + xy$

3. $dy/dt + 2ty^2 = 0$ **4.** $dy/dt = e^{t+y}$

5. $dy/dt = 3t^2e^{-y}$ **6.** $dy/dt + 6t^2\sqrt{y} = 0$

7. $dy/dt = y(y-1)$ **8.** $dy/dt + y^2 = 4$

9. $t\,dy/dt + ty = y$ **10.** $t\,dy/dt - ty = 2y$

(11-18) Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

11. $dy/dx = 2xy$ $y = 1$ cuando $x = 0$

12. $dy/dt = y/\sqrt{t}$; $y = e$ cuando $t = 0$

13. $dy/dt = 3t^2y$; $y = 2$ cuando $t = 0$

14. $dy/dx = y(y - 1), y > 1$; $y = 2$ cuando $x = 0$

15. $dy/dt = 2y(3 - y), 0 < y < 3$; $y = 2$ cuando $t = 0$

16. $2\, dy/dt = y(4 - y), y > 4$; $y = 2$ cuando $t = 0$

17. $dy/dt = te^{t+y}$; $y = 0$ cuando $t = 0$

18. $du/dy = e^{u-y}$; $u = 0$ cuando $y = 0$

19. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien es $\eta = -\frac{2}{3}$. Determine la relación de demanda $p = f(x)$, si $p = 2$ cuando $x = 4$.

20. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien está dada por $\eta = -2$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $p = \frac{1}{2}$ cuando $x = 4$.

21. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda para cierto bien está dada por $\eta = (x - 200)/x$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $0 < x < 200$ y $p = 5$ cuando $x = 190$.

22. *(Elasticidad)* La elasticidad de la demanda es $\eta = p/(p - 10)$. Determine la función de demanda $p = f(x)$, si $0 < p < 10$ y $p = 7$ cuando $x = 15$.

23. *(Bioquímica)* De acuerdo con la ecuación de Michaelis-Menten, la velocidad a la que ocurre una reacción de enzimas está dada por

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{My}{K + y}$$

en donde M y K son constantes y y es la cantidad del sustrato presente en el instante t que será transformado por la enzima. Determine una ecuación implícita para expresar y como una función de t.

24. *(Modelo de crecimiento limitado)* El modelo de crecimiento limitado de von Bertalanffy puede obtenerse a partir de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3ky^{2/3}(y_m^{1/3} - y^{1/3})$$

Determine una expresión para y como función de t. (*Sugerencia:* Sustituya $y^{1/3} = u$ en la integral que se evaluará).

25. *(Modelo logístico)* En un pueblo cuya población es 2000, la propagación de una epidemia de influenza sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(2000 - y)$$

en donde y es el número de personas infectadas en el instante t (t se mide en semanas) y $p = 0.002$. Si inicialmente dos personas estaban enfermas, encuentre y como una función de t. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que tres cuartos de la población esté infectada?

26. *(Modelo logístico)* Podemos construir un modelo sencillo de la propagación de una infección a una población de la siguiente manera. Sea n el número total de individuos susceptibles (*i.e.*, no inmunes) en la población original. Sea $y(t)$ el número de individuos infectados en el instante t. Entonces $n - y(t)$ proporciona el número de susceptibles que permanecen sin infectarse. El modelo consiste en formular

$$\frac{dy}{dt} = ky(n - y)$$

en donde k es una constante. (Observe que dy/dt es la velocidad de propagación de la infección). Determine la solución para y como una función de t, y haga un bosquejo de su gráfica.

27. *(Modelo logístico)* Una población que está creciendo de acuerdo con la ecuación diferencial $dy/dt = 0.1y(1 - 10^{-6}y)$ cuando t se mide en años. ¿Cuántos años le tomará a la población aumentar desde un tamaño inicial de 10^5 a un tamaño de 5×10^5?

■ 6-8 APLICACIONES A PROBABILIDAD (SECCIÓN OPCIONAL)

La probabilidad se ocupa de observaciones o mediciones tomadas de situaciones en que el resultado tiene algún grado de impredicibilidad. En tales casos empleamos el término *variable aleatoria* para denotar una variable, cuyo valor medido puede variar de una observación a otra. Por ejemplo, si se lanza un dado estándar, el número de puntos que aparecen es una variable aleatoria; la cara que cae hacia arriba puede mostrar cualquiera de los valores 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En contraste con esto, se presentan muchas situaciones u observaciones en que la variable aleatoria puede tomar cualquier valor de un conjunto de valores *con-*

tinuos de un intervalo dado. Por ejemplo, si la variable aleatoria X denota la altura (en pies) de una persona adulta aleatoriamente seleccionada en Nueva York, entonces X puede tomar cualquier número real situado en el intervalo $3 \leq X \leq 8$ (suponiendo que el adulto más bajo tiene, al menos, una estatura de 3 pies y el más alto a lo más 8 pies de estatura). En tal caso, la variable aleatoria se conoce como *variable aleatoria continua.*

Al manejar una variable aleatoria continua por lo regular nos interesa la probabilidad de que el valor medido caiga en algún intervalo dado. Por ejemplo, podríamos necesitar conocer la probabilidad de que un adulto de Nueva York tenga una estatura entre 6 y 6.5 pies. (Estas preguntas se las formulan los fabricantes de ropa). En general, si X es una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $a \leq X \leq b$, estaremos interesados en la probabilidad de que el valor medido de X esté entre c y d, con $c \leq d$ dos números entre a y b. Escribimos esta probabilidad como $P(c \leq X \leq d)$.

En el caso de la mayoría de las variables aleatorias continuas existe una función $f(x)$ denominada *función de densidad de probabilidad** tal que su probabilidad está determinada por la siguiente integral definida:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\, dx \tag{1}$$

Puesto que la probabilidad de la izquierda debe ser no negativa para todos los valores de c y d ($c \leq d$), el integrando no puede ser negativo. Esto es,

$$f(x) \geq 0 \tag{2}$$

en todos los valores de x en que esté definida.

En vista de la relación entre integrales definidas y áreas bajo curvas, advertimos que $P(c \leq X \leq d)$, como se da en la ecuación 1, es igual al área bajo la gráfica $y = f(x)$ situada entre las líneas verticales $x = c$ y $x = d$. (Véase la figura 24). Esta asociación de probabilidades con áreas bajo la gráfica de f es la que da a la función de densidad su utilidad.

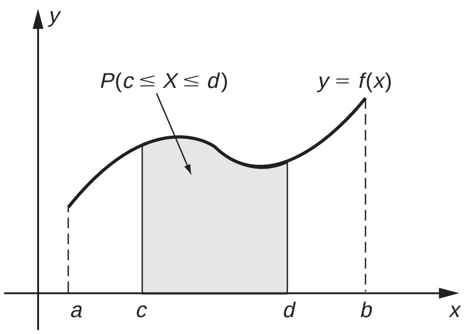


FIGURA 24

*Abreviada f.d.p. El estudiante debe tener cuidado pues algunos autores escriben f.d.p. con el significado ''función de distribución de probabilidad'', que es distinto del que tiene la función densidad de probabilidad.

☛ **31.** Para la función de densidad de probabilidad $f(x) = 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, calcule las probabilidades

a) $P(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$

b) $P(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$

c) $P(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4})$

Respuesta *a*) $\frac{1}{4}$ *b*) $\frac{3}{4}$ *c*) $\frac{5}{16}$

☛ **32.** Determine c tal que $f(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}x$ sea una función de densidad de probabilidad del intervalo $0 \leq x \leq c$

Respuesta $c = 2$
(si $c = 3$, $f(x)$ toma valores negativos)

Debido a que el evento de que la variable aleatoria X esté en su intervalo total $[a, b]$ es seguro que ocurra, entonces, su probabilidad es 1. Esto es,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx = 1 \tag{3}$$

En otras palabras, el área total bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ debe ser igual a 1. ☛ **31**

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$. Determine la constante c de modo que $f(x)$ represente la f.d.p. de alguna variable aleatoria continua en el intervalo $0 \leq x \leq c$. Calcule también la probabilidad de que esta variable aleatoria tome un valor menor que $c/3$.

Solución Si $f(x)$ representa una f.d.p. en el intervalo $0 \leq x \leq c$, debe tenerse que

$$1 = \int_0^c f(x)\, dx = \int_0^c \tfrac{1}{4}(2x + 3)\, dx = \tfrac{1}{4}\Big[(x^2 + 3x)\Big]_0^c = \tfrac{1}{4}(c^2 + 3c)$$

o $c^2 + 3c - 4 = 0$. Por consiguiente,

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = 1, -4$$

Puesto que el valor requerido de c no puede ser negativo en el problema, el único valor posible de c es 1. Incluso debemos verificar que $f(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$ sea no negativa en $0 \leq x \leq 1$. Esto es cierto, como puede advertirse de la gráfica de $f(x)$ que aparece en la figura 25. Así,

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(2x + 3) \text{ sobre } 0 \leq x \leq c$$

representa una f.d.p. con tal que $c = 1$

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{c}{3}\right) &= P(0 \leq X < \tfrac{1}{3}) \\ &= \int_0^{1/3} f(x)\, dx = \int_0^{1/3} \tfrac{1}{4}(2x + 3)\, dx \\ &= \Big[\tfrac{1}{4}(x^2 + 3x)\Big]_0^{1/3} = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{9} + 1) = \tfrac{5}{18} \end{aligned}$$

☛ **32**

Describiremos ahora algunas distribuciones de probabilidad ampliamente utilizadas. La primera de ellas es la *distribución uniforme*, que describe una situación o experimento en que los resultados del intervalo $a \leq x \leq b$ son igualmente posibles de que ocurran. La f.d.p. en este caso es simplemente la función constante dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

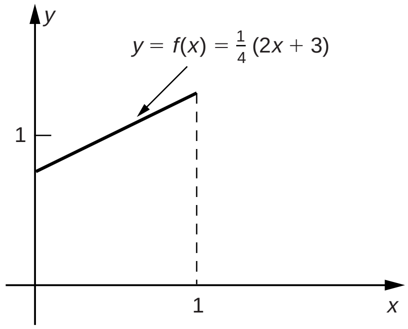


FIGURA 25

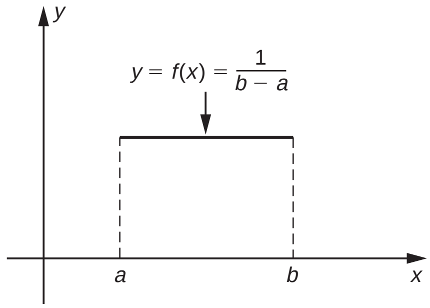


FIGURA 26

La gráfica de una función de densidad uniforme es como se muestra en la figura 26. La función $f(x)$ es sin duda una densidad, porque $f(x) \geq 0$ sobre $a \leq x \leq b$ (dado que $b - a > 0$) y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

EJEMPLO 2 ***(Tiempo de espera)*** El autobús urbano parte de la terminal de la ciudad universitaria hacia el centro de la ciudad cada 20 minutos. Un estudiante llega a la parada del autobús al azar y lo espera. ¿Cuál es la probabilidad de que deba esperar al menos 5 minutos antes de abordar el autobús?

Solución La variable aleatoria X, que es el tiempo de espera hasta la llegada del próximo autobús, está distribuida uniformemente en el intervalo $0 \leq X \leq 20$. Así que la f.d.p. está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{para } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

En consecuencia,

$$P(X \geq 5) = \int_5^{20} f(x)\,dx$$
$$= \int_5^{20} \frac{1}{20}\,dx = \left[\frac{x}{20}\right]_5^{20} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{4} \quad ☛ \textbf{ 33}$$

☛ **33.** Escriba la función de densidad de probabilidad uniforme $f(x)$ en el intervalo $1 \leq x \leq 9$ Determine $P(2 \leq x \leq 5)$

Respuesta $f(x) = \frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$

A menudo necesitamos considerar variables aleatorias continuas, cuyos valores no están en un intervalo finito $a \leq X \leq b$ sino en un intervalo semiinfinito del tipo $a \leq X < \infty$ o el intervalo infinito completo $-\infty < X < \infty$. En tales casos, debemos hacer que $b \to \infty$ y (en el segundo caso) $a \to -\infty$; entonces, ciertas probabilidades están dadas por integrales impropias (véase la sección 6-2). Por ejemplo, si X asume valores en $-\infty < X < \infty$, entonces, la probabilidad de que $X \leq d$ está dada por

$$P(X \leq d) = \int_{-\infty}^{d} f(t)\,dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^d f(t)\,dt$$

Una segunda distribución de probabilidad que tiene múltiples aplicaciones es la denominada *distribución exponencial* y la f.d.p. en este caso es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\, e^{-x/k} & \text{para } 0 \le x < \infty \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

en donde k es cierta constante positiva. Es claro que, $f(x) \ge 0$ y

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{k}\, e^{-x/k}\, dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x/k}\Big]_0^b = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b/k} + e^0) = 1$$

debido a que $e^{-b/k} \to 0$ cuando $b \to \infty$ y $e^0 = 1$. Así que $f(x)$, tal como se definió, satisface las dos condiciones requeridas por una función de densidad. La gráfica de una función de densidad típica aparece en la gráfica 27. ☛ **34**

☛ **34.** ¿Para qué valor de A es $f(x) = \dfrac{Ax}{(1 + x^2)^2}$ una función de densidad de probabilidad en el intervalo $0 \le x < \infty$? Evalúe $P(0 \le x \le 2)$

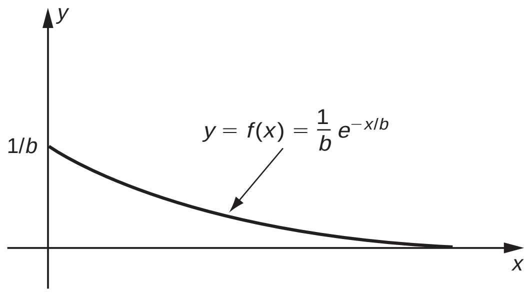


FIGURA 27

EJEMPLO 3 ***(Vida útil de focos incandescentes)*** El tiempo de vida útil de cierto tipo de focos incandescentes (en horas) obedece una distribución exponencial cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{200}\, e^{-x/200} \qquad 0 \le x < \infty$$

Determine la probabilidad de que un foco incandescente aleatoriamente seleccionado dure: *a*) más de 100 horas pero menos de 300 horas; *b*) más de 200 horas.

Solución Si X denota la vida útil de un foco aleatoriamente seleccionado, se sigue que la probabilidad de que la vida útil esté entre los dos valores dados c y d es

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d \frac{1}{200}\, e^{-x/200}\, dx$$

$$= \frac{1}{200}\Big[-200e^{-x/200}\Big]_c^d = e^{-c/200} - e^{-d/200}$$

a) Haciendo $c = 100$ y $d = 300$, obtenemos

$P(100 \le X \le 300) = e^{-100/200} - e^{-300/200} = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0.38$

b) Tomando $c = 200$ y haciendo que $d \to \infty$, resulta que

Respuesta $A = 2$
$P(0 \le x \le 2) = \frac{4}{5}$

$$P(X \geq 200) = \lim_{d\to\infty} P(200 \leq X < d)$$
$$= \lim_{d\to\infty} (e^{-200/200} - e^{-d/200}) = e^{-1} \approx 0.37$$

ya que $e^{-d/200} \to 0$ cuando $d \to \infty$

La distribución de probabilidad exponencial es de gran importancia y tiene múltiples aplicaciones. El ejemplo del foco incandescente es representativo de un rango de aplicaciones en problemas de confiabilidad (esto es, problemas en que nos interesa la probabilidad de falla de algún componente o sistema). Otra área de aplicación de esta distribución se relaciona con la ocurrencia de eventos aleatorios en el tiempo. Por ejemplo, podríamos considerar la variable T como el tiempo transcurrido antes del siguiente desastre en una refinería de petróleo. Entonces, T se comportará como una distribución exponencial.

En el ejemplo 3 determinamos las probabilidades de que la vida útil de un foco incandescente aleatoriamente seleccionado esté entre 100 y 300 horas o sobrepase las 200 horas. Otra pregunta que podríamos formular es: ¿Cuál es la vida útil promedio de los focos? La respuesta a esta pregunta requiere del concepto de **valor esperado** o **media** de una variable aleatoria X que en general se denota por μ (léase ‘‘mu’’). Esta cantidad se define por

$$\boxed{\mu = \int_a^b xf(x)\,dx}$$

en donde $f(x)$ es la f.d.p. El significado de μ es que mide el valor promedio de la variable aleatoria si se realizaran un gran número de mediciones.

EJEMPLO 4 Sea X la vida útil en horas de un foco incandescente de cierto tipo aleatoriamente seleccionado. La función de densidad de probabilidad de X es $f(x) = (1/k)e^{-x/k}$, en donde k es una constante conocida. Determine la media de X, esto es, la vida útil promedio de los focos incandescentes en cuestión.

Solución

$$\mu = \int_a^b xf(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{k}\,e^{-x/k}\,dx$$

Observe que los límites de integración son 0 e ∞ ya que la vida útil puede ser cualquier número real positivo. A partir de la fórmula 69 del apéndice II con $a = -1/k$ (o usando integración por partes) obtenemos el resultado

$$\int_0^\infty xe^{-x/k}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b xe^{-x/k}\,dx\right] = \lim_{b\to\infty}\Big[(-kx - k^2)e^{-x/k}\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} [(-kb - k^2)e^{-b/k} + k^2] = k^2$$

El valor de la integral en el límite superior es cero puesto que $e^{-x/k} \to 0$ y $xe^{-x/k} \to 0$ cuando $x \to \infty$. (En general, $x^n e^{-cx} \to 0$ cuando $x \to \infty$ para cualesquiera valores positivos de n y c). En consecuencia,

$$\mu = \frac{1}{k}\int_0^\infty xe^{-x/k}\,dx = k$$

☛ **35.** Determine el valor esperado para
a) la densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[a, b]$;
b) la función de densidad de probabilidad $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(t/2)x^2}$ en el intervalo $[0, \infty)$

La constante k que aparece en la función de densidad representa la vida útil media de los focos. Por ejemplo, si la función densidad es $f(x) = (1/200)e^{-x/200}$, la vida media útil sería de 200 horas. ☛ **35**

Recordemos que hemos definido la distribución exponencial correspondiente a la función de densidad $f(x) = (1/k)e^{-x/k}$. Probamos ahora que la distribución exponencial tiene media $\mu = k$. Debido a esto, el parámetro k a menudo se reemplaza por el símbolo μ y la función de densidad se escribe en la forma

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{-x/\mu}$$

EJEMPLO 5 Los consumidores llegan a cierta gasolinería de acuerdo con la distribución exponencial con un promedio de 20 clientes por hora. Si el encargado deja su puesto para fumarse rápidamente un cigarrillo en 2 minutos, encuentre la probabilidad de que llegue un cliente mientras no está el encargado.

Solución Puesto que llegan en promedio 20 consumidores cada hora, el tiempo promedio entre llegadas es de $\frac{1}{20}$ de hora o 3 minutos. Por eso, definiendo la variable aleatoria como el lapso hasta que el próximo consumidor llegue, X estará distribuida exponencialmente con $\mu = 3$. Por tanto, la f.d.p. es

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\, e^{-x/\mu} = \frac{1}{3}\, e^{-x/3}$$

La probabilidad de que un cliente llegue en menos de 2 minutos es

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\, e^{-x/3}\, dx = \Big[-e^{-x/3}\Big]_0^2 = 1 - e^{-2/3} \approx 0.49$$

Así el encargado tiene 51% de posibilidades de poder fumar sin que llegue ningún consumidor.

Concluimos esta sección después de haber descrito brevemente una de las distribuciones más empleadas: la **distribución normal**. La f.d.p. en este caso está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

en donde μ denota la media de la variable aleatoria normal. La gráfica de $f(x)$ es la bien conocida curva en forma de campana que es simétrica con respecto a la línea $x = \mu$; como se observa en la figura 28.

El parámetro σ (sigma) que aparece en la función densidad de la variable aleatoria normal se denomina *desviación estándar.* Representa una medida del ancho de

Respuesta *a*) $\frac{1}{2}(a + b)$
b) $\sqrt{2/\pi}$

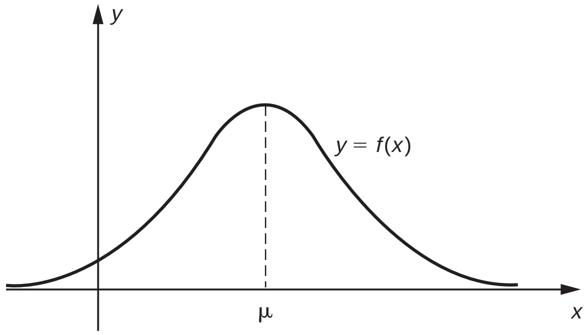


FIGURA 28

la curva con forma de campana. Si σ es muy pequeña, la curva es una campana espigada, lo cual significa que los valores medidos de la variable aleatoria casi siempre estarán muy cerca de μ. Si σ es grande, la curva es baja y extendida. En este caso, las mediciones se localizan bastante esparcidas, con frecuencia lejos de la media μ.

La probabilidad de que una variable normal X tome cualquier valor entre c y d está dada por el área bajo la curva situada entre $x = c$ y $x = d$, esto es,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

El caso especial $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se denomina **distribución normal estándar**. Denotando, en este caso, la variable aleatoria por Z tenemos

$$P(c \leq Z \leq d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-x^2/2}\, dx$$

Esta integral no puede evaluarse usando métodos elementales, sino que debe evaluarse numéricamente, como en la sección 6-5. Sus valores pueden encontrarse en cualquier libro de estadística elemental.

EJERCICIOS 6-8

(1-8) En cada uno de los siguientes ejercicios, determine la constante c de modo que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad en el intervalo dado. Encuentre también la media μ en cada caso.

1. $f(x) = cx(3 - x)$ sobre $0 \leq x \leq 3$

2. $f(x) = \frac{1}{4}x + c$ sobre $-1 \leq x \leq 1$

3. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-cx}$ sobre $0 \leq x < \infty$

4. $f(x) = ce^{-3x}$ sobre $0 \leq x < \infty$

5. $f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)$ sobre $0 \leq x \leq c$

6. $f(x) = \frac{1}{12}(2x + 1)$ sobre $0 \leq x \leq c$

7. $f(x) = \dfrac{c}{(1 + x)^4}$ sobre $0 \leq x < \infty$

(*Sugerencia:* Haga $u = 1 + x$ en la integral para μ).

8. $f(x) = \dfrac{c}{(x - 2)^5}$ sobre $3 \leq x < \infty$

9. Dado que $f(x) = 2x - 4$ en $0 \leq x \leq c$ y $\int_0^c f(x)\, dx = 1$, determine c. ¿Es $f(x)$ una f.d.p.? Si es así, calcule $P(X \leq c/3)$.

10. Dado que $f(x) = \frac{1}{6}(4x + 1)$ en $0 \leq x \leq c$ y que $\int_0^c f(x)\,dx = 1$, determine c. ¿Es $f(x)$ una f.d.p.? Si es así, encuentre $P(c/3 \leq X \leq 2c/3)$.

11. Determine la media de una distribución uniforme definida en el intervalo $a \leq x \leq b$.

12. *(Tiempo de espera en una parada de autobús)* Una persona llega a la parada de autobús más cercana (al azar) y espera el autobús proveniente del centro de la ciudad, el cual sale cada media hora.

a) Calcule la probabilidad de que deba esperar: (**i**) a lo más 10 minutos antes de abordar el autobús; (**ii**) al menos 5 minutos antes de que llegue el autobús; (**iii**) al menos cinco minutos pero no más de 15 minutos.

b) ¿Cuál es el tiempo promedio de espera en este caso?

13. *(Tiempo de espera en aeropuertos)* El servicio aéreo de Montreal a Nueva York se presta cada hora. Una persona que no conoce el programa, llega al aeropuerto al azar y espera volar a Nueva York.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar: (**i**) entre 10 y 20 minutos; (**ii**) a lo más 15 minutos; (**iii**) no menos de 40 minutos?

b) ¿Cuál es el tiempo promedio en este caso?

14. *(Tiempo promedio de viaje)* Dependiendo de las condiciones del tránsito, a Susana le lleva entre 25 y 40 minutos conducir desde su casa al colegio. Si ella deja su casa a las 9:00 a.m. para su clase de las 9:30, ¿cuál es la probabilidad de que no llegue tarde a su clase? ¿Cuál es el tiempo promedio de viaje de su casa al colegio? (Suponga una distribución uniforme).

15. *(Distribución uniforme)* Cierta máquina completa su operación cada 20 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega al azar deba esperar al menos 5 minutos para que se complete la operación? Calcule la media del tiempo de espera.

16. *(Distribución uniforme)* En término medio el peso de los huevos se distribuye uniformemente entre 38 y 42 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que un huevo elegido al azar pese más de 40 gramos? ¿Cuál es el peso promedio de estos huevos?

17. *(Duración de llamadas telefónicas)* Si X denota la duración de las llamadas telefónicas realizadas por los empleados de cierta empresa, se sabe que X obedece una distribución exponencial con f.d.p.

$$f(x) = 0.4e^{-0.4x}$$

Indique la probabilidad de que una llamada aleatoria:

a) Dure al menos 5 minutos.

b) No dure más de 3 minutos.

18. *(Vida útil de automóviles)* Si X es la vida útil (en años) de cierto modelo de automóviles, se sigue que la función de densidad de X es $\frac{1}{8}e^{-x/8}$. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos automóviles dure:

a) menos de 5 años?

b) más de 10 años?

19. *(Errores tipográficos)* La variable aleatoria X denota el número de palabras con que cierta mecanógrafa comete algún error. La función de densidad de X es $c^{-1}e^{-x/c}$, en donde $c = 1000$. ¿Cuál es la probabilidad de que la mecanógrafa no cometa el siguiente error antes de escribir 200 palabras?

20. *(Reclamaciones a compañías de seguros)* Una gran compañía de seguros clasifica un accidente como ‘‘catastrófico’’ si da como resultado demandas que excedan los 10 millones de dólares. El intervalo de tiempo T (medido en meses) entre tales catástrofes es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es $\frac{1}{20}e^{-t/20}$. Calcule:

a) $P(10 \leq T \leq 20)$

b) $P(T \geq 15)$

21. *(Póliza de garantía de un producto)* La empresa Electrónica de Occidente, que fabrica televisores, descubre a partir de datos previos que el tiempo en que sus televisores nuevos requieren la primera reparación mayor puede describirse mediante una función de densidad exponencial $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$ (x está en años).

a) Si la empresa garantiza sus aparatos por 2 años, ¿qué proporción de televisores les devolverán requiriendo reparaciones mayores durante el periodo de garantía?

b) Si la empresa vende 10,000 aparatos, ¿cuántos televisores puede esperar que le devolverán exigiendo reparaciones dentro del primer año después de la venta?

22. *(Póliza de garantía de un producto)* Un fabricante de automóviles sabe que el tiempo en que su nuevo automóvil requerirá una reparación mayor está descrito por la función de densidad exponencial

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-x/5}$$

Si el fabricante vende 20,000 automóviles en un año determinado y dio un año de garantía por lo que respecta a reparaciones mayores, ¿qué número de automóviles puede esperar que necesiten su primera reparación mayor durante este periodo de garantía?

23. *(Distribución uniforme)* El peso de los huevos de tipo mediano se distribuye uniformemente. Si uno de tales huevos se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 80% de dichos huevos pesen más que el elegido?

24. *(Distribución del ingreso)* Sea X el ingreso de una familia elegida aleatoriamente en cierto país (en miles de dólares). Si la función de densidad de X es $\dfrac{1}{100}xe^{-x/10}$, determine la probabilidad de que:

a) X esté entre 10 y 20

b) X sea mayor de 10

25. *(Volumen de ventas)* El número de pares de zapatos vendidos cada día por un almacén de zapatos es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es $f(x) = cxe^{-(x/40)^2}$. Determine el valor de c. Encuentre también la probabilidad de que se vendan más de 50 pares de zapatos un día cualquiera.

26. *(Botánica)* La duración máxima de vida (medida en días) de cierta especie de plantas en un ambiente dado es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x) = \frac{1}{100}e^{-x/100}$. Determine:

a) la vida promedio de las plantas.

b) la probabilidad de que una planta dada muera dentro de 50 días.

27. *(Tiempo de digestión)* Sea T el tiempo de digestión en horas de una unidad de comida. Entonces T es una variable aleatoria y supongamos que su función de densidad de probabilidad es $f(x) = 9xe^{-3x}$ en el intervalo $0 \le x < \infty$. Encuentre $P(0 \le T \le x)$ y utilice esto para calcular:

a) La probabilidad de que una unidad de comida se digiera durante 2 horas.

b) La probabilidad de que todavía no sea digerida después de 3 horas.

28. La variable aleatoria X toma valores en el rango $0 \le X < \infty$ y $P(0 \le X \le x) = 1 - (1 + x^2)^{-1}$. Encuentre la función de densidad de probabilidad. Calcule $P(1 < X < 3)$ y $P(X = 2)$

REPASO DEL CAPÍTULO 6

Términos, símbolos y conceptos clave

6.1 Integral definida. Límites de integración, límite inferior, límite superior.
Teorema fundamental del cálculo.

6.2 Integrales impropias,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

6.3 Curva de Lorentz, coeficiente de desigualdad para la distribución del ingreso.
Curva de aprendizaje.
Valor presente de un ingreso continuo.
Superávit del consumidor y superávit del productor.

6.4 Valor promedio de una función.

6.5 Integración numérica. Regla del trapecio. Regla de Simpson.

6.6 Ecuación diferencial de orden n. Ecuación diferencial lineal.
Solución de una ecuación diferencial. Solución general, condición inicial.
Tasa de crecimiento específico.

6.7 Ecuación diferencial separable; separación de variables.
Ecuación diferencial logística, función logística.

6.8 Variable aleatoria continua, función de densidad de probabilidad (f.d.p.).
Distribuciones de probabilidad uniforme y exponencial.
Valor esperado (media) de una variable aleatoria.

Fórmulas

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, en donde $F'(x) = f(x)$

Cuando $f(x) \ge 0$, el área entre $y = f(x)$ y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. Si $f(x) \le 0$, el área es $\int_a^b - f(x)\,dx$

Propiedades de las integrales definidas:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx = 0, \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

El área entre dos curvas desde $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx$$

Valor presente $= \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$, en donde $r = R/100$

$$\text{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\,dx$$

$$\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\,dx$$

en donde $\begin{cases} p = f(x) \text{ es la relación de la demanda} \\ p = g(x) \text{ es la relación de la oferta} \\ (x_0, p_0) \text{ es el punto de equilibrio del mercado} \end{cases}$

Valor promedio de f: $\bar{f} = \dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2} h\,\{y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}\}$$

Regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3} h\,\{y_1 + y_{n+1} + 2\,(\text{Suma de } y_j \text{ para } j \text{ impar}) + 4\,(\text{Suma de } y_j \text{ para } j \text{ par})\}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky \text{ es } y = Ce^{kt}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky + b \text{ es } y = Ce^{kt} - \frac{b}{k}$$

Ecuación diferencial logística: $\dfrac{dy}{dt} = py(m - y)$

Función logística: $y = \dfrac{m}{1 + Ae^{-kt}}$ $\quad (k = pm)$

$$P(c \le x \le d) = \int_c^d f(x)\,dx, \qquad \mu = \int_c^d xf(x)\,dx$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) $\int_a^b kf(x)dx = \int_{ka}^{kb} f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)dx\right] = f'(x)$

d) Si $f(x)$ es una función continua en $a \le x \le b$, entonces, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)dx$

e) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) - f(a)$

f) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ es válida siempre y cuando $a \le c \le b$

g) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$

h) Una solución de la ecuación diferencial $12\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ es la función $y(x) = x^3$

i) La ecuación diferencial $dy/dt = e^{t+y}$ se puede resolver por el método de separación de variables.

j) La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \ln(x)$ es una ecuación logística.

k) La ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y - x$ es de segundo orden.

l) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua, entonces, el área total bajo la curva es igual a 1.

m) La probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor mayor que su media es 0.5.

n) La función $f(x) = x^2$, si $0 \le x \le 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso, puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua.

o) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, la probabilidad de que la variable tome un valor particular es cero.

p) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, el valor esperado de X se calcula mediante $\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x)$ es la f.d.p.

2. Demuestre que $\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^b \frac{1}{t}\,dt$

(3-8) En cada caso, calcule el área bajo las gráficas de las siguientes funciones entre los valores de x dados.

3. $f(x) = x \ln x$, $x = 1$, $x = e^3$

4. $f(x) = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 9$

6. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

7. $f(x) = 3xe^{-x^2}$, $x = -1$, $x = 1$

8. $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 + x^3}$, $x = 0$, $x = 2$

9. Calcule el área acotada por las curvas $y = 3 + 2x - x^2$ y $y = x^2 - 4x + 3$

10. Determine el área acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2 - x$

11. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar las primeras 400 piezas, una compañía fabricante de muebles para oficina estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 20x^{-0.20}$. Determine el número total de horas-hombre que se requerirán con la finalidad de pintar 200 piezas más.

12. *(Decisión de inversión)* Verónica Pérez está considerando la compra de un nuevo equipo de ensamblado, con un costo de $50,000. Ella estima que el equipo ahorrará dinero a la compañía a una tasa de $2000(4 + t)$ pesos anuales, en un tiempo t después de haberse adquirido. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 4 años?

13. *(SC y SP)* Si supone que se ha establecido el equilibrio del mercado, determine el superávit del consumidor y del productor, en caso de que la función de demanda sea $p = 20 - x$ y la función de oferta sea $p = \dfrac{1}{324}x^2 + 1$

14. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proproción recibe el 10% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorenz.

(15-22) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

15. $dy/dt = 3t^2$

16. $dy/dx = x(y - 1)$

17. $dy/dt + ty = y$

18. $dy/dx = e^x y$

19. $du/dt = u^2 t$, $u(0) = 1$

20. $dx/dt = t(x + 1)^2$, $x(1) = 0$

21. $dy/dx - x^3 y = 0$, $y(1) = 2$

22. $dy/dx = e^{2x-y}$, $y(0) = 0$

***23.** *(Modelo logístico)* En una ciudad cuya población es de 100,000 personas, la propagación de una epidemia de influenza sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(100{,}000 - y)$$

en donde y es el número de personas infectadas en el instante t (medido en semanas) y $p = 0.00001$. Si inicialmente diez personas estaban enfermas, determine y como función de t. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la mitad de la población esté infectada?

24. *(Capitalización continua)* Una inversión de $5,000 se invierte a una tasa continua de interés nominal del 4%.

a) Determine el valor de la inversión en cualquier instante t.

b) ¿Cuál es el valor de la inversión después de 5 años?

c) ¿Después de cuántos años el valor de la inversión se duplicará?

25. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de costo y de ingreso de una operación de perforación petrolera están dadas por $C'(t) = 9 + 2t^{1/2}$ y $R'(t) = 19 - 3t^{1/2}$, en donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. ¿Por cuánto tiempo debera continuarse la perforación? ¿Cuál será la utilidad máxima?

26. *(Tiempo de espera)* Una máquina completa su operación cada 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega al azar deba esperar a lo más 2 minutos para que se complete la operación? Determine el tiempo de espera promedio.

(27-30) Decida si cada una de las siguientes puede ser una función de densidad de probabilidad. En caso de que no lo sea, indique la razón de ello.

27. $f(x) = x^2$ en $0 \le x \le 1$

28. $f(x) = |2x - 2| - \frac{1}{2}$, para $x \in [0, 2]$

29. $f(x) = \dfrac{1}{10}(3x^2 + 1)$ para $x \in [0, 2]$

30. $f(x) = \dfrac{6}{125}x(5 - x)$ para $x \in [0, 5]$

31. La *mediana* de una variable aleatoria continua X es un valor m tal que $P(X \le m) = 0.5$. Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \dfrac{3}{32}x(4 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

***32.** Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \dfrac{1}{24}(8 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

33. *(Duración de llamadas telefónicas)* La duración, en minutos, de las llamadas telefónicas recibidas por los empleados de una empresa siguen una distribución exponencial con f.d.p.

$$f(x) = 0.5e^{-0.5x}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una llamada aleatoria recibida por un empleado de la empresa:

a) dure más de 1 minuto?

b) dure más de 3 minutos?

c) no sobrepase los dos minutos?

34. *(Rociado de insecticida)* Sea $y = f(x)$ el porcentaje de mosquitos que sobreviven después del rociado con una cantidad x de insecticida por milla cuadrada. Supongamos que $dy/dx = -ky$, donde k es una constante (llamada la ley exponencial de supervivencia). Si 2000 libras de insecticida por milla cuadrada matan a 40% de los mosquitos, ¿cuánto insecticida se necesita para matar 90% de ellos?

35. *(Tiempo de espera)* El servicio aéreo de la Ciudad de México a la ciudad de Guadalajara se presta cada hora. Una persona que no conoce el programa llega al aeropuerto al azar y espera volar a la ciudad de Guadalajara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar entre 10 y 30 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar a lo más 25 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar no menos de 15 minutos?

36. *(Ingreso promedio)* La función de demanda de un producto es $p = 33 - 0.3x$, donde x unidades pueden venderse a un precio p cada una. Determine el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $x = 50$ hasta $x = 100$.

***37.** *(Valor promedio de una inversión)* Ana Jimena invierte $10,000 al 6% compuesto continuamente. Determine el valor promedio de la inversión, si ésta se invierte durante 5 años.

38. *(Utilidad promedio)* La función de demanda del producto de una empresa es $p = 50 - 0.15x$, donde x unidades pueden venderse al precio p cada una. El costo de producir x unidades está dado por $C(x) = 1500 + 3x$. Determine la utilidad promedio en el intervalo de ventas de $x = 100$ a $x = 200$.

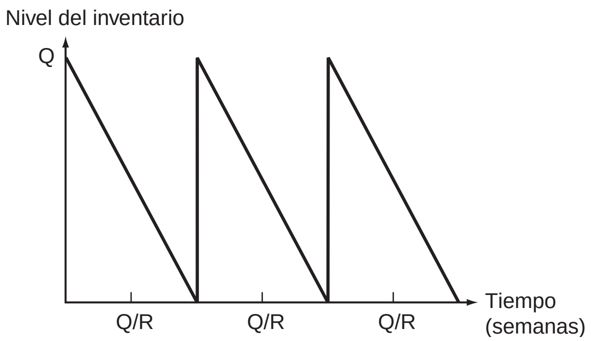
39. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$; en cada caso, tome ocho subintervalos de la misma longitud. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

40. Utilice ambas reglas, del trapecio y de Simpson, para aproximar el valor de π por medio de la aproximación del valor de la integral $\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$. En cada caso, tome 8 subintervalos iguales. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

CASO DE ESTUDIO

UN PROBLEMA DE INVENTARIO

De acuerdo con el punto 5, en la modelación del nivel de inventario, al comienzo de este capítulo se está haciendo la suposición que, al modelar, el nivel del inventario Q es una función lineal por pedazos, como se muestra en la siguiente figura.



Aquí R representa el número de cubiertas utilizadas por semana, en este caso 100 cub/semana; mientras que Q es la cantidad ordenada y t es el tiempo en semanas. Así que el nivel del inventario entre cada pedido es $L = Q - 100t$. De manera que si se hace un pedido de Q unidades, el pedido se debe hacer cada $Q/100$ semanas. El trabajo ahora es determinar el valor de Q que minimiza el costo promedio semanal de compra, y almacenar las cubiertas se denotará con CP. Por la información de la parte (4) CP es la suma de tres partes:

$$CP = \text{costo de compra/semana} + \text{costo de envío/semana} + \text{costo de mantenimiento/semana}$$

Cada parte se puede ver como el costo por "periodo" por el número de pedidos por semana, donde el periodo, Q/R, es el tiempo entre llegadas de los pedidos.

El costo de compra y el costo de envío por periodo son, $24Q$ y 400, respectivamente, de acuerdo con lo que se estableció al inicio del capítulo. Por otro lado, de acuerdo con el punto 4, para calcular el costo promedio de mantenimiento por semana, se debe calcular el valor promedio del inventario en un periodo, que se hace de la siguiente forma:

$$\frac{R}{Q}\int_0^{Q/R}(Q - Rt)dt = \frac{Q}{2}$$

así que el costo promedio de mantenimiento por periodo es

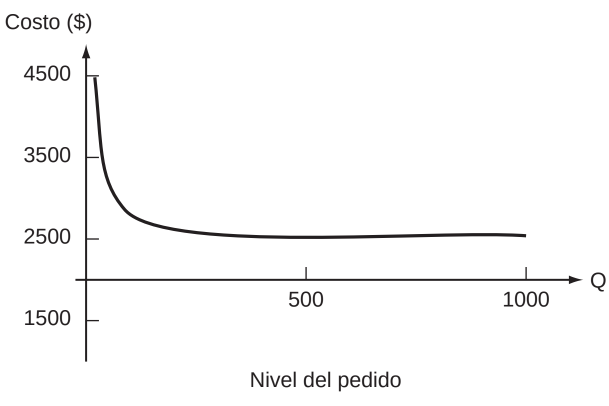
$$(0.20)\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{R}\right) = 0.20\,\frac{Q^2}{2R}$$

ya que cada periodo incluye Q/R semanas. (En esta parte es interesante notar que si se cambia la hipótesis de que la demanda es lineal, se debe calcular otra integral, quizá más complicada).

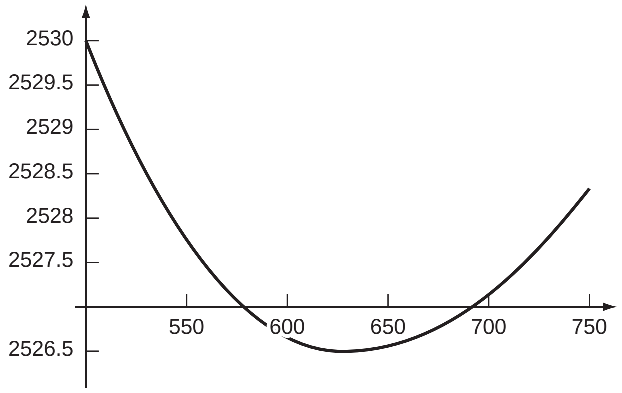
Ahora ya se puede escribir una expresión para CP; de acuerdo con lo anterior, recuerde que $R = 100$, se tiene

$$CP(Q) = \left(24Q + 400 + \frac{0.20Q^2}{2R}\right)\times\left(\frac{R}{Q}\right) = 2400 + \frac{40{,}000}{Q} + 0.10Q$$

La gráfica de la función se muestra a continuación:



No se consideran valores mayores a 1000. Con lo estudiado en el capítulo 3 se obtiene que el mínimo se obtiene para $Q^* = 632.45$ unidades. La siguiente gráfica es un acercamiento de la gráfica anterior, cerca del valor obtenido.



Así, se concluye que la cantidad óptima de pedido es Q^* $= 632$ unidades y deben pedirse cada $T^* = Q^*/100 = 6.32$ semanas. Ésta es la recomendación que debe hacerse a Víctor Daniel.

Al hacer esto, ¿cuál es el costo promedio por semana?

Por otro lado, algo muy importante que se hace con los modelos que se estudian es lo sensibles que son a cambios en sus parámetros. Por ejemplo, ¿qué sucede si la estimación que se hizo de 0.20 dólares/cubierta/semana fue muy baja y, en realidad, es de 0.30 dólares/cubierta/semana, ¿qué tanto afecta al valor óptimo que se obtuvo? Si el distribuidor eleva el costo de cada cubierta de $24 a $25, ¿cómo afecta en la decisión tomada?

Responda las preguntas anteriores, y trate de plantear y responder más preguntas que considere interesantes para el caso.

CAPÍTULO 7

Funciones de varias variables

Decisión sobre producción

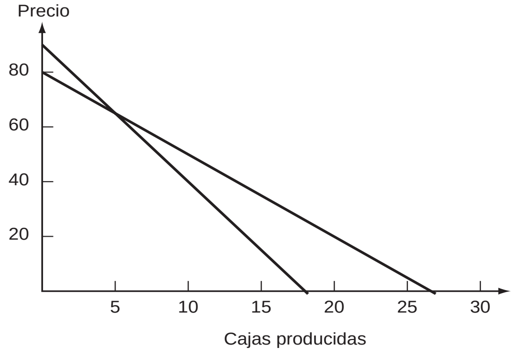
En el capítulo 3 se analizó la optimización de funciones de una variable, un tema de suma utilidad en las aplicaciones, aunque en la mayoría de éstas la función que debe optimizarse depende de más de una variable de decisión, como es el caso al que se enfrenta Alejandro Aguilera. Él trabaja para la compañía *Limpieza Perfecta*, dedicada a la producción de jabones. Una división de ésta es responsable de la fabricación de dos tipos de jabones, de tocador y para cuerpo. El precio por caja de lo que venda depende de la cantidad que produzca de cada uno de estos dos tipos de jabones. Es decir, si se decide producir x_1 cientos de cajas de jabón de tocador y x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo, podrá vender todo lo que produzca a los precios p_1 y p_2, miles de dólares 100 cajas de jabón de tocador y para cuerpo, respectivamente. Las siguientes ecuaciones relacionan los precios con la cantidad producida y vendida de jabones,

$$p_1 = 80 - 3x_1 \tag{1}$$

y

$$p_2 = 90 - 5x_2 \tag{2}$$

En la siguiente gráfica se puede observar el comportamiento del nivel de precio con respecto a la cantidad de cajas producidas.



Por otro lado, el costo de fabricación de x_1 cientos de cajas de jabón para tocador y x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo, se determinó, que está dado por

$$C(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2$$

Alejandro desea determinar cuántas cajas de cada tipo de jabón debe producir para maximizar las ganancias, si supone que puede vender todo lo que produzca, al precio dado por las relaciones (1) y (2).

A lo largo de este capítulo se desarrollará la teoría y las técnicas básicas para el estudio de funciones de varias variables, así como su aplicación en la resolución de problemas de optimización de funciones con y sin restricciones. Así que, con ayuda de lo que aprenda en este capítulo, ayude a Alejandro a resolver su problema.

TEMARIO

■ 7-1 FUNCIONES Y DOMINIOS

Hasta ahora hemos restringido nuestra atención a casos en que la variable dependiente sólo es función de una variable independiente, $y = f(x)$. Sin embargo, en muchas (quizá la mayoría) de las aplicaciones debemos afrontar situaciones en que una cantidad depende no sólo de una variable sino de varias variables.

EJEMPLO 1

a) Considere un rectángulo de longitud x y ancho y. Su área A es el producto de la longitud y el ancho, o

$$A = xy$$

La variable A depende de las dos variables x y y.

b) La demanda, o volumen de ventas total, de un producto depende del precio a que se ofrece en el mercado. Sin embargo, en muchos casos el volumen de ventas también depende de factores adicionales tales como la cantidad gastada por el productor en promocionar el producto y los precios de los productos de la competencia.

c) La balanza de pagos de cualquier nación es función de un gran número de variables. Las tasas de interés del país afectarán la cantidad de inversión extranjera que fluya al interior. La tasa de cambio de la moneda nacional afectará los precios de sus bienes y, en consecuencia, determinará el volumen de exportaciones y asimismo el de importaciones. La tasa de salarios promedio también afectará los precios de las exportaciones y, por tanto, su volumen. La cantidad de inversión extranjera existente en el país afectará las utilidades generadas cada año. Aun el clima puede tener un efecto poderoso en la balanza de pagos si el turismo desempeña una parte esencial en la economía, o si ésta depende en forma sustancial de algún producto agrícola.

En estos casos necesitamos estudiar funciones de varias variables independientes. En la mayor parte de este capítulo consideraremos funciones de dos variables independientes y, por lo regular, las denotaremos con x y y. La generalización a tres o más variable es en la mayoría de los casos (pero no en todos) bastante directa. La variable dependiente, por lo regular, se denotará con z y usamos la notación $z = f(x, y)$ con el propósito de indicar que z es función de x y y.

Damos una definición formal de una función de dos variables.

DEFINICIÓN Sea D un conjunto de parejas de números reales (x, y), y sea f una regla que asigna un único número real a cada pareja (x, y) en D. Decimos que f es una **función de las dos variables** x y y y que el conjunto D es el **dominio** de f. El valor de f en la pareja (x, y) se denota por $f(x, y)$ y el conjunto de todos esos valores se denomina el **rango** de f.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 2x + y$, calcule el valor de f en la pareja (1, 2). Determine el dominio de f.

☛ **1.** Si $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y)}{x + y}$ calcule
a) $f(3, 1)$ *b*) $f(-1, -2)$
c) $f(2, 3)$
Proporcione el dominio de f utilizando la notación de conjuntos.

Solución El valor de una función de dos variables se obtiene simplemente sustituyendo los valores de x y y en la expresión de $f(x, y)$:

$$f(1, 2) = 2(1) + 2 = 4$$

En este caso, el valor de f es un número real bien definido para todos los valores reales de x y y, de modo que el dominio es el conjunto de todas las parejas (x, y) de números reales.

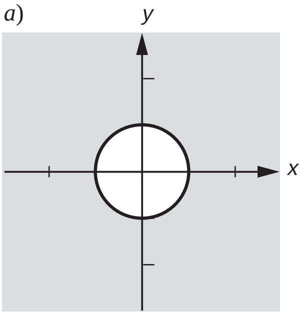
Respuesta *a*) $\frac{1}{4}\ln 2$ *b*) 0
c) No esta definida
dominio $=$
$\{(x, y) \mid x - y > 0,\ x + y \neq 0\}$

El dominio D de una función de dos variables puede visualizarse como un subconjunto de puntos del plano xy. En el ejemplo 2 todas las parejas de números reales (x, y) pertenecen al dominio, de modo que desde el punto de vista geométrico, podemos decir que el dominio consta del plano xy completo. El rango de una función de dos variables es un subconjunto de los números reales, al igual que en el caso de una función de una variable.

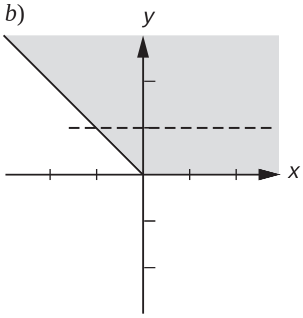
☛ **2.** Proporcione los dominios de las siguientes funciones y represéntelos de manera gráfica:
a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
b) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln y}$

Respuesta *a*) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$
b) $\{(x, y) \mid x + y > 0,\ y > 0,$
$y \neq 1\}$

a)



b)



EJEMPLO 3 Dada $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, calcule $f(0, 2)$, $f(1, -1)$ y $f(1, 2)$. Determine el dominio de f y represéntelo gráficamente.

Solución Sustituyendo los valores dados de x y y, obtenemos.

$$f(0, 2) = \sqrt{4 - 0^2 - 2^2} = 0 = 0$$
$$f(1 - 1) = \sqrt{4 - 1^2 - (-1)^2} = 2$$
$$f(1, 2) = \sqrt{4 - 1^2 - 2^2} = \sqrt{-1} \qquad \text{(no definida)}$$

La pareja (1, 2), por tanto, no pertenece al dominio de f. ☛ **1**

Para que $f(x, y)$ sea un número real bien definido, la cantidad dentro del signo de radical no debe ser negativa. Así que

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 4$$

En consecuencia, el dominio de f consta de todos aquellos puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 4$.

En términos geométricos, $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de un círculo centrado en el origen con radio 2 y la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 4$ es válida en puntos dentro y sobre este círculo. Estos puntos forman el dominio D. (Véase la figura 1). El punto (1, 2) está afuera de círculo, lo cual está de acuerdo con el hecho de que $f(1, 2)$ no existe. ☛ **2**

EJEMPLO 4 ***(Función de costo)*** Una empresa elabora dos productos, A y B. El costo de los materiales y de la mano de obra es de \$4 por cada unidad del producto A y de \$7 por cada unidad de B. Los costos fijos son de \$1500 por semana. Exprese el costo semanal C en términos de las unidades de A y B producidas cada semana.

Solución Si x unidades del producto A y y unidades del producto B se elaboran cada semana, entonces los costos de mano de obra y materiales para los dos tipos de

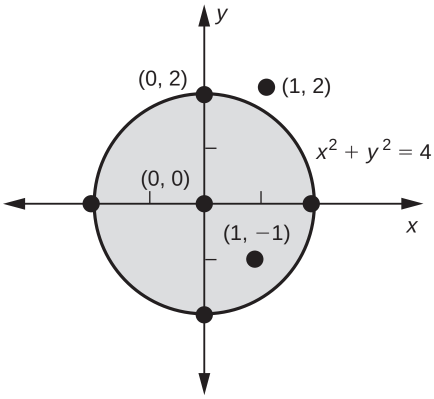


FIGURA 1

productos son $4x$ y $7y$ dólares, respectivamente. Así que el costo C (en dólares) está dado por

$$C = \text{Costos de mano de obra y materiales} + \text{Costos fijos} = 4x + 7y + 1500.$$

C es una función de x y y.

Consideremos ahora la generalización de las ideas que se acaban de exponer a funciones de más de dos variables. Cuando hay tres variables independientes se acostumbra denotarlas por x, y y z, y con w a la variable dependiente. La función consiste de una regla, la cual asigna un número real a cada terna (x, y, z) de las variables independientes. Escribimos el valor como $w = f(x, y, z)$.

EJEMPLO 5 Si

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + z}$$

evalúe $f(1, -1, 4)$ y $f(-1, 2, 1)$. Determine el dominio de f.

Solución El valor de f en (x, y, z) se obtiene sustituyendo los valores dados de x, y y z en la expresión algebraica que define f.

$$f(1, -1, 4) = \frac{\sqrt{9 - 1^2 - (-1)^2}}{1 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$f(-1, 2, 1) = \frac{\sqrt{9 - (-1)^2 - 2^2}}{-1 + 1} = \frac{\sqrt{4}}{0} \qquad \text{(no definida)}$$

Observamos que el punto $(-1, 2, 1)$ no pertenece al dominio de f.

Con el propósito de que $f(x, y, z)$ esté bien definida, es necesario que la cantidad dentro del radical no sea negativa y, asimismo, que el denominador de f sea distinto de cero. Por consiguiente, tenemos las condiciones $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ o $x^2 + y^2 \leq 9$ y $x + z \neq 0$. Empleando notación de conjuntos, podemos escribir el dominio como

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 9, \quad x + z \neq 0\}$$

Cuando aparecen más de tres variables independientes se acostumbra usar subíndices con el propósito de facilitar la notación sin introducir más literales. Así, si hay n variables independientes, la denotaríamos por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Utilizando z como la variable dependiente, escribiríamos una función de las n variables por $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La notación de subíndices también se emplea con frecuencia para funciones de dos o tres variables; por ejemplo, podríamos escribir $w = f(x_1, x_2, x_3)$ en vez de $w = f(x, y, z)$.

EJEMPLO 6 Si

$$z = x_1^2 + e^{x_1 + x_2} + (2x_1 + x_4)^{-1}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

evalúe z en el punto $(3, -3, 4, -5)$.

Solución Sustituyendo $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = -5$ en la expresión de z, resulta que

$$\begin{aligned} z &= 3^2 + e^{3+(-3)} + [2(3) + (-5)]^{-1}\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= 9 + e^0 + (6 - 5)^{-1}\sqrt{9 + 16} \\ &= 9 + 1 + \tfrac{5}{1} = 15 \end{aligned}$$

Hemos visto cómo la gráfica de una función de una sola variable nos ayuda a visualizar sus propiedades más importantes; por ejemplo, donde crece o decrece, cuando es cóncava hacia arriba o hacia abajo, donde es máxima o mínima, etc. Con la finalidad de bosquejar la gráfica de $z = f(x, y)$, una función de dos variables, necesitamos coordenadas en tres dimensiones: una para cada una de las variables x, y y z.

En tres dimensiones, los ejes x, y, y z se construyen formando ángulos rectos entre sí, como se observa en la figura 2. Con frecuencia es conveniente considerar

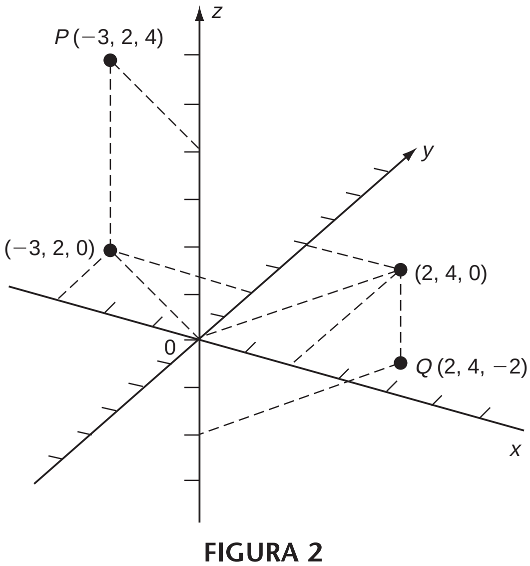


FIGURA 2

el plano xy como el horizontal y el eje z apuntando verticalmente hacia arriba. Entonces, el eje z negativo apunta hacia abajo.

Cada par de ejes determina un plano. Por ejemplo, el eje x y el eje y determinan el plano xy, el eje x y el eje z determinan el plano xz, etc. En el plano xy, la tercera coordenada z es igual a cero, y las coordenadas x y y se manejan de la manera usual al localizar las posiciones de puntos en tal plano. En la figura 2, los puntos (2, 4, 0) y (−3, 2, 0) se grafican con el objetivo de mostrar este procedimiento.

Con la finalidad de localizar la posición de un punto general (x, y, z) para los cuales $z \neq 0$, primero graficamos el punto $(x, y, 0)$ en el plano xy y luego nos movemos a partir de este punto en forma paralela al eje z de acuerdo con el valor dado de la coordenada z. Por ejemplo, al ubicar (−3, 2, 4), primero graficamos (−3, 2, 0), como en la figura 2 y después nos movemos una distancia de 4 unidades en la dirección positiva del eje z hasta el punto P. Al graficar el punto (2, 4, −2), primero localizamos (2, 4, 0) en el plano xy y luego nos movemos dos unidades paralelamente al eje z negativo hasta el punto Q. ☛ **3**

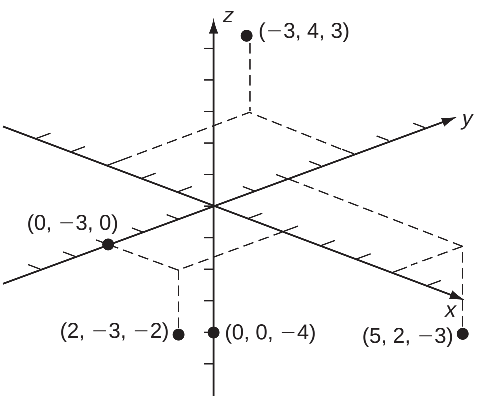
☛ **3.** Trace los puntos (0, 0, −4), (0, −3, 0), (−3, 4, 3), (2, −3, −2) y (5, 2, −3)

Todos los puntos del plano xy satisfacen la condición $z = 0$. En forma análoga, todos los puntos del plano xz satisfacen la condición $y = 0$ y todos los puntos del plano yz satisfacen la condición $x = 0$. Sobre el eje z, tanto x como y son cero. De manera similar, sobre el eje x, $y = z = 0$ y sobre el eje y, $x = z = 0$.

EJEMPLO 7 Localice los puntos (0, 2, 4), (3, 0, −2), (0, 0, 5) y (0, −3, 0).

Solución Los puntos se han graficado en la figura 3. Observe que los puntos están situados, en el plano yz, en el plano xz, en el eje z y sobre el eje y, respectivamente.

Respuesta



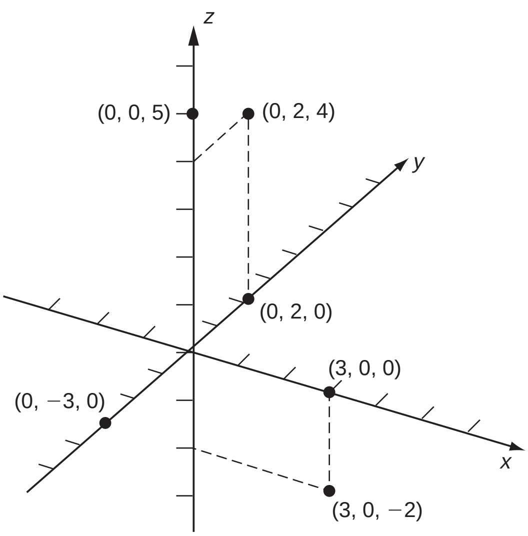
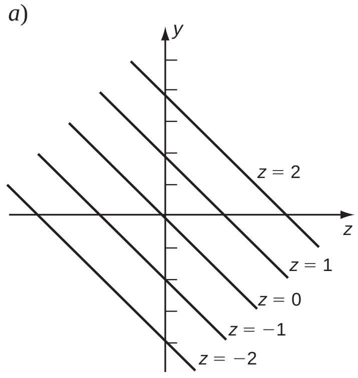


FIGURA 3

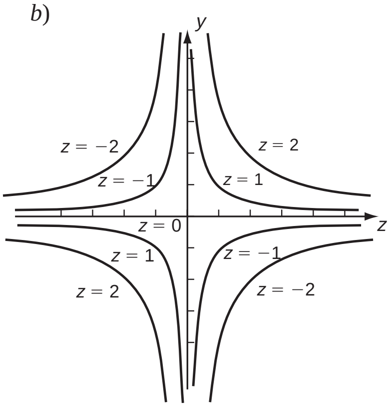
☛ **4.** Dibuje curvas de nivel para los niveles $z = 0$, ± 1 y ± 2 para las funciones
a) $z = x + y$ *b*) $z = xy$

Respuesta

a)



b)



Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Su dominio D consta del conjunto de puntos del plano xy en que la función está definida. Para cualquier punto (x, y) en D, podemos calcular el valor correspondiente de $z = f(x, y)$ y graficamos el punto (x, y, z) en tres dimensiones. Haciendo esto para cada punto (x, y) en D, obtenemos un conjunto de puntos (x, y, z) que forman una superficie en tres dimensiones. Existe un punto (x, y, z) sobre esta superficie situado por encima de cada punto del dominio D (o debajo si $z = f(x, y)$ toma valores negativos). Esta superficie se dice que es la **gráfica** de la función $z = f(x, y)$.

En la práctica, la tarea de bosquejar una superficie en tres dimensiones que sea la gráfica de una función $z = f(x, y)$ de ninguna manera es tan sencilla, como el bosquejo de la gráfica de una función $y = f(x)$ de una sola variable. Cuando afrontamos este problema, con frecuencia es de utilidad examinar las llamadas secciones de la gráfica. Que son cortes realizados sobre la gráfica por medio de planos determinados.

Consideremos secciones resultantes de planos horizontales. Un plano horizontal (paralelo al plano xy) satisface una ecuación del tipo $z = c$, en donde c es una constante que da la altura del plano por encima del plano xy (o debajo, si $c < 0$). De modo que la sección de una gráfica que también es común al plano consta de los puntos de la gráfica situados a una altura constante por encima (o por debajo) del plano xy. Tal sección horizontal puede graficarse como una curva en el plano xy y se denomina **línea de contorno** o **curva de nivel**.

Consideremos, por ejemplo, la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Los puntos sobre la gráfica de esta función que también están situados sobre el plano horizontal $z = c$ satisfacen

$$c^2 = 4 - x^2 - y^2$$

Esto es,

$$x^2 + y^2 = 4 - c^2$$

Esta ecuación que relaciona x y y es la ecuación de un círculo en el plano xy centrado en $x = y = 0$ y con radio igual a $\sqrt{4 - c^2}$.

Por ejemplo, tomemos $c = 1$, de modo que consideremos el corte horizontal a través de la gráfica por el plano situado una unidad por encima del plano xy. Esta sección es entonces un círculo en el plano xy con radio $\sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$ y con centro en el punto $(0, 0)$. De manera similar, si $c = \frac{1}{2}$, la sección es un círculo de radio $\sqrt{15}/2$, mientras que si $c = \frac{3}{2}$, la sección es un círculo de radio $\sqrt{7}/2$.

Los círculos $x^2 + y^2 = 4 - c^2$ que corresponden a estos tres valores de c, así como la frontera externa $x^2 + y^2 = 4$ del dominio, se muestran en la figura 4.

La gráfica de la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en tres dimensiones es un hemisferio centrado en el origen, con radio igual a 2 unidades. La gráfica se aprecia en la figura 5, en la cual también se advierten las curvas de nivel correspondientes a $z = 0, \frac{1}{2}, 1$ y $\frac{3}{2}$ en sus ubicaciones tridimensionales. ☛ **4**

Otra forma común de representar a una función $z = f(x, y)$ de manera gráfica es mantener fija a una de las variables independientes, x o y, y graficar a z como una función de la variable restante. Dando varios valores a la variable fija, se obtienen una serie de curvas. Por ejemplo, fijando $y = c$, obtenemos $z = f(x, c)$, expre-

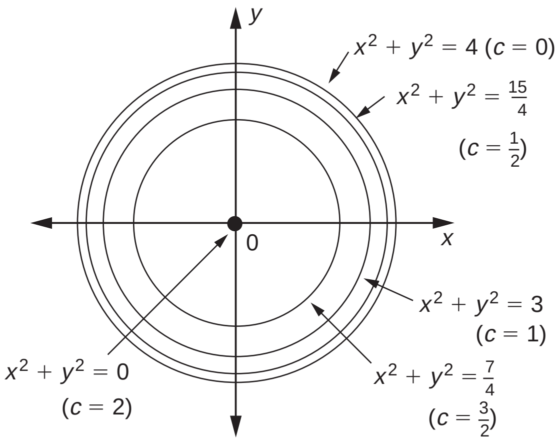


FIGURA 4

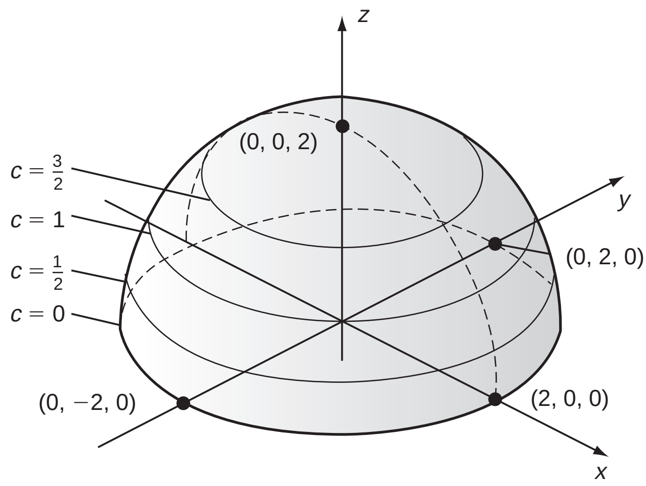


FIGURA 5

sando z como una función de x, y esta función puede graficarse en el plano xz. Dando a c valores diferentes, se pueden dibujar varias gráficas.

Ahora, $y = c$ es la ecuación de un plano vertical, paralelo al plano xz, que corta al eje y en $(0, c, 0)$. Así la gráfica de $z = f(x, c)$ es la curva a lo largo de la cual este plano vertical interseca la gráfica de f.

De manera análoga, haciendo $x = c$ obtenemos $z = f(c, y)$, cuya gráfica en el plano yz es la curva de intersección de la gráfica de f con un plano vertical paralelo al plano yz.

EJEMPLO 8 Dibuje secciones verticales de la gráfica $z = x^2 - y^2$ correspondiente a los planos verticales $x = 0, \pm 1$ y ± 2 y $y = 0, \pm 1$ y 2.

Solución Consideremos primero la sección en que $x = c$, c una constante. Ésta es la sección definida por el plano vertical que es paralelo al plano yz y a una distancia c de él. Sustituyendo $x = c$ en la función dada $z = x^2 - y^2$, obtenemos $z = c^2 - y^2$. Esta ecuación en términos de y y z describe una parábola, que se abre hacia abajo, con vértice en el punto $y = 0$ y $z = c^2$. Por ejemplo, si $c = 1$, el vértice de la parábola está en el punto $(y, z) = (0, 1)$. Las parábolas que corresponden a los valores $c = 0, \pm 1, \pm 2$, dibujadas en el plano yz, aparecen en la figura 6.

Consideremos la sección en que $y = c$, c una constante, que es la sección definida por el plano vertical que es paralela al plano xz y está a una distancia c de él. Sustituyendo $y = c$ en la ecuación dada, obtenemos $z = x^2 - c^2$. Esta ecuación en términos de x y z representa una parábola con vértice $x = 0$ y $z = -c^2$; esta parábola se abre hacia arriba. Las parábolas correspondientes a $c = 0, \pm 1, \pm 2$ aparecen en la figura 7.

☛ **5.** Para la función $z = x^2 - xy$ dibuje las secciones verticales en el plano xz para $y = 0$ y ± 2 y en el plano yz para $x = 0$ y ± 1

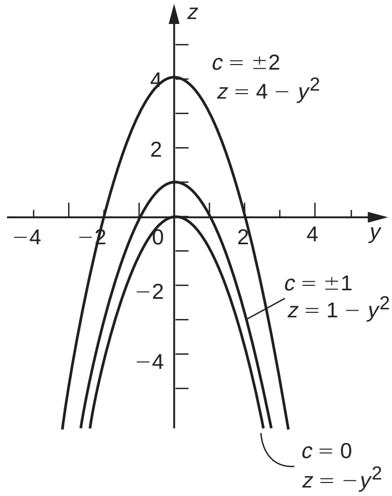


FIGURA 6

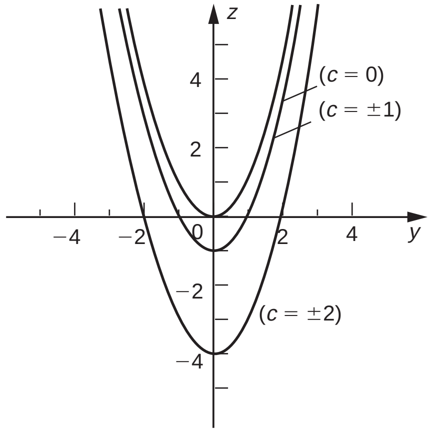
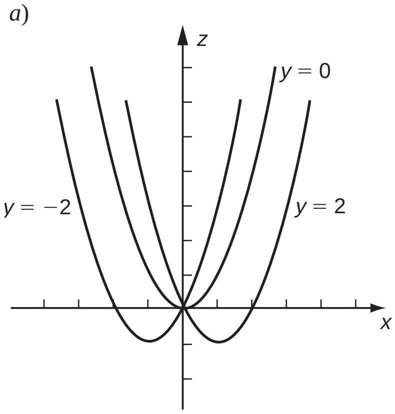


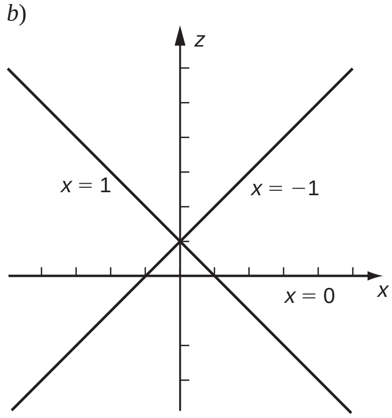
FIGURA 7

Respuesta

a)



b)



La gráfica de la función $z = x^2 - y^2$ en tres dimensiones se muestra en la figura 8, en que también se observan las secciones verticales correspondientes a $x = 0$, ± 1 y ± 2; y $y = 0$, -1 y -2. A partir de la figura, podemos advertir de inmediato el aspecto predominante de esta gráfica, es decir, su forma de silla de montar cerca del origen. ☛ **5**

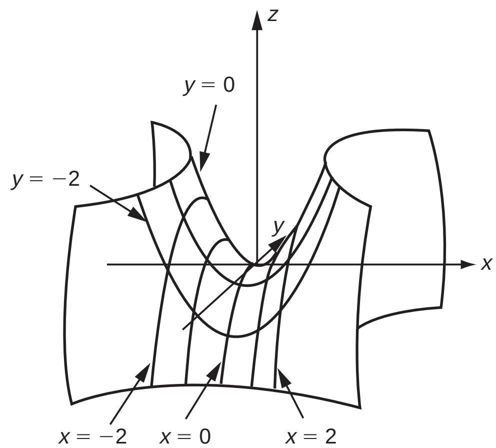


FIGURA 8

EJEMPLO 9 ***(Publicidad y ventas)*** El volumen de ventas de un artículo particular depende de su precio y también, en muchos casos, de la cantidad que el fabricante gasta en promoción y publicidad. Sea p el precio y A el gasto en publicidad al mes (ambos en dólares) y sean x las ventas mensuales. Entonces, $x = f(p, A)$. Suponga que en cierto caso

$$x = 1000(5 - pe^{-kA})$$

en donde $k = 0.001$. Dibuje las siguientes secciones verticales: gráficas de x contra p si $A = 0$, 500, 1000 y 1500 y bosqueje gráficas de x contra A para $p = 1$, 3, 5 y 8.

Solución Las gráficas requeridas de x contra p aparecen en la figura 9. Por ejemplo, cuando $A = 0$, $e^{-kA} = e^{-k(0)} = 1$ y así

$$x = 1000(5 - p)$$

La gráfica de esta función es una línea recta que intersecta al eje x ($p = 0$) en el valor $x = 5000$ y corta al eje p ($x = 0$) en $p = 5$. De manera similar, si $A = 1000$, $e^{-kA} = e^{-(0.001)(1000)} = e^{-1} = 0.368$ y así $x = 1000(5 - 0.368p)$. De nuevo, ésta es una línea recta que intersecta al eje x en $x = 5000$ y al eje p en $p = 5/0.368 \approx 13.6$. Esta gráfica representa la demanda x como una función del precio p cuando \$1000 se gastan al mes en publicidad.

Cuando p se fija en los valores requeridos, tenemos las gráficas de x contra A que aparecen en la figura 10. Por ejemplo, si $p = 3$,

$$x = 5000 - 3000e^{-0.001A}$$

Esta función da el volumen de ventas en términos de gasto en publicidad cuando a un artículo se le fija un precio de \$3.

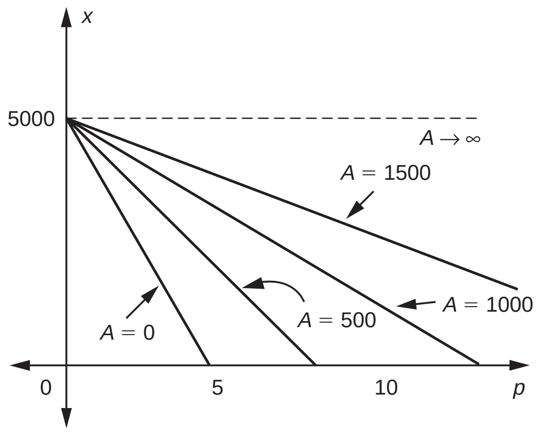


FIGURA 9

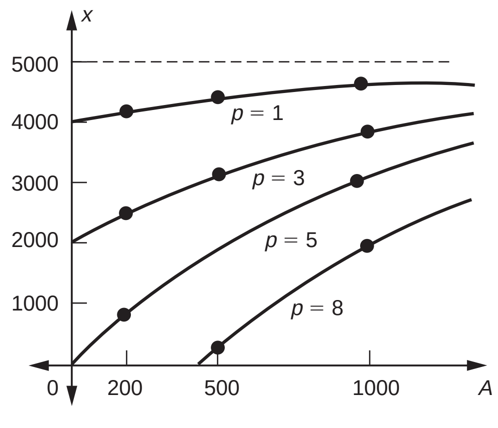


FIGURA 10

EJERCICIOS 7-1

(1-8) Calcule los valores de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$; $(x, y) = (3, -2)$ y $(-4, -4)$

2. $f(x, y) = \dfrac{(x - 1)(y - 1)}{x + y}$; $(x, y) = (1, -2)$, $(2, -2)$ y $(3, -2)$

3. $f(x, t) = \dfrac{x - t + 1}{x^2 + t^2}$; $(x, t) = (2, 1), (3, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

4. $f(u, v) = u + \ln|v|$; $(u, v) = (2, 1), (-2, -e)$ y $(0, e^3)$

5. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ y $(-2, 1, -4)$

6. $f(x, y, t) = \dfrac{x + y + t}{x + y - t}$; $(x, y, t) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

7. $f(u, v, z) = \dfrac{2u + 3v + 4z}{4u - 3v - z}$; $(u, v, z) = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ y $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\, 2)$

8. $f(a, b, c) = \dfrac{2a^2 + b^2}{\sqrt{c^2 - 4}}$; $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ y $(2, 2, -4)$

(9-16) Determine los dominios de las siguientes funciones .

9. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

10. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2 - 1}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

12. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$

13. $f(x, t) = \ln(x - t)$

14. $f(x, y) = e^{y-x}$

15. $f(x, y, z) = x + \sqrt{yz}$

16. $f(u, v, w) = \sqrt{e^{u+v+w} - 1}$

(17-22) Bosqueje las curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones que corresponden a los valores dados de z.

17. $z = 2x + 3y$; $z = 0, 1, 2, 3$

18. $z = 3x - y$; $z = 0, 1, -2, 3$

19. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3$

20. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3$

21. $z = x^2 + y^2$; $z = 1, 2, 3, 4$

22. $z = x^2 - y^2$; $z = 0, \pm 1, \pm 2$

(23-26) Dibuje las secciones verticales de las gráficas de las siguientes funciones que corresponden a los valores dados de x o y.

23. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $x = 0, \pm 1, \pm 2$

24. $z = \sqrt{25 - x^2 + y^2}$; $y = 0, \pm 1, \pm 2$

25. $z = x^2 + y^2$; $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

26. $z = 2x^2 - y^2$; $x = 0, \pm 1, \pm 2,\ y = 0, \pm 1, \pm 2$

27. *(Costo de una lata)* Una lata cilíndrica tiene radio r y altura h. Si el material con que se produce tiene un costo de \$2 por unidad de área, exprese el costo de la lata, C, como una función de r y h.

28. *(Costo de una lata)* En el ejercicio 27, encuentre una expresión para C que incluya el costo de unir los dos extremos de la superficie curveada de la lata. Este costo es de \$0.40 por unidad de longitud de cada extremo.

29. *(Costo de un tanque de agua)* Un tanque rectangular abierto debe construirse de modo que albergue 100 pies cúbicos de agua. Los costos del material son de \$5 por pie cuadrado en la base y de \$3 por pie cuadrado en las paredes verticales. Si C denota el costo total (en dólares), determine C como función de las dimensiones de la base.

30. *(Costo de un tanque de agua)* Repita el ejercicio 29 si el tanque abierto es de forma cilíndrica.

31. *(Función de costo)* Una empresa produce dos productos, X y Y. Las unidades de costos de mano de obra y de materiales son de \$5 en el caso del producto X y de \$12 por lo que respecta a Y. Además, la empresa también tiene costos fijos de \$3000 al mes. Exprese el costo mensual C (en dólares) como una función de las unidades de X y Y producidas. ¿Cuál es el costo total de producir 200 unidades de X y 150 unidades de Y?

32. *(Funciones de costo y utilidad)* Electrónica de Occidente fabrica dos tipos de cinta de casetes, de 60 y 90 minutos. El costo por unidad de mano de obra para los dos tipos es de 30¢ y de 40¢. Además, la empresa tiene costos fijos semanales de \$1200.

   a) Obtenga el costo semanal C (en dólares) como una función de las unidades de los dos tipos de cintas producidas.

   b) Evalúe el costo total de producir 10,000 cintas de 60 minutos y 8000 cintas de 90 minutos.

   c) Si la compañía vende los dos tipos de cinta a 60¢ y 75¢ cada una, respectivamente, obtenga la utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas por semana.

33. *(Costo de un oleoducto en el ártico)* Un oleoducto tiene que construirse desde el punto A hasta el punto B situado 500 millas al sur y 500 millas al este de A. A partir de A, las 200 millas al sur son de tundra, las siguientes 100 millas atraviesan pantanos y las últimas 200 millas consisten en

terrenos de roca dura. El costo del oleoducto es de P dólares por milla sobre el último tipo de terreno, $3P$ dólares por milla sobre pantanos y $2P$ dólares por milla sobre la tundra. El oleoducto constará de tres secciones rectilíneas, una a través de cada tipo de terreno; sean x las millas hacia el este atravesando la franja de tundra y sean y millas más hacia el este a través de los pantanos. Exprese su costo total en términos de x y y.

■ 7-2 DERIVADAS PARCIALES

Abordamos ahora el asunto de la diferenciabilidad de funciones de varias variables. En esta sección, sólo nos interesará el aspecto mecánico de la diferenciación, pero en las siguientes secciones, estudiaremos la interpretación y aplicación de las derivadas resultantes.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes. Si la variable y se mantiene fija en el valor $y = y_0$, entonces la relación $z = f(x, y_0)$ expresa z como una función de la variable x. Esta función tendrá como gráfica una curva en el plano xz, la cual en realidad es la sección vertical de la gráfica de $z = f(x, y)$ definida por el plano $y = y_0$.

La figura 11 ilustra una sección típica $z = f(x, y_0)$. En un punto general en esta curva, se puede construir la recta tangente y su pendiente puede calcularse derivando z respecto a x a partir de la relación $z = f(x, y_0)$. Esta derivada se calcula de la manera ordinaria como un límite de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

Se denomina la *derivada parcial de* z *con respecto a* x y, por lo regular, se denota por $\partial z/\partial x$. (Observe que usamos ∂ y no d en esta situación. El símbolo d se reserva para la derivada de una función de una sola variable).

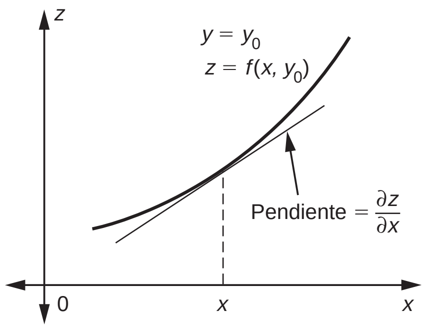


FIGURA 11

DEFINICIÓN Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y. Entonces la **derivada parcial de z con respecto a x** se define por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Al escribir esta definición suprimimos el subíndice de y_0; debemos recordar que *al calcular* $\partial z/\partial x$*, la variable y se mantiene constante*.

En forma análoga, la **derivada parcial de *z* con respecto a *y*** se define como

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Al calcular $\partial z/\partial y$*, la variable* x *se mantiene constante* y la derivación sólo se realiza con respecto a *y*.

En un punto (x_0, y_0) del dominio de la función dada $z = f(x, y)$, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ representa la pendiente de la sección vertical de la gráfica que corresponde al plano $y = y_0$. De manera similar, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ puede interpretarse como la pendiente de la sección vertical definida por el plano $x = x_0$. Esta última sección vertical tiene la ecuación $z = f(x_0, y)$ que expresa z como una función de y y su pendiente se obtiene derivando z con respecto a y y con x igual a la constante x_0.

Estas interpretaciones geométricas de las derivadas parciales se ilustran en la figura 12. Allí, $A'B'$ representa la sección vertical determinada por el plano $y = y_0$

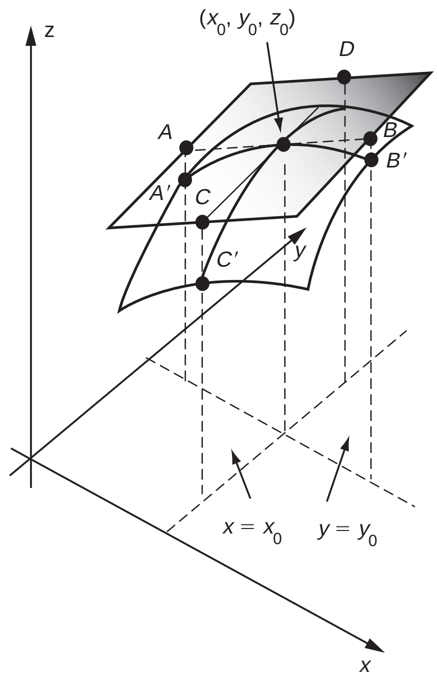


FIGURA 12

y la tangente a esta curva en $x = x_0$ es la recta AB. La pendiente de esta recta está dada por la derivada parcial $\partial z/\partial x$ evaluada en (x_0, y_0). En forma análoga, la recta CD es la tangente a la sección vertical definida por el plano $x = x_0$. Su pendiente es $\partial z/\partial y$ evaluada en (x_0, y_0).

Las derivadas parciales pueden calcularse usando, en esencia, las mismas técnicas utilizadas en la evaluación de las derivadas ordinarias. *Sólo debemos recordar que debemos manejar cualquier variable como si fuera una constante, excepto aquélla con respecto a la cual estamos derivando*. Aparte de esto, la fórmula familiar de la potencia, las reglas del producto y el cociente y la regla de la cadena pueden aplicarse en forma ordinaria.

EJEMPLO 1 Calcule $\partial z/\partial y$ si $z = x^3 + 5xy^2 + 2y^3$

Solución Manejando x como una constante y derivando con respecto a y, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x(2y) + 2(3y^2) = 10xy + 6y^2$$

EJEMPLO 2 Calcule $\partial z/\partial x$ si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución Manteniendo y fija, usamos la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x + 0)\end{aligned}$$

ya que $\partial(y^2)/\partial x = 0$ porque y^2 se mantiene constante. Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

EJEMPLO 3 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $z = (x^2 + y^2)/(\ln x)$

Solución Usando la fórmula del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\ln x\,(\partial/\partial x)(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)(\partial/\partial x)(\ln x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x \cdot (2x) - (x^2 + y^2) \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x^2 \ln x - (x^2 + y^2)}{x(\ln x)^2}\end{aligned}$$

después de multiplicar numerador y denominador por x.

No necesitamos aplicar la fórmula del cociente para evaluar $\partial z/\partial y$, dado que el denominador del cociente sólo es función de x, y es constante por lo que a la derivación parcial con respecto a y se refiere.

☛ **6.** Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para las funciones
a) $z = x^2y - 3xy^2$
b) $z = y\ln(x + y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 + y^2}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{\ln x}\,(0 + 2y) = \frac{2y}{\ln x} \quad ☛\ \mathbf{6}$$

En estos ejemplos puede advertirse que el cálculo de las derivadas parciales de una función de dos variables, en esencia, no difiere de la derivación de una función de una variable. Sólo debemos recordar que *cuando calculamos la derivada parcial con respecto a una de las variables*, *manejamos la otra variable como una constante*, luego derivamos en la forma acostumbrada.

La derivada parcial $\partial z/\partial x$ es en sí misma una función de x y y; en consecuencia, podemos calcular sus derivadas parciales con respecto a x y a y. Éstas se denominan **derivadas parciales de segundo orden** de z, y se utiliza la siguiente notación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

De manera similar, $\partial z/\partial y$ puede derivarse con respecto a x y a y, dando dos derivadas parciales más de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Las dos derivadas $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$ y $\partial^2 z/\partial y\,\partial x$ a menudo se denominan **derivadas parciales mixtas** de segundo orden. A condición de que estas derivadas parciales mixtas sean funciones continuas de x y y, son iguales entre sí,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

EJEMPLO 4 Calcule todas las derivadas de segundo orden de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución En el ejemplo 2 probamos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

para esta función. Se sigue de manera similar que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Respuestas *a*) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y^2$,
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6xy$
b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x + y}$,
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln(x + y) + \dfrac{y}{x + y}$

Las dos derivadas mixtas de segundo orden se obtienen como sigue (usando la regla de la cadena en la etapa intermedia).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,[(x^2+y^2)^{-1/2}]$$

$$= x(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}(2y)$$

$$= -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = x\,\frac{\partial}{\partial x}\,[(x^2+y^2)^{-1/2}]$$

$$= -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$$

Puede advertirse que estas dos derivadas son iguales.

En el caso de las dos derivadas restantes, debe utilizarse la regla del cociente.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(\partial/\partial x)(x) - x(\partial/\partial x)(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(1)\cdot - x\cdot(x/\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)-x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

☛ **7.** Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ para las funciones *a*) $z = x^p y^q$ *b*) $z = \frac{x}{x+y}$

En forma similar, podemos demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ ☛ **7**

Podemos continuar este proceso y calcular derivadas parciales de órdenes más altos:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial z}\right),$$

etcétera. Con tal de que todas las derivadas del orden dado sean continuas, el orden en que las derivaciones con respecto a x y a y se realizan carece de importancia. Por ejemplo, todas las siguientes derivadas mixtas son iguales.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial x\,\partial y}$$

Éstas se denotan por $\partial^3 z/\partial x^2\,\partial y$, indicando dos derivaciones con respecto a x y una con respecto a y.

Respuesta
a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p(p-1)x^{p-2}y^q$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = pqx^{p-1}y^{q-1}$
b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$

☛ **8.** Calcule z_x, z_{xx} y z_{xxy} para la función $z = e^{2x + y^2}$

EJEMPLO 5 Calcule $\partial^3 z/\partial x^2\, \partial y$ y $\partial^4 z/\partial x\, \partial y^3$ si $z = x^3 y^4$

Solución Tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 4y^3 = 4x^3y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 4y^3 \cdot 3x^2 = 12x^2y^3$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^3) = 24xy^3$$

y también

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^3) = 36x^2y^2$$

Así que

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x\, \partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(36x^2y^2) = 72x^2y$$

Al igual, que con derivadas ordinarias, hay varias notaciones que se utilizan para las derivadas parciales. La que se encuentra con mayor frecuencia es la que emplea subíndices para indicar derivadas parciales; usaremos esta notación en el texto de vez en cuando. De acuerdo con esta notación, tenemos lo siguiente:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ se denota por z_x o $f_x(x, y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se denota por z_y o $f_y(x, y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ se denota por z_{xx} o $f_{xx}(x, y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ se denota por z_{xy} o $f_{xy}(x, y)$ (Observe que $z_{xy} = z_{yx}$ si son continuas).

$\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3\, \partial x}$ se denota por z_{xyyy} o $f_{xyyy}(x, y)$

Las demás derivadas parciales se denotan de manera similar. ☛ **8**

La notación de derivadas parciales se extiende en forma natural a funciones $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de varias variables. Por ejemplo, $\partial z/\partial x_1$, se obtiene derivando z con respecto a x_1 manteniendo $x_2, \ldots, x_n$ constantes, etcétera.

Respuesta
$z_x = (1 + 2x)e^{2x+y^2}$
$z_{xx} = 4(1 + x)e^{2x+y^2}$
$z_{xxy} = 8y(1 + x)e^{2x+y^2}$

EJEMPLO 6 Si $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1\sqrt{x_2^2 - x_3^2}$, calcule $\partial z/\partial x_1$, $\partial z/\partial x_2$ y $\partial z/\partial x_3$.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + \sqrt{x_2^2 - x_3^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 + x_1(\tfrac{1}{2})(x_2^2 - x_3^2)^{-1/2}(2x_2) = \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0 + x_1(\tfrac{1}{2})(x_2^2 - x_3^2)^{-1/2}(-2x_3) = -\frac{x_1x_3}{\sqrt{x_2^2 - x_3^2}}$$ ☛ 9

☛ **9.** Calcule w_x, w_y y w_z para la función $w = (x + y + z)\ln(y - z)$

Respuesta $w_x = \ln(y - z)$,
$w_y = \ln(y - z) + \dfrac{x + y + z}{y - z}$,
$w_z = \ln(y - z) - \dfrac{x + y + z}{y - z}$

EJERCICIOS 7-2

(1-24) Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para las siguientes funciones .

1. $z = x^2 + y^2$

2. $z = 3x^3 + 5y^4 + 7$

3. $z = 3e^{2x} - 5\ln y + 7$

4. $z = xy^2 + x^2y$

5. $z = xe^y + ye^{-x}$

6. $z = x\ln y + y^2\ln x$

7. $z = x^2 + xy + y^2$

8. $z = xy + \ln(xy)$

9. $z = e^{2x+3y}$

10. $z = e^{x^2+y^2}$

11. $z = (2x + 3y)^7$

12. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

13. $z = (x + 2y^3)^{1/3}$

14. $z = \dfrac{x}{\sqrt{y - x}}$

15. $z = xe^{xy}$

16. $z = (2x + 3y)\,e^{4x+5y}$

17. $z = \left(\dfrac{x}{y}\right)e^{xy}$

18. $z = xye^{x/y}$

19. $z = \ln(x^2 + y^2)$

20. $z = (x^2 + y^2)\ln(x + y)$

21. $z = \ln(e^x + xy^3)$

22. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

23. $z = \dfrac{y}{y - x}$

24. $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$

(25-38) Calcule $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$ y $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$ en el caso de las siguientes funciones.

25. $z = x^4 + y^4 + 3x^2y^3$

26. $z = xe^{-y} + ye^{-x}$

27. $z = xy + \ln(x + y)$

28. $z = x^{3/2}y^{-4}$

29. $z = x^5y^{-1/2}$

30. $z = e^{x-2y}$

31. $z = ye^{xy}$

32. $z = \ln(2x + 3y)$

33. $z = \ln(x^2 + y^2)$

34. $z = (x^2 + y^2)^5$

34. $z = \dfrac{x}{x + y}$

36. $z = e^{x^2+y^2}$

37. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

38. $z = (x^2 + y^2)e^{xy}$

39. Si $z = e^{y/x}$, pruebe que $xz_x + yz_y = 0$

40. Si $z = x^2e^{-x/y}$, pruebe que $xz_x + yz_y = 2z$

41. Si $z = x^3 + y^3$, pruebe que $xz_x + yz_y = 3z$

42. Si $z = f(ax + \text{by})$ demuestre que $bz_x - az_y = 0$

43. Si $C = ae^{kx+wt}$, demuestre que $\partial C/\partial t = (p/4)(\partial^2 C/\partial x^2)$, a condición de que $w = pk^2/4$

44. Si $f(x, y) = xe^{y/x}$, pruebe que $xf_{xx} + yf_{xy} = 0$

45. Si $C = e^{kx+wt}$, pruebe que $\partial^2 C/\partial t^2 - \partial^2 C/\partial x^2 = 0$, cuando $k = \pm w$

46. *(Microbiología)* En el proceso de metabolismo de una bacteria la razón M, a la cual una sustancia química puede ser absorbida por la bacteria y distribuirse en todo su volumen, está dada por $M = aS/V$, donde S es el área superficial, V es el volumen de la bacteria y a es una constante. Para una bacteria cilíndrica de radio r y longitud l, $V = \pi r^2 l$ y $S = 2\pi rl + 2\pi r^2$. Calcule $\partial M/\partial r$ y $\partial M/\partial l$ y, por tanto, encontrando cómo un incremento en el radio y en la longitud afecta la razón del metabolismo.

47. *(Zoología)* La razón por la cual el cuerpo de un animal pierde calor por convección está dada por $H = a(T - T_0)v^{1/3}$, donde T y T_0 son las temperaturas del cuerpo del animal y del aire que lo rodea, v es la velocidad del viento y a es una constante. Calcule $\partial H/\partial T$, $\partial H/\partial T_0$ y $\partial H/\partial v$, e interprete estas cantidades.

48. *(Difusión)* Si se inyecta una sustancia en una vena, su concentración en cualquier punto en la vena variará con el tiempo t y con la distancia x desde el punto de inyección. Bajo ciertas condiciones, la concentración puede describirse como una función de la forma

$$C(x, t) = \frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/(at)}$$

donde a y c son constantes. Pruebe que $C(x, t)$ satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{a}{4}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

(Esta ecuación se conoce como la ecuación de difusión).

■ 7-3 APLICACIONES PARA ANÁLISIS EN LA ADMINISTRACIÓN

La derivada ordinaria dy/dx puede considerarse como la tasa de cambio de y con respecto a x. Esta interpretación a menudo es útil [por ejemplo, el ingreso marginal $R'(x)$ representa la tasa de cambio del ingreso con respecto al volumen de ventas o, aproximadamente, el cambio en el ingreso por unidad adicional vendida]. Pueden darse interpretaciones similares en el caso de las derivadas parciales. Por ejemplo, si $z = f(x, y)$, entonces, $\partial z/\partial x$ da la tasa de cambio de z con respecto a x cuando y es constante.

EJEMPLO 1 Se lanza un nuevo producto al mercado. El volumen de ventas x se incrementa como una función del tiempo t y depende también de la cantidad A gastada en la campaña publicitaria. Si, con t medido en meses y A en dólares,

$$x = 200(5 - e^{-0.002A})(1 - e^{-t})$$

calcule $\partial x/\partial t$ y $\partial x/\partial A$. Evalúe estas derivadas cuando $t = 1$ y $A = 400$ e interprétalas.

Solución Tenemos que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200(5 - e^{-0.002A})e^{-t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial A} = 0.4e^{-0.002A}(1 - e^{-t})$$

Haciendo $t = 1$ y $A = 400$, obtenemos los valores

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200(5 - e^{-0.8})e^{-1} \approx 335, \qquad \frac{\partial x}{\partial A} = 0.4e^{-0.8}(1 - e^{-1}) \approx 0.11$$

La derivada parcial $\partial x/\partial t$ representa la tasa de incremento en el volumen de ventas con respecto al tiempo cuando el gasto en publicidad se mantiene fijo. Por ejemplo, cuando

☛ **10.** Repita el ejemplo 1, si el volumen de ventas está dado por

$$x = 25\frac{1 + (1 + 0.01\sqrt{A})t}{4 + t}$$

este gasto está fijo en \$400, el volumen de ventas después de un mes ($t = 1$) crece a una tasa instantánea de 335 por mes.

De manera similar, $\partial x/\partial A$ da el incremento en el volumen de ventas en un instante fijo que ocurre por cada dólar adicional gastado en publicidad. En el instante $t = 1$, cuando \$400 ya se han gastado en publicidad, un dólar adicional gastado incrementará el volumen de ventas en 0.11 unidades. ☛ **10**

Productividad marginal

La producción total del producto de una empresa depende de un gran número de factores, los cuales la empresa a menudo tiene flexibilidad de modificar. Por lo común los dos factores más importantes son la cantidad de mano de obra empleada por la empresa y el monto del capital invertido en edificios, maquinaria, etc. Denotemos con L el número de unidades de mano de obra empleadas por la empresa (digamos en horas-hombre por año o en dólares por año gastados en salarios) y sea K el monto del capital invertido en la planta productiva de la empresa. Entonces la producción total P (por ejemplo, el número de unidades del producto de la empresa producidas al mes) es alguna función de L y K, y escribimos $P = f(L, K)$. Esta función se conoce como **función de producción** de la empresa y las variables L y K son ejemplos de **factores insumo de producción** (esto es, variables que afectan el nivel de producción).

En ciertos casos, los cambios en K y L no son independientes entre sí. Por ejemplo, si la empresa compra una máquina extra, también debe contratar mano de obra adicional con el objetivo de operarla. Por otra parte, K y L a menudo son variables independientes en el contexto de la estrategia de producción básica de la empresa. Por ejemplo, la empresa puede elegir invertir una gran cantidad de capital en una planta altamente automatizada y, de esta manera, emplear relativamente poca mano de obra o, por otro lado, puede decidir utilizar maquinaria menos sofisticado y más mano de obra. En general, K y L pueden considerarse como variables independientes.

La derivada parcial $\partial P/\partial L$ se denomina la **productividad marginal de la mano de obra** y $\partial P/\partial K$ se conoce como la **productividad marginal del capital**. $\partial P/\partial L$ mide el incremento en la producción por incremento unitario en la cantidad de la mano de obra empleada cuando el capital invertido K se mantiene fijo. En forma análoga, $\partial P/\partial K$ mide el incremento en la producción por incremento unitario en el capital invertido cuando la mano de obra empleada se mantiene constante.

EJEMPLO 2 La función de producción de cierta empresa está dada por

$$P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

en donde L es el insumo mano de obra medido en miles de horas-hombre por semana, K es el monto de capital invertido medido en miles de dólares por semana y P es la producción semanal en miles de artículos. Determine las productividades marginales cuando $L = 5$ y $K = 12$ e interprete el resultado.

Respuesta $x_t = 25\,\dfrac{3 + 0.04\sqrt{A}}{(4 + t)^2}$

$x_A = 25\,\dfrac{0.005t}{\sqrt{A}(4 + t)}$

Cuando $t = 1$ y $A = 400$, $x_t = 3.8$, $x_A = 0.00125$

Solución Puesto que

$$P = 5L + 2L^2 + 3LK + 8K + 3K^2$$

las productividades marginales son

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4L + 3K \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial K} = 3L + 8 + 6K$$

Cuando $L = 5$ y $K = 12$,

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 5 + 4(5) + 3(12) = 61, \qquad \frac{\partial P}{\partial K} = 3(5) + 8 + 6(12) = 95$$

Esto significa que si $L = 5$ y $K = 12$ (esto es, se emplean 5000 horas-hombre por semana y el monto del capital invertido es de \$12,000 a la semana), entonces, P se incrementa en 61 por cada incremento unitario en L y P se incrementa en 95 por cada incremento unitario en K. Por tanto, la producción se incrementa en 6100 artículos por semana por cada 1000 horas-hombres adicionales de mano de obra empleada cuando K se mantiene fija, y la producción se incrementa en 9500 artículos por semana por cada \$1000 adicionales de incremento en el monto semanal del capital invertido cuando L se mantiene fijo. ☛ **11**

☛ **11.** Determine las productividades marginales de la mano de obra y del capital para la función de producción $P = cK^aL^{1-a}$, en donde c y a son constantes.

Las segundas derivadas de P con respecto a K y L tienen también interpretaciones como tasas de cambio marginales. La tasa cuando la productividad marginal $\partial P/\partial K$ se incrementa con respecto a cambios en el monto del capital se mide por $\partial^2 P/\partial K^2$. En forma análoga, $\partial^2 P/\partial L^2$ mide la tasa cuando la productividad marginal $\partial P/\partial L$ se incrementa con respecto a cambios en la cantidad de mano de obra empleada. Pueden hacerse interpretaciones semejantes para las derivadas mixtas $\partial^2 P/\partial K\, \partial L$ y $\partial^2 P/\partial L\, \partial K$.

Relaciones de demanda: elasticidades cruzadas

Consideremos ahora una aplicación diferente (a relaciones de demanda). Antes supusimos que la demanda de un artículo sólo depende del precio por unidad del artículo particular. En la práctica, esto no siempre es cierto porque la demanda de un artículo puede verse afectada por el precio de algún otro artículo relacionado. Por ejemplo, la demanda del filete de res en el supermercado no sólo depende del precio por kilo del filete mismo, sino también del precio por kilo de filete de cerdo. Cualquier cambio en el precio en la carne de cerdo afectará siempre la demanda de la carne de res y viceversa, dado que algunos consumidores estarán dispuestos a cambiar de un producto a otro.

En general, sean A y B dos artículos relacionados tales que el precio de uno afecta la demanda del otro. Denotemos con p_A y p_B los precios unitarios de los dos artículos. Entonces, sus demandas x_A y x_B se supone que son funciones de ambos precios p_A y p_B, esto es,

$$x_A = f(p_A, p_B) \quad \text{y} \quad x_B = g(p_A, p_B)$$

Podemos calcular cuatro derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A}, \frac{\partial x_A}{\partial p_B}, \frac{\partial x_B}{\partial p_A}, \frac{\partial x_B}{\partial p_B}$$

Respuesta
$\frac{\partial P}{\partial L} = (1 - a)cK^aL^{-a}$,
$\frac{\partial P}{\partial K} = acK^{a-1}L^{1-a}$

La derivada parcial $\partial x_A/\partial p_A$ puede interpretarse como la **demanda marginal de A con respecto a p_A**. De manera similar, $\partial x_A/\partial p_B$ es la **demanda marginal de A con respecto a p_B** y mide la cantidad en que la demanda de A crece por incremento unitario en el precio de B. Pueden darse interpretaciones similares a las otras dos derivadas parciales.

Si el precio del artículo B se mantiene fijo, entonces, en general, un incremento en el precio de A da como resultado una disminución en la demanda x_A de A. En otras palabras, $\partial x_A/\partial p_A < 0$. En forma análoga, $\partial x_B/\partial p_B < 0$. Las derivadas parciales $\partial x_A/\partial p_B$ y $\partial x_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas, dependiendo de la interacción particular entre los dos productos. Por ejemplo, suponga que los dos artículos son filete de res (A) y de cerdo (B). Un incremento en el precio de A (filete de res) da como resultado un incremento en la demanda de B (carne de cerdo) cuando el precio de B permanece sin cambio, dado que algunos consumidores cambiarán de A a B. Así, $\partial x_B/\partial p_A > 0$. De manera similar, si el precio de A (filete de res) permanece sin cambio, un incremento en el precio de B (carne de cerdo) da como resultado un incremento en la demanda de A (filete de res), esto es, $\partial x_A/\partial p_B > 0$.

Los dos artículos A y B se dice que son **competitivos** entre sí

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} > 0$$

esto es, si un incremento en el precio de uno de ellos da como resultado un incremento en la demanda del otro.

Algunas veces un incremento en el precio de un artículo da como resultado una disminución en la demanda del otro (suponiendo que su precio permanece sin cambio). En otras palabras, tanto $\partial x_A/\partial p_B$ como $\partial x_B/\partial p_A$ son negativas. En tal caso, se dice que los dos productos A y B son **complementarios entre sí**. Por ejemplo, las películas fotográficas y las cámaras son dos productos complementarios. Si las cámaras se hacen más costosas, entonces habrá una caída en la demanda de las películas.

EJEMPLO 3 Las demandas x_A y x_B de los productos A y B están dadas por las funciones

$$x_A = 300 + 5p_B - 7p_A^2 \quad \text{y} \quad x_B = 250 - 9p_B + 2p_A$$

en donde p_A y p_B son los precios unitarios de A y B, respectivamente. Determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios entre sí.

Solución Las cuatro funciones de demanda marginal están dadas por las cuatro derivadas parciales.

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -14p_A, \qquad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 5$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial p_A} = 2, \qquad \frac{\partial x_B}{\partial p_B} = -9$$

Puesto que $\partial x_A/\partial p_B$ y $\partial x_B/\partial p_A$ son positivas, los productos son competitivos.

☛ **12.** Dos productos A y B tienen demandas dadas por
$x_A = 20 - 2p_A - 0.2p_B$
$x_B = 50 - p_A - 5p_B$
¿Los productos son complementarios o competitivos? Cuando $p_A = 5$ y $p_B = 5$, calcule la elasticidad del producto A con respecto a su propio precio y su elasticidad cruzada con respecto al precio de B.

Considere la función de demanda del producto A: $x_A = f(p_A, p_B)$ en donde p_A es el precio por unidad de A y p_B es el precio unitario del producto relacionado B. Entonces, el **precio de la elasticidad de la demanda de *A*** se define por

$$\eta_{p_A} = \frac{\partial x_A / \partial p_A}{x_A / p_A} = \frac{p_A}{x_A}\frac{\partial x_A}{\partial p_A}$$

(Véase la sección 4-3). La **elasticidad de la demanda cruzada de *A* con respecto a p_B** se define por

$$\eta_{p_B} = \frac{\partial x_A / \partial p_B}{x_A / p_B} = \frac{p_B}{x_A}\frac{\partial x_A}{\partial p_B}$$

Aquí, η_{p_A} puede interpretarse como la razón del cambio porcentual de la demanda de A al cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B permanece fijo. En forma análoga, η_{p_B} puede pensarse como la razón del cambio porcentual en la demanda de A al cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A se mantiene fijo.

EJEMPLO 4 La función de demanda del producto A está dada por

$$x_A = 250 + 0.3p_B - 5p_A^2$$

Determine η_{p_A} y η_{p_B} cuando $p_A = 6$ y $p_B = 50$

Solución En este caso, tenemos que

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -10p_A \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0.3$$

Si $p_A = 6$ y $p_B = 50$, resulta que

$$x_A = 250 + 0.3(50) - 5(6^2) = 85$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -10(6) = -60 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0.3$$

En consecuencia,

$$\eta_{p_A} = \frac{\partial x_A / \partial p_A}{x_A / p_A} = \frac{-60}{(85/6)} \approx -4.24 \quad \text{asimismo}$$

$$\eta_{p_B} = \frac{\partial x_A / \partial p_B}{x_A / p_B} = \frac{0.3}{(85/50)} \approx 0.176$$

Por tanto, podemos decir que un incremento aproximado del 1% en el precio de A provocará una caída del 4.24% en la demanda de este producto; mientras que un incremento del 1% en el precio de B da como resultado un aumento del 0.176% en la demanda de A. ☛ **12**

Respuesta Son productos complementarios.
$\eta_{p_A} = -\frac{10}{9}$, $\eta_{p_B} = -\frac{1}{9}$

Aproximaciones

En el caso de una función $y = f(x)$, vimos en la sección 4-1 cómo utilizar la derivada en el cálculo de valores aproximados de la función en puntos de la forma

☛ **13.** Dada $f(x, y) = x^2y^3$ aproxime $f(-3 + h, 2 + k)$ por medio de una expresión lineal en h y k.

$x_0 + \Delta x$ cuando $f(x_0)$ se conoce, con tal de que Δx sea lo bastante pequeño. La aproximación está dada por

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

Esta fórmula de aproximación se extiende en forma natural a funciones de varias variables.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables que es diferenciable. Entonces, con tal de que Δx y Δy sean suficientemente pequeños,

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y}$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$, es fácil advertir que $f(10, 6) = 6$. Encuentre una expresión aproximada para $f(10 + h, 6 + k)$ válida para valores pequeños de h y k.

Solución Tomando $x_0 = 10$ y $y_0 = 6$ en la fórmula anterior para la aproximación tenemos $f(10 + \Delta x, 6 + \Delta y) \approx f(10, 6) + f_x(10, 6)\,\Delta x + fy(10, 6)\,\Delta y$. Después de derivar parcialmente, obtenemos

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$$
$$f_y(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$$

En el punto $(x_0, y_0) = (10, 6)$, estas derivadas parciales toman los valores

$$f_x(10, 6) = \tfrac{1}{2}(10 + 6)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(10 - 6)^{-1/2} = \tfrac{3}{8}$$
$$f_y(10, 6) = \tfrac{1}{2}(10 + 6)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(10 - 6)^{-1/2} = -\tfrac{1}{8}$$

Por tanto, como $f(10, 6) = 6$,

$$f(10 + \Delta x, 6 + \Delta y) \approx 6 + \tfrac{3}{8}\Delta x - \tfrac{1}{8}\Delta y$$

Por último, reemplazando $\Delta x = h$ y $\Delta y = k$ obtenemos la aproximación pedida

$$f(10 + h, 6 + k) = 6 + \tfrac{3}{8}h - \tfrac{1}{8}k \tag{1}$$

Por ejemplo, tomando $h = 0.1$ y $k = -0.2$. Obtenemos

$$f(10.1, 5.8) \approx 6 + \frac{0.3 + 0.2}{8} = 6.0625$$

Comparando, el valor exacto de $f(10.1, 5.8)$ es

$$\sqrt{10.1 + 5.8} + \sqrt{10.1 - 5.8} = \sqrt{15.9} + \sqrt{4.3} = 6.0611\ldots$$ ☛ **13**

La fórmula aproximada de la ecuación (1) es una función *lineal* de h y k, y en consecuencia es mucho más fácil de manejar que la expresión completa de $f(10 + h, 6 + k)$. En general, esto ilustra la ventaja de esta técnica de aproximación al reemplazar una función complicada por una lineal.

Respuesta $72 - 48h + 108k$

☛ **14.** El ingreso, R, de una compañía depende del precio unitario p que se cobra por su producto y de la cantidad, A, por semana que se gasta en publicidad. Se sabe que cuando $p = 15$ y $A = 5000$, $R = 25{,}000$ y el ingreso marginal con respecto a p es –500 y con respecto a A es 4. Calcule el ingreso aproximado, si el precio fuese reducido a 12 y el gasto en publicidad se reduce a 4500.

Respuesta 24,500

EJEMPLO 6 Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede producir P unidades de su producto, en donde $P = f(L, K)$. La empresa no conoce la forma precisa de esta producción, pero dispone de la siguiente información.

1. Cuando $L = 64$ y $K = 20$, P es igual a 25,000.
2. Si $L = 64$ y $K = 20$, las productividades marginales de la mano de obra y del capital son $P_L = 270$ y $P_K = 350$.

La empresa contempla una expansión de su planta que cambiaría L a 69 y K a 24. Encuentre el incremento aproximado en la producción que se obtendría.

Solución Tomando $L_0 = 64$ y $K_0 = 20$, entonces para ΔL y ΔK pequeños

$$\begin{aligned} P = f(L_0 + \Delta L, K_0 + \Delta K) &\approx f(L_0, K_0) + f_L(L_0, K_0)\,\Delta L + f_K(L_0, K_0)\,\Delta K \\ &= 25{,}000 + 270\,\Delta L + 350\,\Delta K \end{aligned}$$

En la nueva operación, tendríamos que $\Delta L = 69 - 64 = 5$ y $\Delta K = 24 - 20 = 4$. En consecuencia,

$$P \approx 25{,}000 + 270(5) + 350(4) = 27{,}750$$

El incremento en la producción es por tanto de $27{,}750 - 25{,}000 = 2750$ ☛ **14**

EJERCICIOS 7-3

(1-6) *(Productividades marginales)* En el caso de las siguientes funciones de producción $P(L, K)$, determine las productividades marginales para los valores dados de L y K.

1. $P(L, K) = 7L + 5K + 2LK - L^2 - 2K^2$; $L = 3$, $K = 10$
2. $P(L, K) = 18L - 5L^2 + 3LK + 7K - K^2$; $L = 4$, $K = 8$
3. $P(L, K) = 50L + 3L^2 - 4L^3 + 2LK^2 - 3L^2K - 2K^3$; $L = 2$, $K = 5$
4. $P(L, K) = 25L + 2L^2 - 3L^3 + 5LK^2 - 7L^2K + 2K^2 - K^3$; $L = 3$, $K = 10$
5. $P(L, K) = 100L^{0.3} K^{0.7}$
6. $P(L, K) = 250L^{0.6} K^{0.4}$
7. *(Función de producción Cobb-Douglass)* Una función de producción de la forma $P(L, K) = cL^aK^b$, en donde c, a y b son constantes positivas y $a + b = 1$, se denomina una *función de producción Cobb-Douglass*. Pruebe que con respecto a esta función de producción,

$$L\,\frac{\partial P}{\partial L} + K\,\frac{\partial P}{\partial K} = P$$

8. *(Función de producción homogénea)* Se dice que una función de producción $P(L, K)$ es homogénea de grado n si $L\,\partial P/\partial L + K\partial P/\partial K = nP$ con n alguna constante. Determine si la función de producción dada por

$$P(L, K) = 5LK + L^2 - 3K^2 + a(L + K)$$

es homogénea o no. En caso afirmativo, ¿cuál es el grado de su homogeneidad?

(9-12) *(Demandas marginales)* Considere las siguientes funciones de demanda para los dos productos A y B, determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios.

9. $x_A = 20 - 3p_A + p_B$; $x_B = 30 + 2p_A - 5p_B$
10. $x_A = 150 - 0.3p_B^2 - 2p_A^2$; $x_B = 200 - 0.2p_A^2 - 3p_B^2$
11. $x_A = 30\sqrt{p_B}/\sqrt[3]{p_A^2}$; $x_B = 50p_A/\sqrt[3]{p_B}$

12. $x_A = 200p_B/p_A^2; \quad x_B = 300\sqrt{p_A}/p_B^3$

(13-16) *(Elasticidad cruzada)* En el caso de las siguientes funciones de demanda del producto A, determine η_{p_A} y η_{p_B} en los niveles de precio dados para los dos productos relacionados A y B.

13. $x_A = 250 + 0.3p_B - 2p_A^2; \quad p_A = 5, p_B = 40$

14. $x_A = 127 - 0.2p_B - p_A^2; \quad p_B = 30$

15. $x_A = 60p_B/\sqrt{p_A}; \quad p_A = 9, p_B = 2$

16. $x_A = 250/(p_A\sqrt{p_B}); \quad p_A = 5, p_B = 4$

17. *(Elasticidad de la demanda)* La función de demanda del producto A está dada por

$$Q = 327 + 0.2I + 0.5p_B - 2p_A^2$$

donde Q es la cantidad demandada, I el ingreso personal disponible del consumidor, y p_A y p_B son el precio unitario de A y el precio unitario del producto B, respectivamente.

a) Calcule el valor de la elasticidad de la demanda η_{p_A} si $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$.

b) Determine la elasticidad cruzada de la demanda de η_{p_B} de A si $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$.

c) Calcule la elasticidad de la demanda dada por el ingreso para A,

$$\eta_I = \frac{\partial Q/\partial I}{Q/I} = \frac{I}{Q}\,\frac{\partial Q}{\partial I}$$

con $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$

18. *(Elasticidades de la demanda)* Repita el ejercicio 17 en el caso de un producto A si la demanda está dada por la fórmula

$$Q = 250 + 0.1I + 0.3p_B - 1.5p_A^2$$

***19.** La demanda de cierto artículo está dada por la función $x = ap^{-bI^c}$, con a, b y c son constantes, p es el precio e I es el ingreso disponible del consumidor. Calcule la elasticidad del precio y la elasticidad de la demanda del ingreso. (Véase el ejercicio 17). Si la función de oferta del artículo es $x = rp^s$, con r y s constantes, determine el valor de p que alcanza el equilibrio del mercado. A partir de esta p calcule dp/dI e interprete la derivada.

20. *(Utilidades marginales)* Se descubre que la utilidad por acre de cierto cultivo de trigo es

$$P = 40L + 5S + 20F - 3L^2 - S^2 - 2F^2 - 4SF$$

en donde L es el costo de la mano de obra, S es el costo de la semilla y F es el costo del fertilizante. Calcule $\partial P/\partial L$, $\partial P/\partial S$ y $\partial P/\partial F$ y evalúelas cuando $L = 10$, $S = 3$ y $F = 4$. Interprete estas derivadas.

(21-22) Si $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule una aproximación de los siguientes valores.

21. $f(3.1, 4.1)$

22. $f(5.1, 11.8)$

(23-24) Si $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre una aproximación a los siguientes valores.

23. $f(5.2, 2.9)$

24. $f(25.1, 23.9)$

(25-26) Si $f(x, y) = (x - y)/\sqrt{x + y}$, encuentre una aproximación a los siguientes valores.

25. $f(2.1, 1.95)$

26. $f(4.0, 5.1)$

27. *(Cambio en el nivel de producción)* Una empresa puede producir P unidades de su producto al utilizar L unidades de mano de obra y K unidades de capital, con

$$P(L, K) = 100L^{3/4}K^{1/4}$$

a) Calcule la producción total cuando $L = 81$ y $K = 16$

b) Aproxime el efecto de reducir L a 80 e incrementar K a 17

28. *(Cambio en el nivel de producción)* La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = 450L^{3/5}K^{2/5}$$

en donde P representa la producción cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital.

a) Determine la producción de la empresa si $L = 243$ y $K = 32$

b) Aproxime el efecto de incrementar la mano de obra a 248 unidades y disminuir el capital a 31 unidades.

29. *(Producción aproximada)* La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

en donde P representa la producción total cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital. Aproxime la producción total cuando $L = 1003$ y $K = 28$.

■ 7-4 OPTIMIZACIÓN

En el capítulo 3 vimos que uno de los usos más importantes y de mayor aplicación del cálculo de funciones de una sola variable es la determinación de los valores máximos y mínimos de funciones. El problema correspondiente, el cálculo de máximos y mínimos de funciones de varias variables, es igual de importante, y en esta sección lo estudiaremos en el caso de funciones de dos variables.

DEFINICIÓN La función $f(x, y)$ tiene un **máximo local** en el punto (x_0, y_0) si $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ para todos los puntos (x, y) lo suficientemente cercanos a (x_0, y_0) con excepción de (x_0, y_0) mismo.

La función $f(x, y)$ tiene un **mínimo local** en el punto (x_0, y_0) si $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, para todos los puntos (x, y) lo suficientemente cercanos a (x_0, y_0), con excepción de (x_0, y_0) mismo.

El valor correspondiente de $f(x_0, y_0)$ se denomina el **valor máximo local** (o **valor minimo local**, según sea el caso) de la función f. El término **extremo** abarca tanto a máximos como a mínimos.

En el caso de funciones de una variable, estudiamos dos tipos de extremos, uno en el que la derivada se hacía igual a cero y otro en que la derivada no existía, correspondiendo a una esquina o pico de la gráfica de la función. En esta sección, por razones de simplicidad, nos restringiremos al primer tipo. Esto es, sólo consideraremos funciones cuyas gráficas sean superficies suaves en tres dimensiones. Esta restricción no es seria dado que la vasta mayoría de las aplicaciones tratan con funciones cuyas gráficas son suaves.

Sea la función $z = f(x, y)$ con un máximo local en (x_0, y_0). Construyamos la sección vertical de la gráfica determinada por $y = y_0$, es decir, la sección a través del punto máximo. Esta tiene la ecuación $z = f(x, y_0)$ y puede representarse por una gráfica en el plano xz. (Véase la figura 13). Puesto que la superficie $z = f(x, y)$ presenta un máximo si $x = x_0$ y $y = y_0$, esta sección debe tener un máximo local en $x = x_0$.

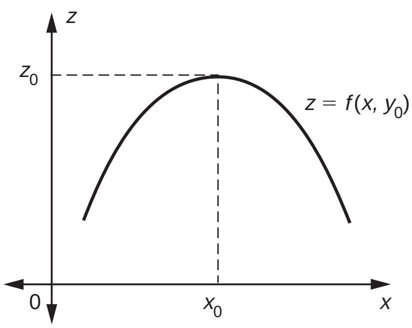


FIGURA 13

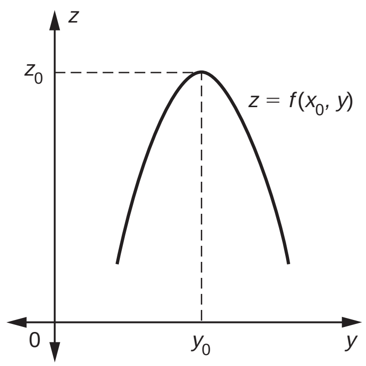


FIGURA 14

☛ **15.** Determine los puntos críticos de las siguientes funciones:
a) $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$
b) $f(x, y) =$
$x^2 + 3xy - 5y^2 - 7x + 4y + 8$

En consecuencia, la pendiente a esta sección, que está dada por la derivada $\partial z/\partial x = f_x(x, y_0)$, debe ser cero si $x = x_0$.

En forma similar, consideremos la sección correspondiente a $x = x_0$, que consta de una curva en el plano yz con ecuación $z = f(x_0, y)$. Esta curva tiene un máximo cuando $y = y_0$, y así la pendiente $\partial z/\partial y = f_y(x_0, y)$ debe ser igual a cero si $y = y_0$. (Véase la figura 14).

Lo cual nos lleva al siguiente teorema.

TEOREMA 1 Si $f(x, y)$ tiene un máximo local o un mínimo local en el punto (x_0, y_0), entonces, es necesario que

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0}$$

(La exposición relativa a un mínimo local es paralela a la ya dada para un máximo local).

DEFINICIÓN Un **punto crítico** de una función suave $f(x, y)$ es un punto (x_0, y_0) en que $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

A partir de la discusión anterior es claro que todo extremo local de una función suave debe ser un punto crítico. Sin embargo, *no todo punto crítico es un extremo*, como en el caso de funciones de una variable. Volveremos a esta cuestión en un momento.

EJEMPLO 1 Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + x - y$$

Solución Debemos hacer las derivadas parciales f_x y f_y iguales a cero:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + 1 = 0$$
$$f_y(x, y) = x^2 - 1 = 0$$

De la segunda de estas ecuaciones se sigue que $x^2 = 1$, o $x = \pm 1$. Y de la primera, tenemos ahora que

$$2xy = -3x^2 - 1 = -3(1) - 1 = -4 \qquad \text{esto es,} \qquad y = \frac{-4}{2x} = \frac{-2}{x}$$

Así que, $y = -2$ si $x = 1$; y cuando $x = -1$, $y = +2$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(1, -2)$ y $(-1, 2)$ ☛ **15**

En el caso de una función $f(x)$ de una variable, en el capítulo 3 vimos que no todo punto crítico necesariamente es un extremo local. Un punto crítico en que $f'(x) = 0$ puede ser máximo local, mínimo local o un punto de inflexión, y en el capítulo 3 desarrollamos técnicas para distinguir entre estas posibilidades. Son ne-

Respuesta *a*) (0, 0) *b*) (2, 1)

cesarias pruebas similares en el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables, ya que de nuevo no todo punto crítico es un extremo. Esto se ilustra por la función $z = x^2 - y^2$, que se consideró en el ejemplo 8 de la sección 7-1. Esta función tiene un punto crítico en el origen que no es máximo local ni mínimo local. La sección vertical de su gráfica determinada por el plano $y = 0$ tiene un mínimo local en el origen; mientras que la sección vertical de su gráfica definida por el plano $x = 0$ presenta un máximo local en el origen. (Véanse las figuras 6 a 8). Un punto crítico de este tipo se denomina un **punto silla**.

Si $f(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0), entonces, es necesario que la sección determinada por $y = y_0$ también deba tener un máximo local en $x = x_0$. (Esto es claro si observamos la figura 13). Esto se garantiza, si $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, por la prueba de la segunda derivada de la sección 3.3. De forma similar, si $f_y(x_0, y_0) = 0$ y $f_{yy}(x_0, y_0)$, entonces, la sección de la gráfica, en la que $x = x_0$ es constante, debe ser cóncava hacia abajo y, por tanto, tiene un máximo local en (x_0, y_0).

De manera similar, podemos advertir que si $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$, entonces, la sección de la gráfica en que $x = x_0$ debe ser cóncava hacia abajo y tiene, por tanto, un máximo local en (x_0, y_0).

Sin embargo, las dos condiciones $f_{xx} < 0$ y $f_{yy} < 0$ y en (x_0, y_0) no son suficientes para garantizar que la superficie misma tenga un máximo local en (x_0, y_0). Sólo garantizan que las secciones verticales definidas por los dos planos coordenados $x = x_0$ y $y = y_0$ tengan máximos locales en el punto (x_0, y_0). Es muy posible que las secciones de la gráfica tengan máximos locales en estos planos verticales, aunque tengan un mínimo local en algún otro plano vertical a través de (x_0, y_0). ☛ **16**

☛ **16.** Sea $f(x, y) = (x - y)^2 - 2(x + y)^2$
Demuestre que f tiene un punto crítico en (0, 0) en el que $f_x = f_y = -2$. Sin embargo, f no tiene un máximo local en el origen: en el plano vertical $y = -x$, $f(x, y) = (x - y)^2 = 4x^2$, la cual tiene un mínimo local en $x = 0$

Por tanto, es claro que se requiere alguna condición extra con la finalidad de completar el criterio para un máximo o mínimo. Esto se logra mediante el siguiente teorema (que no probaremos).

TEOREMA 2 Sea (x_0, y_0) un punto crítico de la función $f(x, y)$ para la cual $f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Sea

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

a) Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, $f(x, y)$ tiene un máximo local en (x_0, y_0).

b) Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, $f(x, y)$ tiene un mínimo local en (x_0, y_0).

c) Si $\Delta(x_0, y_0) < 0$, entonces, (x_0, y_0) no es extremo local de $f(x, y)$, sino es un punto silla.

Observaciones

1. Si $\Delta(x_0, y_0) = 0$, entonces, este teorema no puede aplicarse para decidir sobre máximos o mínimos.
2. Si $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces, f_{xx} y f_{yy} necesariamente tienen el mismo signo en (x_0, y_0). En consecuencia, en los casos *a*) y *b*) del teorema 2, sólo debe determinarse el signo de una de estas derivadas parciales.

EJEMPLO 2 Encuentre los extremos locales de la función

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y$$

Solución En primer término, hallamos los puntos críticos.

$$f_x = 2x + 2y + 2 = 0$$
$$f_y = 2x + 4y - 2 = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneas, obtenemos $x = -3$ y $y = 2$. Así que $(-3, 2)$ es el único punto crítico.

Ahora aplicamos el teorema 2 para probar si este punto crítico es máximo o mínimo local. Derivando una vez más encontramos que

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 4 \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = 2$$

Por tanto, $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(4) - 2^2 = 8 - 4 = 4$. De modo que $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ y $\Delta > 0$, y así el punto $x = -3$, $y = 2$ es un mínimo local de f. El valor mínimo local de f es

$$f(-3, 2) = (-3)^2 + 2(-3)(2) + 2(2)^2 + 2(-3) - 2(2) = -5$$ ☛ **17**

☛ **17.** Determine los extremos locales de las siguientes funciones:
a) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2$
b) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - x + 2y + 1$

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre fijación de precios)*** La Corporación de cremas dentífricas orgánicas produce crema para dientes en dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tubo de cada tamaño es de 60¢ y 90¢, respectivamente. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños son de

$$x_1 = 3(p_2 - P_1)$$
$$x_2 = 320 + 3p_1 - 5p_2$$

donde p_1 y p_2 son los precios en centavos de los tubos. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades de la compañía.

Solución La utilidad obtenida por cada tubo de 100 mililitros de crema dental es de $(p_1 - 60)$ centavos y la utilidad por cada tubo de 150 mililitros es de $(p_2 - 90)$ centavos. Por tanto, la utilidad P (en miles de centavos, porque las demandas son en miles) obtenida vendiendo x_1 tubos de 100 mililitros y x_2 tubos de 150 mililitros está dada por

$$\begin{aligned} P &= (p_1 - 60)x_1 + (p_2 - 90)x_2 \\ &= 3(p_1 - 60)(p_2 - p_1) + (p_2 - 90)(320 + 3p_1 - 5p_2) \\ &= -3p_1^2 - 5p_2^2 + 6p_1p_2 - 90p_1 + 590p_2 - 28{,}800 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = 6p_2 - 6p_1 - 90 \qquad \text{y asimismo} \qquad \frac{\partial P}{\partial p_2} = 6p_1 - 10p_2 + 590$$

En la utilidad máxima, $\partial P/\partial p_1 = \partial P/\partial p_2 = 0$. Esto es,

$$6p_2 - 6p_1 - 90 = 0 \qquad \text{y} \qquad 6p_1 - 10p_2 + 590 = 0$$

Respuesta *a*) Punto silla en (0, 0) *b*) mínimo local en $(2, -1)$.

Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos $p_1 = 110$ y $p_2 = 125$. También $\partial^2P/\partial p_1^2 = -6$, $\partial^2P/\partial p_2^2 = -10$ y $\partial^2P/\partial p_1\,\partial p_2 = 6$. Por consiguiente,

$$\Delta = \frac{\partial^2P}{\partial p_1^2}\cdot\frac{\partial^2P}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial^2P}{\partial p_1\,\partial p_2}\right)^2 = (-6)(-10) - 6^2 > 0$$

Puesto que $\Delta > 0$ y $\partial^2P/\partial p_1^2$, $\partial^2P/\partial p_2^2$ son negativas, los precios $p_1 = 110$¢ y $p_2 = 125$¢ le producirán una utilidad máxima a la compañía. Con estos valores de p_1 y p_2, las demandas son de $x_1 = 45$ y $x_2 = 25$ (en miles por semana).

También surgen problemas en los cuales necesitamos encontrar los valores máximos y mínimos de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de varias variables. De nuevo, resolvemos tales problemas haciendo todas las derivadas parciales iguales a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Esto nos da n ecuaciones que deben resolverse para las variables $x_1, \ldots, x_n$. El punto resultante es un punto crítico de f.

El criterio que debe aplicarse con la finalidad de probar si el punto crítico es un máximo, o mínimo local o un punto silla, es más complicado que el dado para funciones de dos variables y no lo estudiaremos aquí.*

EJERCICIOS 7-4

(1-22) Halle los puntos críticos de las siguientes funciones y pruebe si cada uno de ellos es un máximo o mínimo local.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7$

2. $f(x, y) = 5 + 4x + 6y - x^2 - 3y^2$

3. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y$

4. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

5. $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$

6. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$

7. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 3y^2 - x - 3y$

8. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x + 5y + 4$

9. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 7$

10. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$

11. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3 - y$

12. $f(u, v) = u^3 + v^3 - 3uv^2 - 3u + 7$

13. $f(x, y) = 2xy(x + y) + x^2 + 2x$

14. $f(x, y) = xy(x - y) + y^2 - 4y$

15. $f(x, y) = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y}$

16. $f(x, y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y}$

17. $f(x, y) = (x - 2)(y - 2)(x + y - 3)$

18. $f(x, y) = (x - 1)(y + 2)(x + y - 2)$

19. $f(x, y) = xy + \ln x + y^2$

20. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - \ln(xy^2)$

*Véase, por ejemplo, A.E. Taylor y W.R. Mann, *Advanced Calculus,* 2a. ed. (Lexington, Mass.: Xerox College Publishing), p. 230.

21. $f(x, y) = xe^{-x} + ye^{-2y}$

22. $f(p, q) = 25q(1 - e^{-p}) - 50p - q^2$

23. *(Costo mínimo de producción)* Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir x unidades de A y y unidades de B está dado por $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$. Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.

24. *(Utilidad máxima)* Si la empresa del ejercicio 23 anterior puede vender cada unidad de A a \$20 y cada unidad de B a \$16, encuentre los niveles de producción de A y B que maximizarían las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la utilidad diaria máxima?

25. *(Costo de producción mínimo)* Repita el ejercicio 23 si

$$C(x, y) = 1500 - 7.5x - 15y - 0.3xy + 0.3x^2 + 0.2y^2$$

26. *(Promoción óptima y niveles de producción)* Si x denota la producción de la empresa (en cientos) y y la cantidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender el producto, entonces la utilidad de la empresa P (en miles de dólares) está dada por $P(x, y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$. ¿Qué valores de x y y producirán la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

27. *(Utilización óptima de mano de obra y tamaño del lote)* El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dado por $C(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 5xy + 3x - 14y + 20$, en donde x denota el número de horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

28. *(Producción máxima)* Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por $P(L, K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$. Halle el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar para maximizar su producción.

29. *(Uso óptimo de materiales)* Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X y Y, en su producto. Usando x unidades de X y y unidades de Y, la empresa puede elaborar P unidades del producto, con $P = 0.52x + 0.48y + 0.12xy - 0.07x^2 - 0.06y^2$. Si el costo de cada unidad de X es de \$5.10 y de \$1.80 por cada unidad utilizada de Y, y la empresa puede vender todas las unidades que produce a \$15 cada una. ¿Qué cantidades de X y Y debería utilizar la empresa con el propósito de maximizar sus utilidades?

30. *(Costo mínimo)* Usando L unidades del insumo mano de obra y K unidades del insumo capital, una empresa fabrica cierta producción de su artículo, cuyo costo total T (en millones de dólares) está dado por $T = 40 - 5K - 3L - 2KL + 1.5K^2 + L^2$. Determine la cantidad de cada insumo que debería utilizarse con el propósito de minimizar el costo de la empresa. ¿Cuál es el costo mínimo?

31. *(Fijación óptima de precios de productos que compiten entre sí)* La compañía occidental de dulces produce caramelos en dos tamaños a costos unitarios de 10¢ y 20¢ cada uno. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños están dadas por

$$x_1 = p_2 - p_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 60 + p_1 - 3p_2$$

en donde p_1 y p_2 denotan los precios en centavos de los caramelos en los dos tamaños. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades semanales de la empresa.

32. *(Fijación óptima de precios de productos que compiten entre sí)* Juguetes Mónica produce dos tipos diferentes de cochecitos de plástico con un costo de 10¢ y 30¢ cada uno. Las demandas anuales x_1 y x_2 (en miles) están dadas por

$$x_1 = 30 + 2p_2 - 5p_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 100 + p_1 - 2p_2$$

con p_1 y p_2 los precios unitarios (en centavos) de los dos tipos de cochecitos. Determine los precios p_1 y p_2 que la compañía debe fijar para maximizar sus utilidades.

33. *(Publicidad óptima y fijación de precios)* A una compañía le cuesta \$2 por unidad elaborar su producto. Si A dólares se gastan por mes en publicidad, entonces, el número de unidades por mes que se venderá está dado por $x = 30(1 - e^{-0.001A})(22 - p)$ en donde p es el precio de venta. Halle los valores de A y p que maximizarán la utilidad mensual neta de la empresa y calcule el valor de esta utilidad máxima.

***34.** *(Publicidad óptima y fijación de precios)* Con el objetivo de fabricar x artículos por semana, la función de costo semanal de una empresa es $C(x) = 50 + \frac{20}{3}x + \frac{1}{60}x^2$. Si A dólares por semana se gastan en publicidad, el precio p (en dólares) en que la demanda será de x artículos por semana está dado por

$$p = 20 - \frac{x}{60(1 - e^{-0.001A})}$$

Determine los valores de x y A que maximizan la utilidad semanal y calcule esta utilidad máxima.

35. *(Rendimiento óptimo de cultivos)* El valor en dólares de una plantación de jitomates producidos bajo calor artificial está dado por $V = 25T(1 - e^{-x})$ por unidad de área de suelo. Aquí T es la temperatura sostenida en grados Celsius

por encima de 10°C y x es la cantidad de fertilizante utilizado por unidad de área. El costo del fertilizante es de $50x$ por unidad de área y el costo de la calefacción es igual a T^2 por unidad de área. Determine los valores de x y T que maximizan la utilidad de la plantación. Calcule la utilidad máxima por unidad de área.

***36.** *(Agricultura)* El número promedio de manzanas producidas por árbol en un huerto en que hay n árboles por acre está dado por $(A - \alpha n + \beta\sqrt{x})$ en donde A, α y β son constantes y x es la cantidad de fertilizante utilizado por acre. El valor de cada manzana es V y el costo por unidad de fertilizantes es F. Determine los valores de x y n que producen la utilidad (esto es, el valor del cultivo de manzanas menos el costo del fertilizante) máxima.

***37.** *(Existencias óptimas de peces)* En un lago se poblará con dos especies de peces. Cuando hay x peces de la primera especie y y peces de la segunda especie en el lago, los pesos promedio de las dos especies al fin de la estación son de $(3 - \alpha x - \beta y)$ libras y $(4 - \beta x - 2\alpha y)$ libras, respectivamente. Encuentre los valores de x y y que hacen que el peso total de los peces sea máximo.

***38.** *(Existencias óptimas de peces)* Repita el ejercicio 37 en el caso de que los pesos promedios de las dos especies de peces sean $(5 - 2\alpha x - \beta y)$ y $(3 - 2\beta x - \alpha y)$ libras, respectivamente.

39. *(Diseño de un tanque de agua)* Un tanque ha de construirse con ancho x, longitud y y profundidad z, y lo bastante grande para albergar 256 pies cúbicos de líquido. Si no tendrá tapa, ¿qué dimensiones minimizarían el área total de los restantes cinco lados del tanque (y por consiguiente la cantidad de material utilizada en su construcción)?

40. *(Medicina)* La reacción a una inyección de x unidades de cierta medicina medida t horas después de la inyección esta dada por $y = x^2(a - x)te^{-t}$. Calcule $\partial y/\partial x$ y $\partial y/\partial t$ y encuentre los valores de x y t donde la reacción es máxima.

41. *(Medicina)* Si en el ejercicio 40 la reacción a la medicina está dada por la fórmula $y = x(a - x)t^{1/2}e^{-xt}$, calcule:

a) El valor de t en el cual y es máxima, para x fija.

b) ¿Cuáles valores de x y t juntos hacen a y máxima?

42. *(Medicina)* En el tratamiento de cierta enfermedad se usan simultáneamente dos medicamentos. La reacción R medida en unidades adecuadas para x unidades de la primera droga y y unidades de la segunda es

$$R = x^2y^2\,(a - 2x - y)$$

Encuentre los valores de x y y que hacen a R máxima.

■ 7-5 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (SECCIÓN OPCIONAL)

Algunas veces afrontamos el problema de minimizar o maximizar cierta función sujeta a alguna restricción de las variables que intervienen. Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Una empresa desea construir un tanque rectangular con capacidad de 1500 pies cúbicos de agua. La base y las paredes verticales deberán ser de concreto y la tapa de acero. Si el costo del acero es el doble por unidad de área que el del concreto, determine las dimensiones del tanque que minimizan el costo total de construcción.

Solución Sean x, y y z (en pies) la longitud, el ancho y la altura del tanque rectangular, respectivamente. (Véase la figura 15). Entonces,

$$\text{Área de la base} = \text{Área de la tapa} = xy$$

y también

$$\text{Área de las cuatro paredes} = 2xz + 2yz$$

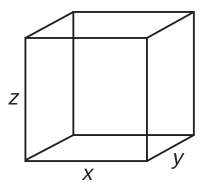


FIGURA 15

Sea p el costo del concreto por pie cuadrado. Se sigue que el costo del acero por pie cuadrado es de $2p$. El costo de construir la base y las cuatro paredes verticales con concreto a p por unidad de área es

$$p(xy + 2xz + 2yz)$$

El costo de construir la tapa con acero a $2p$ por unidad de área es $2pxy$. El costo total C es, por tanto,

$$C = p(xy + 2xz + 2yz) + 2pxy = p(3xy + 2xz + 2yz) \qquad (1)$$

El volumen de la caja debe ser de 1500 pies cúbicos. Esto es,

$$xyz = 1500 \qquad (2)$$

Note que hemos de minimizar la función de la ecuación (1) sujeta a la condición de la ecuación (2). Resolvemos este problema usando la restricción de la ecuación (2) con el propósito de eliminar una de las variables. A partir de la ecuación (2), $z = 1500/xy$, y sustituyendo esta expresión de z en la ecuación (1), obtenemos

$$C = p\left(3xy + \frac{3000}{x} + \frac{3000}{y}\right)$$

Ahora C es una función de dos variables que son independientes y podemos encontrar su mínimo en la forma ordinaria. En el caso de un máximo o un mínimo,

$$C_x = p\left(3y - \frac{3000}{x^2}\right) = 0 \quad \text{o bien} \quad x^2y = 1000$$

$$C_y = p\left(3y - \frac{3000}{y^2}\right) = 0 \quad \text{o bien} \quad xy^2 = 1000$$

Por tanto, se sigue que $x^2y = xy^2$. Dividiendo ambos lados entre xy (observe que x y y no pueden ser cero), obtenemos $x = y$.

Sustituyendo $y = x$ en $x^2y = 1000$, obtenemos $x^3 = 1000$ o $x = 10$. En consecuencia, $y = x = 10$.

Es fácil verificar que cuando $x = y = 10$, C_{xx}, C_{yy} y $\Delta = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2$ son positivas. Por consiguiente, el costo C es mínimo. Cuando $x = 10$ y $y = 10$, la ecuación (2) implica que $z = 15$. Así, para el costo mínimo, las dimensiones del tanque deberán ser de 10 pies por 10 pies por 15 pies.

En el ejemplo 1, eliminamos una de las variables (z en este caso) de la función C valiéndonos de la ecuación restrictiva y, luego, encontramos los puntos críticos de C. Algunas veces ocurre que no podemos resolver la ecuación restrictiva para alguna de las variables, de modo que ninguna de ellas puede eliminarse. Por ejemplo, si la ecuación restrictiva fuese $x^5 - 5x^3y^3 + z^3 + z^5 + 2y^5 + 16 = 0$, no podemos resolver para x y y o z en términos de las otras variables. Por otro lado, aunque fuera posible eliminar una variable empleando la ecuación restrictiva, puede suceder que la función resultante que debe optimizarse sea muy complicada de manejar.

Un método alternativo (que evita tal eliminación) fue desarrollado por el matemático francés J.L. Lagrange (1736-1813) y se conoce como el método de *multiplicadores de Lagrange*. Suponga que nos interesa encontrar el valor extremo de la función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Entonces, construimos una función auxiliar $F(x, y, z, \lambda)$ definida por

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

La nueva variable λ (lambda) se denomina **multiplicador de Lagrange**.

De acuerdo con el método de multiplicadores de Lagrange, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de $F(x, y, z, \lambda)$, entonces, (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, y recíprocamente. Así, con el objetivo de encontrar los puntos críticos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, podemos en lugar de ello hallar los puntos críticos de la función auxiliar $F(x, y, z, \lambda)$. Éstos están dados por las condiciones

$$\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ F_z &= f_z - \lambda g_z = 0 \\ F_\lambda &= \qquad -g = 0 \end{aligned}$$

☛ **18.** Suponga que deseamos encontrar el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 2x + 3y - 12 = 0$. Escriba las condiciones de los multiplicadores de Lagrange para el punto crítico y resuélvalas.

La última ecuación no es otra cosa que la ecuación restrictiva dada $g(x, y, z) = 0$. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente si $f(x, y, z)$ tendrá un máximo, un mínimo o un punto silla en el punto crítico. En problemas prácticos a menudo nos dejamos llevar por la intuición al decidir si el punto crítico da un máximo o un mínimo. Existe un criterio que puede aplicarse, pero es complicado. ☛ **18**

EJEMPLO 2 Resolvamos el ejemplo 1 de nuevo, esta vez por el método de multiplicadores de Lagrange. Teníamos la función

$$f(x, y, z) = C = p(3xy + 2yz + 2zx)$$

y la restricción $xyz = 1500$. Esta restricción puede escribirse en la forma

$$g(x, y, z) = xyz - 1500 = 0$$

La función auxiliar en este caso es

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= p(3xy + 2yz + 2zx) - \lambda(xyz - 1500) \end{aligned}$$

Los puntos críticos de F están determinados por las condiciones siguientes:

Respuesta $2x - \lambda \cdot 2 = 0$, $2y - \lambda \cdot 3 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$
La solución es $x = \frac{24}{13}$, $y = \frac{36}{13}$

$$\begin{aligned} F_x &= p(3y + 2z) - \lambda yz = 0 \\ F_y &= p(3x + 2z) - \lambda xz = 0 \\ F_z &= p(2x + 2y) - \lambda xy = 0 \end{aligned}$$

y también

$$F_\lambda = -xyz + 1500 = 0$$

De las primeras tres ecuaciones, tenemos

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{3y + 2z}{yz} = \frac{3}{z} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{3x + 2z}{xz} = \frac{3}{z} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{2x + 2y}{xy} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

Del primero y segundo valores de λ/p, resulta

$$\frac{3}{z} + \frac{2}{y} = \frac{3}{z} + \frac{2}{x} \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{2}{y} = \frac{2}{x}$$

de lo cual se sigue que $x = y$. Del segundo y tercero valores de λ/p,

$$\frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{3}{z} = \frac{2}{y}$$

Por tanto, $z = 3y/2$. Sustituyendo $x = y$ y $z = 3y/2$ en la expresión de F_λ, tenemos

$$-y \cdot y \cdot \frac{3}{2}y + 1500 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad y^3 = 1000$$

En consecuencia, $y = 10$. Por tanto, $x = y = 10$ y $z = \frac{3}{2}y = 15$

El punto crítico de $C(x, y, z)$ sujeto a la restricción $xyz = 1500$ está dado por $x = 10$ $y = 10$ y $x = 15$, como antes. ☛ **19**

☛ **19.** Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el valor mínimo de $f(x, y) = xy + 2yz + 3zx$ sujeta a la restricción $= xyz - 6000 = 0$

EJEMPLO 3 ***(Decisiones sobre inversiones en mano de obra y capital)*** Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, con

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

b) Demuestre que en este nivel máximo de producción la razón de los costos marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

c) Pruebe que si se dispone de \$1 adicionales para fines de producción en este nivel máximo de producción, la empresa puede producir aproximadamente λ unidades extra de su producto, en donde λ es el multiplicador de Lagrange. En otras palabras, λ puede interpretarse como la *productividad marginal del capital*.

Respuesta
$x = 20$, $y = 30$, $z = 10$, $f_{\text{mín}} = 1800$

Solución

a) Aquí la función a maximizar es

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ dólares. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45,000, debemos tener que

$$100L + 300K = 45{,}000$$

Maximizaremos $P(L, K)$ sujeta a esta restricción.

La función auxiliar es

$$F(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45{,}000)$$

Para de obtener un máximo de $P(L, K)$, debe tenerse que

$$F_L = \tfrac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$F_K = \tfrac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$F_\lambda = -(100L + 300K - 45{,}000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ,

$$\lambda = \tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3} \qquad (5)$$

Ahora igualamos los dos valores de λ.

$$\tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Multiplicando ambos lados por $L^{1/3}K^{2/3}$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3}K = \tfrac{1}{18}L \qquad \text{o bien,} \qquad L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de F_λ resulta que

$$600K + 300K - 45{,}000 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

b) Las productividades marginales de la mano de obra y del capital están dadas por

$$P_L = \tfrac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3}, \qquad P_K = \tfrac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3}$$

En el nivel máximo de producción, de las ecuaciones (3) y (4) tenemos

$$P_L = 100\lambda \qquad \text{y} \qquad P_K = 300\lambda \qquad (6)$$

Por tanto,

$$\frac{\text{Productividad marginal de la mano de obra}}{\text{Productividad marginal del capital}} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{100\lambda}{300\lambda} = \frac{1}{3}$$

Pero,

$$\frac{\text{Costo unitario de la mano de obra}}{\text{Costo unitario del capital}} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

Así que en el nivel de producción máximo, la razón de las productividades marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de las unidades de costo de la mano de obra y de capital.

c) En el nivel de producción máximo, cuando $L = 300$ y $K = 50$, tenemos dos formas de calcular λ (de las ecuaciones (5)):

$$\lambda = \tfrac{1}{3}(300)^{-1/3}(50)^{1/3} = 0.1835$$
$$\lambda = \tfrac{1}{18}(300)^{2/3}(50)^{-2/3} = 0.1835$$

Suponga que podemos emplear ΔL unidades de mano de obra y ΔK unidades de capital con \$1 extra de disponibilidad. Entonces,

$$100\Delta L + 300\Delta K = 1 \tag{7}$$

El aumento en la producción cuando la mano de obra se incrementa de 300 a $300 + \Delta L$ y el capital se incrementa de 50 a $50 + \Delta K$ está dado por

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(300 + \Delta L, 50 + \Delta K) - P(300, 50)\\ &\approx P_L(300, 50) \cdot \Delta L + P_K(300, 50) \cdot \Delta K\end{aligned}$$

Por la ecuación (6) se sigue que en el máximo $P_L(300, 50) = 100\lambda$ y $P_K(300, 50) = 300\lambda$. En consecuencia, el incremento en la producción es aproximadamente igual a

$$\Delta P \approx 100\lambda\, \Delta L + 300\lambda\, \Delta K = \lambda(100\, \Delta L + 300\, \Delta K) = \lambda$$

en donde usamos la ecuación (7). Así que un dólar extra disponible para producción incrementará ésta por una cantidad aproximada $\lambda = 0.1835$ unidades. En otras palabras, λ representa la productividad marginal del dinero.

EJEMPLO 4 ***(Decisiones de producción)*** Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos, A y B. Obtiene una utilidad de \$4 por unidad de A y de \$6 por unidad de B. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto, que es

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

con x y y los números de unidades (en miles) de A y B, respectivamente, producidas por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

Solución Deseamos maximizar la utilidad P, que está dada por

$$P(x, y) = 4x + 6y$$

(en miles de dólares por semana). Aquí x y y están sujetas a las restricciones

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \tag{8}$$

☛ **20.** Vuelva a resolver el ejemplo 4, si la ecuación de transformación del producto es $x^2 - 2y^2 + x + y = \frac{7}{4}$

Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, construimos la función

$$F(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Así, los puntos críticos están dados por

$$F_x = P_x - \lambda g_x = 4 - \lambda(2x + 2) = 0$$
$$F_y = P_y - \lambda g_y = 6 - \lambda(2y + 4) = 0$$
$$F_\lambda = -g = 0$$

Esta expresión de F_λ es igual que la ecuación restrictiva dada. A partir de las ecuaciones para F_x y F_y,

$$\lambda = \frac{2}{x + 1} = \frac{3}{y + 2}$$

Por consiguiente, $2(y + 2) = 3(x + 1)$ o $y = (3x - 1)/2$. Sustituyendo esto en la ecuación (8), obtenemos una ecuación sólo en términos de x.

$$x^2 + \left(\frac{3x - 1}{2}\right)^2 + 2x + 4\left(\frac{3x - 1}{2}\right) - 4 = 0$$

Después de simplificar, esto se reduce a $13x^2 + 26x - 23 = 0$. A partir de la fórmula cuadrática, encontramos las raíces

$$x = -1 \pm \frac{6\sqrt{13}}{13} \approx 0.664 \quad \text{o bien,} \quad -2.664$$

Por supuesto, sólo la raíz positiva $x = 0.664$ tiene sentido. Con este valor de x, tenemos

$$y = \frac{3x - 1}{2} = \frac{3(0.664) - 1}{2} = 0.496$$

Así que los niveles de producción óptimos son de 664 unidades por lo que respecta a A y de 496 unidades en el caso de B por semana. La utilidad máxima es

$$P = 4(0.664) + 6(0.496) = 5.63$$

esto es, \$5630 por semana. ☛ **20**

El método de multiplicadores de Lagrange también puede utilizarse cuando hay más de una restricción. Si $f(x, y, z)$ ha de maximizarse o minimizarse sujeta a las dos restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, entonces, construimos la función auxiliar F de la siguiente manera:

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

Luego, los puntos críticos se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$F_x = F_y = F_z = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0$$

Respuesta $x = y = 0.5$

EJERCICIOS 7-5

(1-10) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, determine los puntos críticos de f sujetos a las restricciones dadas.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x + 3y = 7$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy; \quad 2x + 3y = 31$

3. $f(x, y) = 3x + 2y; \quad x^2 + y^2 = 13$

4. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2; \quad xy = \sqrt{6}$

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad 2x + 3y + 4z = 29$

6. $f(x, y, z) = xyz; \quad xy + yz + 2zx = 24 \ (xyz \neq 0)$

7. $f(x, y, z, u) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4u^2;$
$2x - 3y + 4z + 6u = 73$

8. $f(u, v, w, x) = 3u^2 - v^2 + 2w^2 + x^2;$
$3u + v - 2w + 4x = 20$

9. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2; \quad x + 2y - 3z = 5,$
$2x - 3y + 6z = -1$

10. $f(u, v, w) = uv + vw + wu;$
$3u - v + 2w + 13 = 0, \ 2u + 3v - w = 0$

11. *(Costos de producción mínimos)* El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x, y) = x^2 + 1.5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

12. *(Costos de producción mínimos)* Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y y unidades en la segunda planta está dado por la función conjunta de costo $C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$. Si la empresa tiene una orden de suministrar 500 unidades, ¿cuántas unidades debe producir en cada planta con el objetivo de minimizar el costo total?

13. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 80L^{3/4}K^{1/4}$, en donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$60 y cada unidad de capital cuesta \$200 y la empresa dispone de \$40,000 destinados a producción.

a) Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear para obtener una producción máxima.

b) Demuestre que cuando la mano de obra y el capital están en sus niveles máximos, la razón de sus productividades marginales es igual a la razón de sus costos unitarios.

c) En este nivel máximo de producción, determine el incremento en la producción, si se dispone de \$1 adicionales destinados a producción. Pruebe que es aproximadamente igual al multiplicador de Lagrange.

14. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 13 en el caso de

$$P(L, K) = 800\sqrt{3L^2 + 1.5K^2}$$

Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$250 y \$50 y la empresa dispone de \$6750 para gastar en producción.

15. *(Uso óptimo de capital y de mano de obra)* Repita el ejercicio 13 si

$$P(L, K) = 113L + 15K + 3LK - L^2 - 2K^2$$

y los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$60 y \$100, respectivamente. La empresa dispone de un presupuesto restringido de \$7200 para producción.

16. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 13 en el caso de que

$$P(L, K) = 72L + 30K + 5LK - 2L^2 - 3K^2$$

Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$80 y \$150, respectivamente. El presupuesto está restringido a \$5640.

17. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde $P(L, K) = 60L^{2/3}K^{1/3}$. Los costos de la mano de obra y del capital son de \$64 y \$108 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2160 unidades de su producto.

a) Por medio del método de multiplicadores de Lagrange halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con el objetivo de minimizar el costo total.

b) Demuestre que en este nivel de producción, la razón de costos marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

18. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Repita el ejercicio 17, si

$$P(L, K) = 60\sqrt{5(L^2 + K^2)}$$

y los costos unitarios de mano de obra y capital son de \$200 y \$100, respectivamente. La empresa decide producir 4500 unidades.

19. *(Inversiones)* Una inversión de p dólares en las cuatro inversiones A, B, C y D da como resultado un rendimiento de $\sqrt{p}$, $\sqrt{1.2p}$, $\sqrt{1.3p}$ y $\sqrt{1.5p}$ dólares, respectivamente. Una persona desea invertir $12,000 en estas cuatro inversiones. ¿Cuánto deberá invertir en cada una de ellas para maximizar el rendimiento anual?

20. *(Publicidad óptima)* Si una empresa gasta x miles de dólares en publicidad en la ciudad A, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $300x/(x + 10)$. Si gasta x miles de dólares en la ciudad B, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $500x/(x + 13.5)$. Si la utilidad es del 25% de las ventas y la empresa dispone de una restricción del presupuesto de $16,500 destinados a publicidad en las dos ciudades, ¿cuánto deberá gastar en cada ciudad con el objetivo de maximizar la utilidad neta de la empresa?

21. *(Física)* Se tienen que construir tres esferas con materiales en densidades 1, 2 y 3 gramos por centímetro cúbico, de modo que su peso total sea 10 gramos. Encuentre los radios de las esferas para las cuales la suma de sus tres áreas superficiales sea mínima.

■ 7-6 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

A lo largo de este libro, hemos presentado fórmulas para conceptos tales como la relación de demanda de un producto particular, el costo de fabricar x cantidad de un artículo, el volumen de ventas como una función del gasto en publicidad, funciones de producción, etc. Al escribir un libro de texto, se está en la afortunada posición de inventar nuestros propios ejemplos de estas funciones. Sin embargo, en situaciones reales, una empresa no puede inventar su propia función de costo, por ejemplo, si en vez de ello debe determinar esta función a partir de observaciones de sus operaciones.

En estas situaciones prácticas, por lo regular no disponemos de una fórmula matemática que exprese la relación en cuestión; lo que tenemos son ciertos datos recabados de mediciones realizadas en el pasado. Algunas veces éstos aparecen en el curso de las operaciones normales de la empresa y en otras ocasiones surgen como resultado de experimentación deliberada. Por ejemplo, con el objetivo de probar la efectividad de la publicidad, una compañía podría realizar pruebas comparativas en varias ciudades, cambiando el gasto en publicidad de una ciudad a otra.

Los datos medidos pueden graficarse como una serie de puntos en una gráfica. Para obtener una aproximación a la gráfica completa de la relación, se bosqueja una curva suave que pase tan cerca como sea posible a estos datos puntuales. Por lo regular, la curva que dibujamos no pasará por cada uno de estos datos puntuales, porque de hacerlo así esto afectaría su suavidad. De hecho, a menudo aproximamos la relación dibujando la gráfica como una línea recta que pase tan cerca como sea posible de los puntos graficados. Consideremos el siguiente ejemplo.

Suponga que la administración de la Compañía Hulera del Pacífico afronta el problema de predecir sus ventas de neumáticos en los años venideros. Por experiencia saben que las ventas de neumáticos se incrementan de acuerdo con el número de automóviles en circulación. La empresa dispone de los datos de la tabla 1 recogidos en el pasado. Si graficamos el número de automóviles en el eje x y las ventas de neumáticos en el eje y, obtenemos el conjunto de puntos que se observa en la figura 16.

Mirando con atención estos puntos, es razonable concluir que la relación entre x y y es casi lineal y, basándonos en esto, podemos trazar la línea recta más cercana al conjunto de puntos. (Véase la figura 17). A pesar de que no todos los puntos

TABLA 1

Número de automóviles (en millones)	18	18.3	18.9	19.4	19.8	20.3
Venta de neumáticos (en miles)	40	44	52	59	67	77

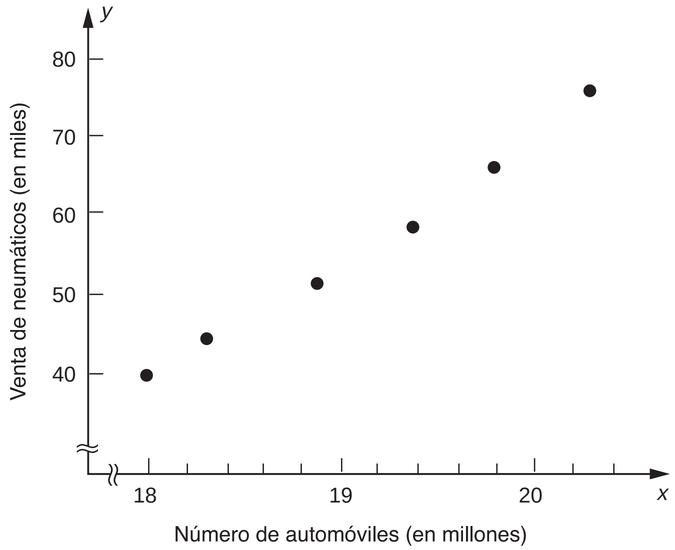


FIGURA 16

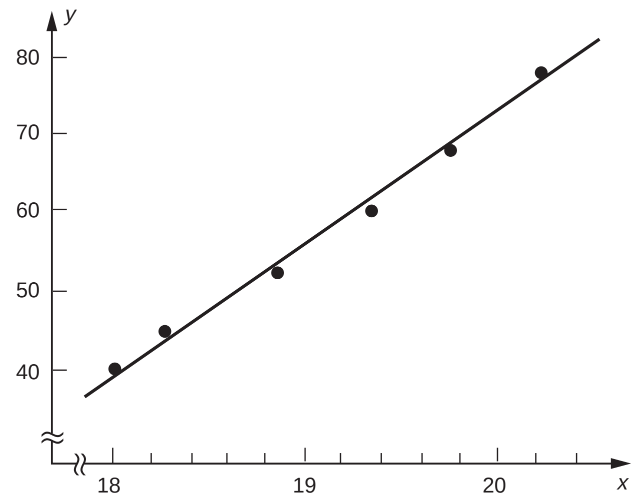


FIGURA 17

caigan sobre la línea recta, la línea aproxima los datos observados bastante bien. Esta línea puede utilizarse con el objetivo de predecir ventas futuras de neumáticos, si la administración de la empresa dispone de alguna estimación del número de automóviles que circularán en años futuros.

Dibujar una línea a ojo no es objetivo, en el sentido de que es posible trazar otra línea que parezca ajustarse al conjunto de puntos o que sea mucho mejor que la dibujada. Lo que se necesita es algún criterio objetivo para decidir sobre la línea recta particular que se ajuste mejor a los puntos observados. Tal criterio lo proporciona el **método de mínimos cuadrados**.

Supongamos que hay n datos observados que se grafican como una sucesión de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy. Buscaremos la línea recta que, en cierto sentido, está más cerca a estos puntos.

Sea la ecuación de la línea recta que mejor se ajusta a los n puntos dados

$$y = ax + b \tag{1}$$

con a y b constantes. Nuestro propósito es determinar a y b, los cuales ajustarán la línea recta. Cuando $x = x_i$, el valor observado de y es y_i; sin embargo, el valor ''correcto'' es $ax_i + b$, obtenido reemplazando $x = x_i$ en la ecuación (1).

El **error** en el valor y_i es igual a la diferencia $y_i - (ax_i + b)$ entre el valor observado y el valor teórico de y. (Véase la figura 18). El **error cuadrado** se define por $(y_i - ax_i - b)^2$. Entonces, el **error cuadrado medio**, E, se define como el promedio de todos los errores cuadrados. Esto es,

$$E = \frac{1}{n}[(y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2]$$

Así que al calcular E, determinamos el error cuadrado de cada punto individual, sumamos éstos para los n puntos y luego dividimos entre n.

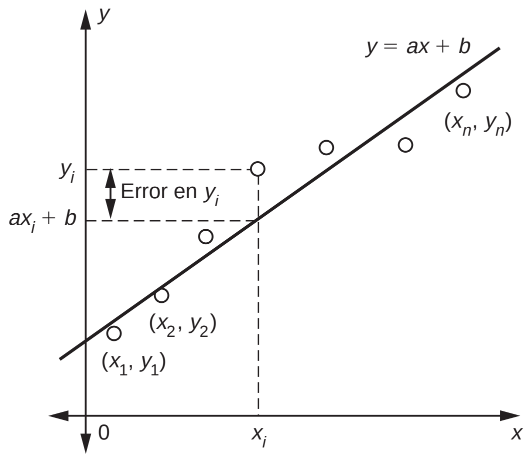


FIGURA 18

Por supuesto, no podemos calcular E todavía, dado que no conocemos los valores de las constantes a y b. De acuerdo con el método de mínimos cuadrados, lo que debemos hacer es elegir a y b de tal manera que se miniminice E. Condiciones necesarias para esto son que las dos derivadas parciales $\partial E/\partial a$ y $\partial E/\partial b$ sean cero.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{n}[(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2]\\ &= \frac{1}{n}[2(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + \cdots + 2(y_n - ax_n - b)(-x_n)]\\ &= \frac{2}{n}[(-x_1y_1 + ax_1^2 + bx_1) + \cdots + (-x_ny_n + ax_n^2 + bx_n)]\\ &= \frac{2}{n}[a(x_1^2 + ax_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\\ &\quad -(x_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + x_ny_n)]\end{aligned}$$

y asimismo

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{1}{n}[(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2]\\ &= \frac{1}{n}[2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + \cdots + 2(y_n - ax_n - b)(-1)]\\ &= \frac{2}{n}[a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)]\end{aligned}$$

Por consiguiente, igualando estas dos derivadas a cero, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}&a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\\ &\qquad\qquad = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)\\ &a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\end{aligned}}$$

Estas ecuaciones forman un par de ecuaciones lineales simultáneas con incógnitas a y b y pueden resolverse en la forma ordinaria. Una vez que se han calculado a y b, la mejor línea recta a través de los datos puntuales dados tiene la ecuación $y = ax + b$.

Determinemos la ecuación de la mejor línea recta a través de los datos puntuales de la Compañía Hulera del Pacífico. Si x denota el número de automóviles (en millones) en circulación y y el número de ventas de neumáticos (en miles) de la compañía, entonces, tenemos los datos dados en la tabla 2.

Cuando usamos el método de mínimos cuadrados, conviene elaborar una tabla como la que se ilustra en la tabla 3. En las cuatro columnas de la tabla, se listan los valores de x_i, y_i, x_i^2 y x_iy_i para cada punto. Luego, se suman las columnas. En este caso, tenemos

☛ **21.** Determine la ecuación para a y b para los siguientes tres pares de datos y de aquí determine la recta que mejor ajuste estos datos.

x	1	2	3
y	5	4	2

TABLA 2

x	18.0	18.3	18.9	19.4	19.8	20.3
y	40	44	52	59	67	77

TABLA 3

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
18.0	40	324.00	720.0
18.3	44	334.89	805.2
18.9	52	357.21	982.8
19.4	59	376.36	1144.6
19.8	67	392.04	1326.6
20.3	77	412.09	1563.1
114.7	339	2196.59	6542.3

en este caso,

$$x_1 + x_2 + \cdots = 114.7$$
$$y_1 + y_2 + \cdots = 339$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots = 2196.59$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots = 6542.3.$$

Además, tenemos 6 datos puntuales y así $n = 6$. Las constantes a y b están dadas por

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots) + b(x_1 + x_2 + \cdots) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$$
$$a(x_1 + x_2 + \cdots) + nb = y_1 + y_2 + \cdots$$

Esto es,

$$2196.59a + 114.7b = 6542.3$$
$$114.7a + 6b = 339$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos

$$a = 15.8 \qquad \text{y} \qquad b = -246$$

Así que la mejor línea recta a través de los datos puntuales dados tiene la siguiente ecuación:

$$y = 15.8x - 246$$ ☛ **21**

Como un ejemplo de la manera en que este resultado puede utilizarse, supongamos que el gobierno predice que el número de automóviles en circulación el año próximo será de 22.3 millones. Entonces la Compañía Hulera del Pacífico puede estimar que sus ventas de neumáticos serán (en miles)

Respuesta $14a + 6b = 19$, $6a + 3b = 11$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}$

☛ **22.** Si estudió la sección 7.5, reescriba las ecuaciones para a y b utilizando la notación sigma.

$$(15.8)(22.3) - 246 = 106$$

Sin mucha dificultad puede demostrarse que $\partial^2E/\partial a^2 > 0$, $\partial^2E/\partial b^2 > 0$, y (con ligeramente más dificultad) que

$$\Delta = \frac{\partial^2E}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2E}{\partial a\ \partial b}\right)^2 > 0$$

de modo que los valores de a y b encontrados haciendo $\partial E/\partial a = \partial E/\partial b = 0$ en realidad corresponden a un mínimo de E.

Vale la pena mencionar que el método de mínimos cuadrados no se limita a ajustar mejores líneas rectas, sino que puede extenderse a muchos tipos de curvas. Por ejemplo, se utiliza a menudo en el ajuste de una función polinomial a un conjunto de datos puntuales. (Como ilustración véase el ejercicio 33 de los problemas de repaso). ☛ **22**

Respuesta

$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$

$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$

EJERCICIOS 7-6

(1-4) Mediante el método de mínimos cuadrados determine la mejor línea recta a través de los siguientes conjuntos de datos.

1.

x	2	3	5	6	9	12
y	3	4	6	5	7	8

2.

x	3	4	5	6	7	8
y	0.7	1.9	2.1	2.5	3.4	4.5

3.

x	0	1	2	3
y	1	1.5	2.5	3

4.

x	2	3	4	5	6
y	2	4	3.5	5	6.5

5. (*Crecimiento de ventas*) Una tienda por departamentos advierte que la tendencia de las ventas de una nueva rasuradora eléctrica es como se da en la tabla 4. Halle la ecuación de la línea recta que mejor se ajuste a los datos.

TABLA 4

Semana número (x)	1	2	3	4	5	6
Unidades vendidas (y)	20	24	28	33	35	39

6. (*Utilidades y publicidad*) Una empresa descubre que sus utilidades netas se incrementan al aumentar la cantidad gastada en la publicidad del producto. La empresa dispone de los registros dados en la tabla 5.

TABLA 5

Gasto en publicidad (x) (miles de dólares)	10	11	12.3	13.5	15
Utilidades netas (y) (miles de dólares)	50	63	68	73	75

a) Determine la ecuación de la línea recta que mejor se ajuste a los datos.

b) Estime el dinero que debería gastarse en publicidad para obtener una utilidad neta de $80,000.

7. (*Curva de demanda*) Una empresa trata de determinar la curva de demanda de su producto. Vende el producto en varias ciudades a diferentes precios y determina el volumen de ventas. Después de un mes, se obtienen los datos mostrados en la tabla 6.

a) Determine la línea que mejor ajusta los datos.

TABLA 6

Precio (p) (dólares)	2	2.25	2.50	2.75	2.90
Volumen de ventas (x)	300	290	270	230	200

b) Mediante la curva de demanda de la parte *a*) determine el volumen de ventas si el precio es de $3.

c) Utilizando el resultado de la parte *a*) determine el precio que maximiza el ingreso mensual.

8. *(Utilidad y nivel de producción)* El nivel de producción y las utilidades de cierta empresa en años recientes aparecen en la tabla 7.

TABLA 7

Producción (x) (miles de unidades)	40	47	55	70	90	100
Utilidades (y) (miles de dólares)	32	34	43	54	72	85

a) Determine la ecuación de la recta que mejor ajusta los datos.

b) Estime las utilidades cuando el nivel de producción se incremento a 120 mil unidades.

9. *(Ventas y comerciales por TV)* Una empresa de mercadotecnia desea determinar el efecto de los comerciales por televisión en las ventas de cierto producto. La empresa se retroalimenta de 6 grandes ciudades como se aprecia en la tabla 8. Halle la ecuación de la recta que mejor ajusta los datos. Estime el volumen de ventas que resultaría de 24 comerciales.

10. *(Volumen de ventas y comisiones)* Las comisiones de ventas pagadas y el volumen de ventas en 7 surcursales de una gran cadena de tiendas en años recientes fueron como se aprecia en la tabla 9. Determine la ecuación de la recta que mejor se ajuste a los datos.

11. *(Crecimiento del PNB)* Promedios sobre cuatrienios del producto nacional bruto (PNB) de cierto país, se dan en miles de millones de dólares en la tabla 10. Determine la ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos. Estime el PNB para 1980.

TABLA 10

Año (x)	1956	1960	1964	1968	1972	1976
PNB (y)	453	562	691	862	1054	1310

12. *(Agricultura)* La producción promedio y en bushels de maíz por acre en Estados Unidos varía de un año a otro. En la tabla 11 se dan los valores correspondientes al periodo 1960-1971, en los cuales t denota la fecha empezando con $t = 0$ en 1960 e incrementándose hasta $t = 11$ en 1971. De-

TABLA 8

Ciudad	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
Número de comerciales (x)	10	12	15	20	18	21
Ventas (y) (cientos)	40	45	56	68	67	70

TABLA 9

Tienda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Comisiones (x) (miles de dólares)	37.2	45.3	80.5	56.4	67.2	74.6	62.7
Ventas (y) (cientos de miles de dólares)	4.3	5.1	7.9	5.4	7.1	7.2	6.5

TABLA 11

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	54	63	65	67	70	73	72	80	79	87	83	88

muestre que durante este periodo, una ecuación lineal de la forma $y = at + b$ ajusta estos datos bastante bien y determine los valores de a y b.

13. *(Epidemia)* Durante el periodo de propagación de cierto brote de cólera, el número de casos nuevos (y) en días sucesivos se dan en la siguiente tabla (x denota el día en cuestión). Encuentre la mejor línea recta que pasa por estos puntos y úsela para predecir cuantos casos nuevos brotarán en los días 6 y 7. (Este método de predicción se llama *extrapolación lineal*).

TABLA 12

x	1	2	3	4	5
y	6	7	10	12	15

14. *(Entomología)* Cierta especie de insectos está extendiendo su hábitat gradualmente en la dirección norte. La siguiente tabla da la latitud y más al norte en la cual se ha encontrado al insecto durante el año x.

TABLA 13

x	1955	1960	1965	1970	1975
y	30°N	35°N	38°N	42°N	45°N

Encuentre la mejor línea recta que pasa por estos puntos y úsela para predecir cuándo el insecto llegará a la latitud 49°N.

15. *(Química-física)* La cantidad máxima y de cierta sustancia que se disolverá en 1 litro de agua depende de la temperatura T. Se obtienen los siguientes resultados experimentales. Determine la recta que ajuste mejor a estos datos.

TABLA 14

T (°C):	10	20	30	40	50	60
y (gramos)	120	132	142	155	169	179

REPASO DEL CAPÍTULO 7

Términos, símbolos y conceptos importantes

7.1 Funciones de dos (o más) variables, dominio, rango.
Coordenadas en tres dimensiones; ejes x, y y z
Gráfica de una función $z = f(x, y)$
Línea de contorno (curva de nivel). Sección vertical.

7.2 Derivadas parciales; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Derivadas parciales de segundo orden;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Notación: z_{xx}, z_{yy}, z_{xy} o

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y), \quad f_{xy}(x, y)$$

7.3 Función de producción, factores de insumo de producción.
Productividad marginal de capital y de mano de obra.
Productos competitivos y complementarios.
Elasticidad cruzada de la demanda.

7.4 Máximo local y mínimo local para un función de dos variables.
Punto silla. Prueba de la Δ

7.5 Restricción. Multiplicadores de Lagrange.
Productividad marginal del capital.

7.6 Método de mínimos cuadrados. Error cuadrático medio.

Fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad [= f_x(x, y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad [= f_y(x, y)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y$$

Punto crítico cuando f es diferenciable:

$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$

Prueba de la Δ: $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$

Si $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$ y $\Delta > 0$, el punto crítico es un máximo local
Si $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ y $\Delta > 0$, el punto crítico es un mínimo local
Si $\Delta < 0$, el punto crítico es un punto silla

Método de mínimos cuadrados: $y = ax + b$

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$$

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nb = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) En tres dimensiones, la coordenada y es cero en el eje y.

b) En tres dimensiones, $x = 0$ y $y = 0$ en el plano xy.

c) El rango de una función $z = f(x, y)$ son lo valores de z para los cuales f es un número real.

d) El dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ es el conjunto de todos los números reales.

e) Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$ son elipses.

f) Si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$

g) Si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial^2 y} = 0$

h) Si $z = g(x, y)$ y $\partial z/\partial y = 0$, entonces, z es independiente de y y se puede escribir $z = h(x)$, una función que sólo depende de x.

i) Si todas las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen, entonces,
$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2}$$

j) Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) y tiene un mínimo local en este punto, entonces, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

k) Si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$ y f_{xx}, f_{yy} son positivas en (a, b), entonces, en (a, b) se alcanza un mínimo local de $f(x, y)$.

l) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + \ln(y)) = 3x^2y^2$

m) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(10xy^2 + \ln(y)) = 0$

n) La recta obtenida por el método de mínimos cuadrados debe pasar por, al menos, dos de estos puntos.

o) Si se tienen dos puntos de datos, entonces, la recta obtenida por el método de mínimos cuadrados pasa por ambos puntos.

p) Un punto silla de $f(x, y)$, es un punto crítico tal que $\Delta(x, y) < 0$

q) Los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, sujeta a los puntos en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ pueden obtenerse encontrando los puntos críticos de la función
$$F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

(2-5) Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones.

2. $z = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 2}$

***3.** $z = \dfrac{\sqrt{x^2 - y}}{(x - 2)^2 + y^2}$

4. $z = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{y - x}}$

5. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

(6-9) Evalúe $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ y $\partial^2 z/\partial x^2$ para las siguientes funciones.

6. $z = x^2 - y^2$

7. $z = e^{-xy}$

8. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

9. $\ln(x^2 + y^4)$

10. Demuestre que si $v = f(x - y, y - z, z - x)$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

11. *(Costo de una lata)* En el problema 27 de la sección 7.1, se determinó que el costo de una lata cilíndrica de radio r y altura h tiene un costo $C(r, h) = 4\pi r(r + h)$, si el material con que se produce tiene un costo de \$2 por unidad de área. ¿Qué interpretación tiene la curva de nivel $C(r, h) = 100$, para r y h positivos?

12. *(Demandas marginales)* Suponga que las funciones de demanda para los dos productos A y B son

$$x_A = 30 - pA + 5p_B;\ x_B = 40 + 3p_A - 6p_B$$

Determine las cuatro funciones de demanda marginal e investigue si los productos A y B son competitivos o complementarios.

13. *(Elasticidad)* La demanda x_a de un producto A está dada por

$$x_A = 50\sqrt{p_A p_B}$$

en donde p_A es el precio por unidad de A y p_B es el precio por unidad del producto relacionado B.

a) Demuestre que $p_A \dfrac{\partial x_A}{\partial p_A} + p_B \dfrac{\partial x_A}{\partial p_B} = x_A$

b) Calcule las elasticidades de la demanda η_{pA} y η_{pB} y evalúe su suma.

14. *(Utilidades marginales)* La utilidad por acre de cierto cultivo de hortaliza se determina que está dada por

$$P = 30L + 6S + 25F - 2L^2 - 2S^2 - F^2 - 3SF$$

en donde L es el costo de la mano de obra, S es el costo de la siembra y F es el costo de fertilizantes. Determine $\partial P/\partial L$, $\partial P/\partial S$ y $\partial P/\partial F$. Evalúe cada una cuando $L = 5$, $S = 1$ y $F = 1$.

15. *(Costos marginales)* Un monopolista determina que las funciones de demanda de sus dos productos A y B dadas por

$$x_A = 3 - p_A + 0.2p_B,\ \ x_B = 5 + 0.3p_A - 2p_B$$

La función conjunta de costo está dada por

$$C = x^2{}_A + x^2{}_B - x_A x_B$$

Calcule $\partial C/\partial p_A$ y $\partial C/\partial p_B$. ¿Cuál es el significado de estas derivadas?

(16-20) Determine los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones.

16. $f(x, y) = 10 + 3xy + 6y - 2x^2 - 4y^2$

17. $g(u, v) = u^2 -^2 u + \dfrac{v^2}{4} + 10$

18. $h(s, t) = st + \dfrac{2}{s} + \dfrac{4}{t} - 20$

19. $F(u, v) = 2u^4 - u^2 + 3v^2 + 11$

20. $G(s, t) = \dfrac{t}{s} - 2s^2 + \dfrac{8}{3}t^3$

21. *(Fisiología)* Cuando hay viento, en un día frío, una persona puede sentir más frío que cuando el viento está en calma; esto se debe a que la razón de la pérdida del calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

modela la razón de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados centígrados) y la velocidad del viento es w (en metros por segundo).

a) Evaluar H cuando $t = 0$ y $w = 5$

b) Calcular $\partial H/\partial w$ y $\partial H/\partial t$ para $t = 0$ y $w = 5$

c) Interprete el resultado de la parte anterior

d) Cuando $t = 0$ y $w = 5$, ¿qué tiene más influencia en H: un cambio de 1 m/s en la velocidad del viento o 1°C en la temperatura?

22. *(Uso óptimo de mano de obra y publicidad)* Las utilidades anuales (en dólares) de una empresa prestadora de servicios están dadas por

$$P(x, y) = 200x + 300y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 5000$$

donde x es el número de trabajadores y y el número de veces que la empresa se promociona.

a) Determine los valores de x y y que maximizan las utilidades anuales de la empresa. ¿Cuáles son las utilidades anuales máximas?

b) Los trabajadores reciben un salario de \$15,000 anuales y el costo de publicidad es de \$1,000 por cada anuncio. El capital que se trabaja es tal que un gasto de \$400,000 se realiza en mano de obra y publicidad. Determine los valores de x y y que generan la utilidad máxima.

*23. *(Uso óptimo de mano de obra y capital)* Por medio de L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar $P(L, K)$ unidades de su producto. Los costos unitarios de mano de obra y de capital son p y q dólares, respectivamente. La empresa tiene una restricción en el presupuesto de C dólares.

a) Usando el método de multiplicadores de Lagrange, demuestre que en el nivel de producción máximo, la razón de las productividades marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

b) Compruebe que la empresa puede elaborar λ unidades extra de su producto, si se dispone de \$1 extra en este nivel de producción máximo, en donde λ es el multiplicador de Lagrange.

*24. *(Uso óptimo de mano de obra y capital)* Cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital,

la producción de una empresa está dada por $P(L, K)$. El costo unitario de la mano de obra y del capital son de a y b dólares, respectivamente. Suponga que la empresa decide elaborar P_0 unidades de su producto, la combinación de mano de obra y capital abate el costo de estas unidades a un mínimo. Pruebe que la razón de las productividades marginales de mano de obra y capital es igual a la razón de sus costos unitarios.

25. *(Uso óptimo de materias primas)* Una empresa emplea dos tipos de materias primas, A y B, en la elaboración de su producto. Usando x unidades de A y y unidades de B, la empresa puede elaborar T unidades de su producto, en donde

$$T(x, y) = 80x + 300y + 2xy - 3x^2 - 4y^2$$

a) ¿Cuántas unidades de cada materia prima deberá utilizar la empresa para maximizar su producción? ¿Cuál es la producción máxima?

b) Si a la empresa le cuesta \$9 cada unidad de materia prima A y \$12 cada unidad de materia prima B y la empresa puede vender todo lo que produce en \$15 por unidad, ¿qué cantidades de A y B maximizarían las utilidades de la empresa?

26. *(Uso óptimo de capital y mano de obra)* Si se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde

$$P(L, K) = 60L^{2/3}K^{1/3}$$

Los costos de la mano de obra y del capital son de \$50 y \$90 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2000 unidades de su producto. Por medio del método de multiplicadores de Lagrange determine el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con el objetivo de minimizar el costo total.

27. *(Producción máxima)* Si se utilizan L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por $P(L, K) = 18K + 24L + 2KL - 4K^2 - L^2$.

Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

28. *(Medicina)* En el tratamiento de cierta enfermedad se utilizan de forma simultánea dos medicamentos. La reacción R medida en las unidades adecuadas para x unidades del primer medicamento y y unidades del segundo es

$$R(x, y) = 30 + 2x + 6y - x^2 - 2y^2$$

Determine los valores de x y y que hacen máxima la reacción, R.

***29.** *(Difusión)* El modelo de ecuación del ejercicio 48 de la sección 7-2 para la difusión de una sustancia a través del torrente sanguíneo no toma en cuenta el arrastre debido al movimiento de la sangre. Una ecuación más adecuada para ello es

$$C(x, t) = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-(x - vt)2/at}$$

donde v es la velocidad de la sangre. Muestre que para esta ecuación se cumple

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{a}{4} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x}$$

(*Nota:* Este ejercicio tiene una mayor grado de dificultad que los anteriores).

30. *(Zoología)* En un experimento se midió la longitud L de cierto tipo de insecto, para varios insectos de diferentes edades. Los resultados se dan en la tabla 15, L está en centímetros y la edad E en días. Muestre que los datos coinciden aproximadamente con la relación lineal $L = mE + b$, y determine las constantes m y b.

TABLA 15

E	20	25	30	33	38	40	42	46	53	58	60
L	0.90	1.00	1.20	1.16	1.25	1.32	1.36	1.38	1.54	1.67	1.72

31. *(Población)* De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, el total de miles de millones de dólares que importó Estados Unidos de México para cada año de 1996 a 2002 se proporciona en la tabla 16. Determine la recta que mejor ajuste los datos dados. Utilícela para estimar el monto de las importaciones para el año 2003. Compare su resultado con el valor proporcionado por la misma fuente. Haga $x = 0$ para 1996, $x = 1$ para 1997, etcétera.

TABLA 16

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Monto imp. (y)	74.3	85.9	94.6	109.7	135.9	131.3	134.6

32. *(Mano de obra)* En la tabla 17 se muestra como el porcentaje de mujeres en la mano de obra, en Estados Unidos, ha cambiado desde 1955 a 1995. Determine la recta de mínimos cuadrados y utilice ésta para estimar el porcentaje en 1996; compare su resultado con el valor real que fue de 50.3%. Haga $x = 0$ para 1955, $x = 5$ para 1960, etcétera.

TABLA 17

Año	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Porcentaje (%)	35.70	37.70	39.30	43.30	46.30	51.50	54.50	57.50	58.90

33. *(Mínimos cuadrados para funciones cuadráticas)* A un conjunto de datos experimentales $\{(x_i, y_i)\}$ se requiere ajustar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Definimos el error cuadrático medio como

$$E = \frac{1}{n}[(y_1 - ax^2_1 - bx_1 - c)^2$$
$$+(y_1 - ax^2_1 - bx_1 - c)^2 + \dots$$
$$+(y_n - ax^2_n - bx_n - c)2]$$

Plantee tres ecuaciones igualando a cero las derivadas parciales $\partial E/\partial a$, $\partial E/\partial b$ y $\partial E/\partial c$. Con base en estas ecuaciones, determine los valores de a, b y c en el caso de los datos dados en la tabla 18.

TABLA 17

x	0	1	2	3	4
y	9.9	8.2	6.1	3.7	2.4

CASO DE ESTUDIO

DECISIÓN SOBRE PRODUCCIÓN

Al inicio del capítulo se presentó el problema de decidir sobre el nivel de producción de dos tipos de jabones. Recuerde que:

El ingreso que se obtiene por la producción y venta de x_1 cientos de cajas de jabón de tocador está dado por

$$I_1 = x_1 p_1 = x_1(80 - 3x_1)$$

mientras que el ingreso por la producción y venta de x_2 cientos de cajas de jabón para cuerpo se obtiene mediante

$$I_2 = x_2 p_2 = x_2(90 - 5x_2)$$

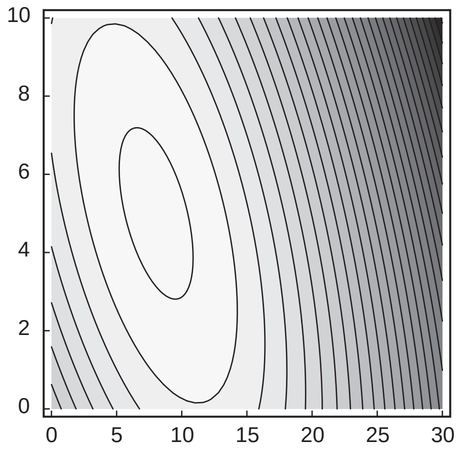
Por tanto, el ingreso total será

$$I_T = x_1(80 - 3x_1) + x_2(90 - 5x_2)$$

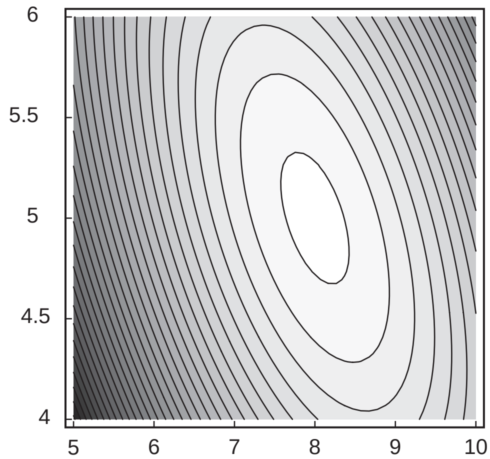
Así que la ganancia que se obtiene por la producción y venta de ambos artículos es

$$P(x_1, x_2) = I_T - C(x_1, x_2) = x_1(80 - 3x_1) + x_2(90 - 5x_2) - (12x_1 + 8x_2 + 4x_1x_2)$$

La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de la función de ganancia, las regiones más claras son de valores mayores de la función y las regiones con sombreado más obscuro tienen valores menores de la función.



La gráfica anterior muestra que aparentemente existe un valor máximo en el rectángulo $[5, 10] \times [4, 6]$. La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel en este rectángulo.



De acuerdo con las gráficas anteriores, parece que existe un valor máximo para calcular de manera analítica el punto óptimo, como se aprendió en este capítulo, primero se procede a obtener los puntos críticos de la función mediante el cálculo de las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 68 - 6x_1 - 4x_2$$

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 82 - 4x_1 - 10x_2$$

Por el teorema 1, de este capítulo, si $P(x_1, x_2)$ tiene un máximo (o mínimo) local en el punto (x_1, x_2) es necesario que

$$\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \text{ y } \frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

Al resolver el sistema

$$6x_1 + 4x_2 = 68$$

$$4x_1 + 10x_2 = 82$$

se obtiene

$$x_1 = 8 \text{ y } x_2 = 5$$

Aplicando el teorema 2, para determinar si se trata de un máximo local se calcula

$$\frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -10$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 P(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = -4$$

Puesto que,

$$\frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1^2} = -6 < 0$$

y

$$\Delta(8, 5) = \frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 P(8, 5)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2$$

$$\Delta(8, 5) = (-6)(-10) - (-4)^2 = 60 - 16 > 0$$

entonces, la función tiene un máximo local en (8, 5). Con lo cual el problema de Alejandro se resuelve produciendo 800 cajas de jabón de tocador y 500 cajas de jabón para baño, con lo cual tendrá una utilidad máxima de $477,000.

Ahora bien, como se comentó en capítulos anteriores, la solución del problema es importante pero tanto o más es analizar la sensibilidad de los resultados y el efecto que tienen en ella cambios en las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, que sucede si los precios satisfacen

$$p_1 = 85 - 4x_1 \text{ y } p_2 = 120 - 6x_2$$

en vez de las relaciones dadas al inicio. Trate de resolver el nuevo problema.

O bien, si las relaciones de demanda son

$$x_1 = 100 - 4p^2{}_1 + 5p_2 \text{ y } x_2 = 150 - 6p_2 + 3p_1$$

Ahora resuelva el problema con estas condiciones.

O, finalmente, qué sucede si debido a restricciones de la producción sólo se pueden producir un máximo de 1100 cajas de jabón, entre los dos tipos de ellos. Con las condiciones iniciales del problema, resuelva el problema considerando esta restricción.

APÉNDICE I

Tabla de derivadas estándar

I. Fórmulas básicas

1. La derivada de una constante es cero.

2. Para cualquier contante c, $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ —Fórmula del producto

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ —Fórmula del cociente

5. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ —Regla de la cadena

o bien

$$\frac{d}{dx}(f[g(x)]) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$ —Regla de la cadena

6. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

II. Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

APÉNDICE II

Tabla de integrales

Observación En toda integral, se omite la constante de integración y el lector deberá agregarla.

Algunas fórmulas fundamentales

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

2. $\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

3. $\int f[g(x)]g'(x)\, dx = \int f(u)\, du \qquad \text{donde} \qquad u = g(x)$

4. $\int f(x)g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx \int f'(x)\left[\int g(x)\, dx\right] dx$

Integrandos racionales que incluyen $(ax + b)$

5. $\int (ax + b)^n\, dx = \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} \quad (n \neq -1)$

6. $\int (ax + b)^{-1}\, dx = \dfrac{1}{a} \ln|ax + b|$

7. $\int x(ax + b)^n\, dx = \dfrac{1}{a^2}(ax + b)^{n+1}\left[\dfrac{ax + b}{n + 2} - \dfrac{b}{n + 1}\right] \qquad (n \neq -1, -2)$

8. $\int x(ax + b)^{-1}\, dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2} \ln|ax + b|$

9. $\int x(ax + b)^{-2}\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax + b| + \dfrac{b}{ax + b}\right]$

10. $\int \dfrac{x^2}{ax + b}\, dx = \dfrac{1}{a^3}\left[\dfrac{1}{2}(ax + b)^2 - 2b(ax + b) + b^2 \ln|ax + b|\right]$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\left[ax+b-\frac{b^2}{ax+b}-2b\ln|ax+b|\right]$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| \qquad (b \neq 0)$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad (b \neq 0)$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| \qquad (b \neq 0)$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right| \qquad (bc-ad \neq 0)$

16. $\displaystyle\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a}\ln|ax+b|-\frac{d}{c}\ln|cx+d|\right]$

$(bc-ad \neq 0)$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}\,dx = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{1}{ax+b}+\frac{c}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right]$

$(bc-ad \neq 0)$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}\,dx = -\frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a(ax+b)}+\frac{d}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right]$

$(bc-ad \neq 0)$

Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$

19. $\displaystyle\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{(ax+b)^{5/2}}{5}-\frac{b(ax+b)^{3/2}}{3}\right]$

20. $\displaystyle\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^{7/2}}{7}-\frac{2b(ax+b)^{5/2}}{5}+\frac{b^2(ax+b)^{3/2}}{3}\right]$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2ax-4b}{3a^2}\sqrt{ax+b}$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| \qquad (b > 0)$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^n\sqrt{ax+b}}\,dx = -\frac{1}{b(n-1)}\,\frac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{1}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}\,dx$

$(n \neq 1)$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx$ (véase 22)

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx$ (véase 22)

Integrales que contienen $a^2 \pm x^2$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^2}\,dx = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$

28. $\displaystyle\int \frac{x}{a^2 \pm x^2}\,dx = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right|$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a^2 \pm x^2)}\,dx = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2 \pm x^2}\right|$

Integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$

30. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2 - x^2}$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2x}$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

34. $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{a^4}\left[-\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$

37. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

39. $\displaystyle\int x(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = -\tfrac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2}$

40. $\displaystyle\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2 - x^2} - a^3\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

41. $\displaystyle\int x^n(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$(n \neq -1)$

42. $\displaystyle\int x^n\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{n+2}x^{n-1}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$(n \neq -2)$

Integrales que contienen $\sqrt{x^2 \pm a^2}$

43. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

44. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

45. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right|$

47. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2x}$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\,dx = \pm\frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

49. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

50. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^{3/2}}\,dx = \pm\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx\right]$ (véase 46)

52. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{a^4}\left[\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right]$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\,dx = \frac{1}{a^4}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}\right]$

54. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\,dx = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}$

55. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 \pm a^2)^{5/2}}\,dx = \pm\frac{1}{3a^2}\,\frac{x^3}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}$

56. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \tfrac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

57. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$

58. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{1}{8}a^2x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{1}{8}a^4 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right|$

60. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

61. $\displaystyle\int (x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{4}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{3}{8}a^2x\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3}{8}a^4 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

62. $\int x(x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{5}(x^2 \pm a^2)^{5/2}$

63. $\int \frac{(x^2 \pm a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm a^2 \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}\,dx$

64. $\int x^n(x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}(x^2 \pm a^2)^{3/2} - \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ $(n \neq -1)$

65. $\int x^n\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{n+2}\,x^{n-1}((x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ $(n \neq -2)$

Integrales que contienen $ax^2 + bx + c$

66. $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\ln\left|\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|(b^2 - 4ac > 0)$

Integrales que contienen exponenciales y logaritmos

67. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

68. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x$

69. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax}$

70. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

71. $\int \frac{1}{b + ce^{ax}}\,dx = \frac{1}{ab}[ax - \ln(b + ce^{ax})]$ $(ab \neq 0)$

72. $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x$

73. $\int x\ln|x|\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{1}{4}x^2$

74. $\int x^n\ln|x|\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\left[\ln|x| - \frac{1}{n+1}\right]$ $(n \neq -1)$

75. $\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx = \ln|\ln|x||$

76. $\int \ln^n|x|\,dx = x\ln^n|x| - x\int \ln^{n-1}|x|\,dx$

77. $\int x^m\ln^n|x|\,dx = \frac{1}{m+1}\left\{x^{m+1}\ln^n|x| - n\int x^m\ln^{n-1}|x|\,dx\right\}$ $(m \neq -1)$

78. $\int \frac{\ln^n|x|}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1}|x|$

Integrales diversas

79. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax^n + b)}\, dx = \frac{1}{nb} \ln \left| \frac{x^n}{ax^n + b} \right| \qquad (n \neq 0,\ b \neq 0)$

80. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax^n + b}}\, dx = \frac{1}{n\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax^n + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax^n + b} + \sqrt{b}} \right| \qquad (b > 0)$

81. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x + a}{x + b}}\, dx = \sqrt{x + b}\,\sqrt{x + a} + (a - b) \ln \left| \sqrt{x + b} + \sqrt{x + a} \right|$

APÉNDICE III

Tablas numéricas

TABLA A.3.1 Logaritmos comunes con cuatro cifras

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.3198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

TABLA A.3.1 Logaritmos comunes con cuatro cifras (*continuación*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7991	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8575	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA A.3.2 Logaritmos naturales

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0583	0.0677	0.0770	0.0862
1.1	0.0953	0.1044	0.1133	0.1222	0.1310	0.1398	0.1484	0.1570	0.1655	0.1740
1.2	0.1823	0.1906	0.1989	0.2070	0.2151	0.2231	0.2311	0.2390	0.2469	0.2546
1.3	0.2624	0.2700	0.2776	0.2852	0.2927	0.3001	0.3075	0.3148	0.3221	0.3293
1.4	0.3365	0.3436	0.3507	0.3577	0.3646	0.3716	0.3784	0.3853	0.3920	0.3988
1.5	0.4055	0.4121	0.4187	0.4253	0.4318	0.4383	0.4447	0.4511	0.4574	0.4637
1.6	0.4700	0.4762	0.4824	0.4886	0.4947	0.5008	0.5068	0.5128	0.5188	0.5247
1.7	0.5306	0.5365	0.5423	0.5481	0.5539	0.5596	0.5653	0.5710	0.5766	0.5822
1.8	0.5878	0.5933	0.5988	0.6043	0.6098	0.6152	0.6206	0.6259	0.6313	0.6366
1.9	0.6419	0.6471	0.6523	0.6575	0.6627	0.6678	0.6729	0.6780	0.6831	0.6881
2.0	0.6931	0.6981	0.7031	0.7080	0.7130	0.7178	0.7227	0.7275	0.7324	0.7372
2.1	0.7419	0.7467	0.7514	0.7561	0.7608	0.7655	0.7701	0.7747	0.7793	0.7839
2.2	0.7885	0.7930	0.7975.	0.8020	0.8065	0.8109	0.8154	0.8198	0.8242	0.8286
2.3	0.8329	0.8372	0.8416	0.8459	0.8502	0.8544	0.8587	0.8629	0.8671	0.8713
2.4	0.8755	0.8796	0.8838	0.8879	0.8920	0.8961	0.9002	0.9042	0.9083	0.9123
2.5	0.9163	0.9203	0.9243	0.9282	0.9322	0.9361	0.9400	0.9439	0.9478	0.9517
2.6	0.9555	0.9594	0.9632	0.9670	0.9708	0.9746	0.9783	0.9821	0.9858	0.9895
2.7	0.9933	0.9969	1.0006	1.0043	1.0080	1.0116	1.0152	1.0188	1.0225	1.0260
2.8	1.0296	1.0332	1.0367	1.0403	1.0438	1.0473	1.0508	1.0543	1.0578	1.0613
2.9	1.0647	1.0682	1.0716	1.0750	1.0784	1.0818	1.0852	1.0886	1.0919	1.0953
3.0	1.0986	1.1019	1.1053	1.1086	1.1119	1.1151	1.1184	1.1217	1.1249	1.1282
3.1	1.1314	1.1346	1.1378	1.1410	1.1442	1.1474	1.1506	1.1537	1.1569	1.1600
3.2	1.1632	1.1663	1.1694	1.1725	1.1756	1.1787	1.1817	1.1848	1.1878	1.1909
3.3	1.1939	1.1970	1.2000	1.2030	1.2060	1.2090	1.2119	1.2149	1.2179	1.2208
3.4	1.2238	1.2267	1.2296	1.2326	1.2355	1.2384	1.2413	1.2442	1.2470	1.2499
3.5	1.2528	1.2556	1.2585	1.2613	1.2641	1.2669	1.2698	1.2726	1.2754	1.2782
3.6	1.2809	1.2837	1.2865	1.2892	1.2920	1.2947	1.2975	1.3002	1.3029	1.3056
3.7	1.3083	1.3110	1.3137	1.3164	1.3191	1.3218	1.3244	1.3271	1.3297	1.3324
3.8	1.3350	1.3376	1.3403	1.3429	1.3455	1.3481	1.3507	1.3533	1.3558	1.3584
3.9	1.3610	1.3635	1.366l	1.3686	1.3712	1.3737	1.3762	1.3788	1.3813	1.3838
4.0	1.3863	1.3888	1.3913	1.3938	1.3962	1.3987	1.4012	1.4036	1.4061	1.4085
4.1	1.4110	1.4134	1.4159	1.4183	1.4207	1.4231	1.4255	1.4279	1.4303	1.4327
4.2	1.4351	1.4315	1.4398	1.4422	1.4446	1.4469	1.4493	1.4516	1.4540	1.4563
4.3	1.4586	1.4609	1.4633	1.4656	1.4679	1.4702	1.4725	1.4748	1.4770	1.4793
4.4	1.4816	1.4839	1.4861	1.4884	1.4907	1.4929	1.4952	1.4974	1.4996	1.5019
4.5	1.5041	1.5063	1.5085	1.5107	1.5129	1.5151	1.5173	1.5195	1.5217	1.5239
4.6	1.5261	1.5282	1.5304	1.5326	1.5347	1.5369	1.5390	1.5412	1.5433	1.5454
4.7	1.5476	1.5497	1.5518	1.5539	1.5560	1.5581	1.5602	1.5623	1.5644	1.5665
4.8	1.5686	1.5707	1.5728	1.5748	1.5769	1.5790	1.5810	1.5831	1.5851	1.5872
4.9	1.5892	1.5913	1.5933	1.5953	1.5974	1.5994	1.6014	1.6034	1.6054	1.6074
5.0	1.6094	1.6114	1.6134	1.6154	1.6174	1.6194	1.6214	1.6233	1.6253	1.6273
5.1	1.6292	1.6312	1.6332	1.6351	1.6371	1.6390	1.6409	1.6429	1.6448	1.6467
5.2	1.6487	1.6506	1.6525	1.6544	1.0063	1.6582	1.6601	1.6620	1.6639	1.6658
5.3	1.6677	1.6696	1.6715	1.6734	1.6752	1.6771	1.6790	1.6808	1.6827	1.6845
5.4	1.6864	1.6882	1.6901	1.6919	1.6938	1.6956	1.6974	1.6993	1.7011	1.7029

$$\ln (N \cdot 10^m) = \ln N + m \ln 10, \qquad \ln 10 = 2.3026$$

TABLA A.3.2 Logaritmos naturales (*continuación*)

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
5.5	1.7047	1.7066	1.7084	1.7102	1.7120	1.7138	1.7156	1.7174	1.7192	1.7210
5.6	1.7228	1.7246	1.7263	1.7281	1.7299	1.7317	1.7334	1.7352	1.7370	1.7387
5.7	1.7405	1.7422	1.7440	1.7457	1.7475	1.7492	1.7509	1.7527	1.7544	1.7561
5.8	1.7579	1.7596	1.7613	1.7630	1.7647	1.7664	1.7682	1.7699	1.7716	1.7733
5.9	1.7750	1.7766	1.7783	1.7800	1.7817	1.7834	1.7851	1.7867	1.7884	1.7901
6.0	1.7918	1.7934	1.7951	1.7967	1.7984	1.8001	1.8017	1.8034	1.8050	1.8066
6.1	1.8083	1.8099	1.8116	1.8132	1.8148	1.8165	1.8181	1.8197	1.8213	1.8229
6.2	1.8245	1.8262	1.8278	1.8294	1.8310	1.8326	1.8342	1.8358	1.8374	1.8390
6.3	1.8406	1.8421	1.8437	1.8453	1.8469	1.8485	1.8500	1.8516	1.8532	1.8547
6.4	1.8563	1.8579	1.8594	1.8610	1.8625	1.8641	1.8656	1.8672	1.8687	1.8703
6.5	1.8718	1.8733	1.8749	1.8764	1.8779	1.8795	1.8810	1.8825	1.8840	1.8856
6.6	1.8871	1.8886	1.8901	1.8916	1.8931	1.8946	1.8961	1.8976	1.8991	1.9006
6.7	1.9021	1.9036	1.9051	1.9066	1.9081	1.9095	1.9110	1.9125	1.9140	1.9155
6.8	1.9169	1.9184	1.9199	1.9213	1.9228	1.9242	1.9257	1.9272	1.9286	1.9301
6.9	1.9315	1.9330	1.9344	1.9359	1.9373	1.9387	1.9402	1.9416	1.9430	1.9445
7.0	1.9459	1.9473	1.9488	1.9502	1.9516	1.9530	1.9544	1.9559	1.9573	1.9587
7.1	1.9601	1.9615	1.9629	1.9643	1.9657	1.9671	1.9685	1.9699	1.9713	1.9727
7.2	1.9741	1.9755	1.9769	1.9782	1.9796	1.9810	1.9824	1.9838	1.9851	1.9865
7.3	1.9879	1.9892	1.9906	1.9920	1.9933	1.9947	1.9961	1.9974	1.9988	2.0001
7.4	2.0015	2.0028	2.0042	2.0055	2.0069	2.0082	2.0096	2.0109	2.0122	2.0136
7.5	2.0149	2.0162	2.0176	2.0189	2.0202	2.0215	2.0229	2.0242	2.0255	2.0268
7.6	2.0282	2.0295	2.0308	2.0321	2.0334	2.0347	2.0360	2.0373	2.0386	2.0399
7.7	2.0412	2.0425	2.0438	2.0451	2.0464	2.0477	2.0490	2.0503	2.0516	2.0528
7.8	2.0541	2.0554	2.0567	2.0580	2.0592	2.0605	2.0618	2.0631	2.0643	2.0656
7.9	2.0669	2.0681	2.0694	2.0707	2.0719	2.0732	2.0744	2.0757	2.0769	2.0782
8.0	2.0794	2.0807	2.0819	2.0832	2.0844	2.0857	2.0869	2.0882	2.0894	2.0906
8.1	2.0919	2.0931	2.0943	2.0956	2.0968	2.0980	2.0992	2.1005	2.1017	2.1029
8.2	2.1041	2.1054	2.1066	2.1078	2.1090	2.1102	2.1114	2.1126	2.1138	2.1150
8.3	2.1163	2.1175	2.1187	2.1190	2.1211	2.1223	2.1235	2.1247	2.1258	2.1270
8.4	2.1282	2.1294	2.1306	2.1318	2.1330	2.1342	2.1353	2.1365	2.1377	2.1389
8.5	2.1401	2.1412	2.1424	2.1436	2.1448	2.1459	2.1471	2.1483	2.1494	2.1506
8.6	2.1518	2.1529	2.1541	2.1552	2.1564	2.1576	2.1587	2.1599	2.1610	2.1624
8.7	2.1633	2.1645	2.1656	2.1668	2.1679	2.1691	2.1702	2.1713	2.1725	2.1736
8.8	2.1748	2.1759	2.1770	2.1782	2.1793	2.1804	2.1815	2.1827	2.1838	2.1849
8.9	2.1861	2.1872	2.1883	2.1894	2.1905	2.1917	2.1928	2.1939	2.1950	2.1961
9.0	2.1972	2.1983	2.1994	2.2006	2.2017	2.2028	2.2039	2.2050	2.2061	2.2072
9.1	2.2083	2.2094	2.2105	2.2116	2.2127	2.2138	2.2148	2.2159	2.2170	2.2181
9.2	2.2192	2.2203	2.2214	2.2225	2.2235	2.2246	2.2257	2.2268	2.2279	2.2289
9.3	2.2300	2.2311	2.2322	2.2332	2.2343	2.2354	2.2364	2.2375	2.2386	2.2396
9.4	2.2407	2.2418	2.2428	2.2439	2.2450	2.2460	2.2471	2.2481	2.2492	2.2502
9.5	2.2513	2.2523	2.2534	2.2544	2.2555	2.2565	2.2576	2.2586	2.2597	2.2607
9.6	2.2618	2.2628	2.2638	2.2649	2.2659	2.2670	2.2680	2.2690	2.2701	2.2711
9.7	2.2721	2.2732	2.2742	2.2752	2.2762	2.2773	2.2783	2.2793	2.2803	2.2814
9.8	2.2824	2.2834	2.2844	2.2854	2.2865	2.2875	2.2885	2.2895	2.2905	2.2915
9.9	2.2925	2.2935	2.2946	2.2956	2.2962	2.2976	2.2986	2.2996	2.3006	2.3016

Soluciones a problemas con número impar

CAPÍTULO 1

1. *a*) Falso. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *no* está definida en $x = 1$, pero $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

   b) Verdadero

   c) Verdadero

   d) Falso. La derivada de una suma de funciones derivables es igual a la suma de las derivadas

   e) Falso. Si $f(x) = |x|$, entonces $f'(0)$ no existe

   f) Falso. Si y es una función de x, entonces valor de Δy (el incremento de y) puede ser positivo, negativo o cero

   g) Verdadero

   h) Verdadero

   i) Falso. La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero *no* es diferenciable en ese punto

   j) Verdadero

   k) Falso. Aunque la función $f(x)$ no esté definida en $x = c$, en algunos casos $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ puede existir

   l) Verdadero

   m) Falso. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe

3. 0.84

5. 35.5; 7.1

7. 0

9. No existe

11. $-\dfrac{3}{2}$

13. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, para $x \neq 0$

15. -23

17. No existe el límite

19. $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

23. $-\dfrac{2}{(x - 1)^3}$

25. $\dfrac{5}{2}x^{3/2}$

27. $\dfrac{3x^2 + 4}{2x^{3/2}}$

29. $5p^4 - 6p^2 - 3$

31. $-\dfrac{u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2}$

33. $\dfrac{y^3 - y - 10}{3y^3}$

35. $-\dfrac{3x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x + 1}(1 + x^2)^2}$

37. $10x$

39. $0.4x + 8$

41. $R'(x) = 80 - 0.16x$

43. $80 - 8.16x$

45. -35

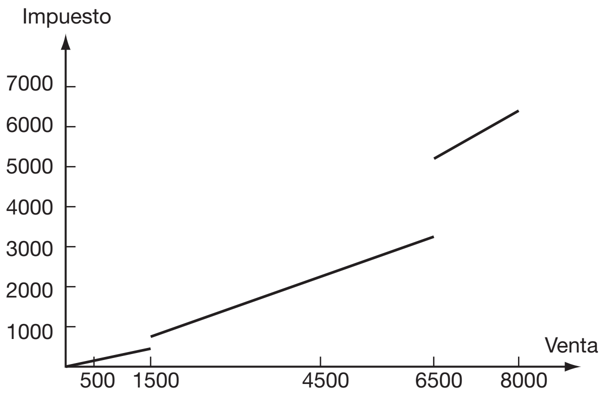
47. -2, cuando el precio sube de $p = 2$ a $p = 3$, la demanda disminuye aproximadamente en 2 unidades

49. No. Si $f(2) = \dfrac{1}{6}$, la función sería continua en $x = 2$

51. No

53. $f(-1) = 2$

55. $T(v) = \begin{cases} 0.03v & \text{si} \quad 0 \leq v \leq 1500 \\ 0.05v & \text{si} \quad 1500 \leq x \leq 6550 \\ 0.08v & \text{si} \quad x > 6550 \end{cases}$



$T(v)$ no es continua ni diferenciable para $v = 0$, 1500 y 6500

CAPÍTULO 2

1. *a*) Verdadero

b) Falso. La derivada de un cociente de funciones, f y g, es igual a $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

c) Verdadero

d) Falso. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

e) Falso. $\dfrac{d}{dx}(x^e) = ex^{e-1}$

f) Falso. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^3}$

g) Falso. Si la aceleración de un móvil es cero, entonces su velocidad es constante

h) Verdadero

i) Verdadero

j) Falso. $\dfrac{d}{dx}(\log(e)) = 0$

k) Falso. Si $y = u(x)$, entonces $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$

3. $-4x(1 + 2x^2)$

5. $\dfrac{e^x(x - 2)}{(x - 1)^2}$

7. $-\dfrac{(x + 2)(2x - 3)}{\sqrt{4x + 1}(x^2 + 3)^{3/2}}$

9. $\dfrac{5 - 3x - x^2 + 3x\ln(x) + 2x^2\ln(x)}{x[\ln(x)]^2}$

11. $x^x(1 + \ln x)$

13. $e^{x^2}x^2(3 + 2x^2)$

15. $-\dfrac{e^{-x}(x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

17. $-\dfrac{2e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

19. $-\dfrac{2x}{(x^2 + 4)^{3/2}}$

21. $-e^{-2x}x^2(2x - 3)$

23. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

25. $-\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

27. $5x - 4y + 4 = 0$

29. $x - y = 0$

31. $2e^{x^2}(1 + 2x^2)$

33. $\dfrac{2(27 - x^2)}{9(9 + x^2)^{5/3}}$

35. $a - b - b\ln x$

37. $1.2 + \ln x\ \dfrac{-50 + x}{x^2}$

39. -5

41. $-5/3$, si el precio sube de \$2 a \$3 la demanda disminuye aproximadamente 5/3 unidades

43. 78,000 unidades de productividad por máquina, quiere decir que si se aumenta de 8 a 9 máquinas la productividad aumentará aproximadamente en 78,000 unidades

45. *a*) $v(t) = 49 - 9.8t$ *b*) $a(t) = 9.8$ *c*) En $t = 5$, la velocidad del objeto es igual a cero

47. Al inicio del año 24, ≈ 91.78; al inicio del año 36, ≈ 55.64. La población crece con mayor rapidez al inicio del año 24

49. *a*) Al inicio había 20 individuos enfermos,

b) $I'(t) = 200t^5e^{-t}(6 - t)$

c) 4,211.22 enfermos/semana

d) $-3{,}065.2$ enfermos/semana. Observe que en la semana 5, el número de enfermos aumenta, mientras que en la semana 7 está disminuyendo

CAPÍTULO 3

1. *a*) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso; $f(x) = |x|$ es continua en $(-1, 1)$, pero no es derivable en $x = 0$

d) Falso; en un punto de inflexión, $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ *no existe*

e) Falso; la función $f(x) = x^6$ cumple $f''(0) = 0$ y $(0, 0)$ no es un punto de inflexión

f) Verdadero

g) Verdadero

h) Verdadero

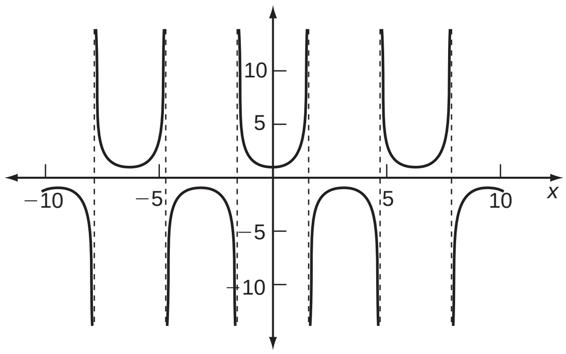
i) Falso; un ingreso máximo no necesariamente conduce a utilidades máximas

j) Falso; por arriba de cierto nivel, el costo de publicidad adicional disminuye el ingreso extra que genera

k) Verdadero

l) Verdadero

m) Falso; un valor mínimo local de una función puede ser mayor que un valor máximo local de la misma función. Analice los máximos y mínimos locales de la siguiente función



n) Verdadero

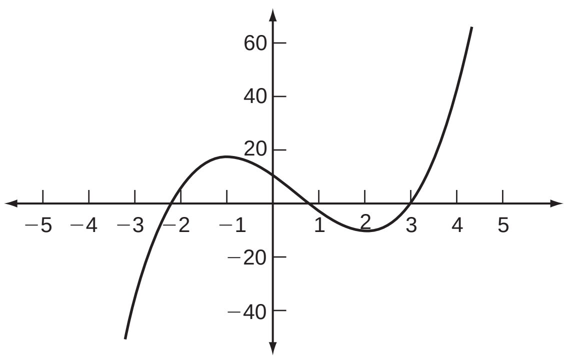
o) Falso; por ejemplo $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 5x - 5}{x^2 - 7x + 8} = 2$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + 5x - 5}{x^2 - 7x + 8} = 2$

p) Falso; por ejemplo $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 1}} = 3$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x + 5}{\sqrt{4x^2 + 1}} = -3$

q) Verdadero

3. *a*) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ *b*) $(-1, 2)$

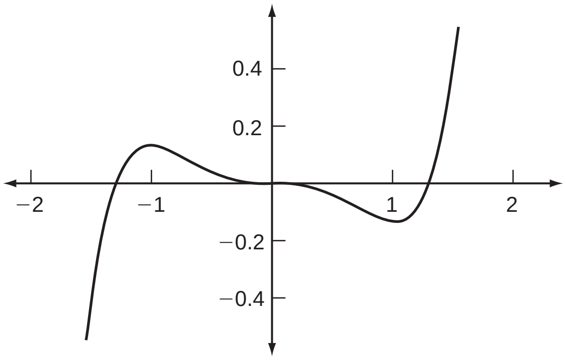
c) $(1/2, \infty)$ *d*) $(-\infty, 1/2)$



5. *a*) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *b*) $(-1, 1)$

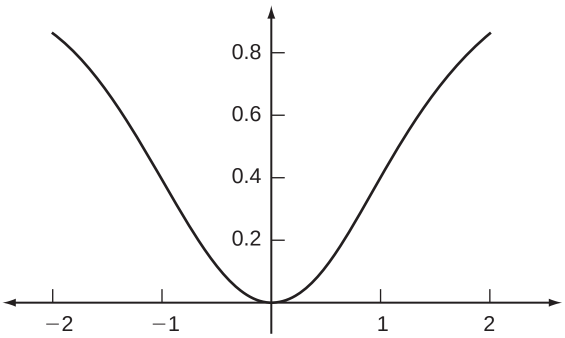
c) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

d) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$



7. *a*) $(0, \infty)$ *b*) $(-\infty, 0)$

c) $(-1, 1)$ *d*) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



9. $(20, \infty)$

13. Mínimo local en $x = 3$

15. Mínimo local en $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/3}$

17. Mínimo local en $t = 1$

19. Mínimo local en $x = 0$

21. *a*) $k = -1$ *b*) $k = 3$

23. $a < 0$, los valores de b y c no importan

25. Mínimo absoluto 0, en $x = 0, 1$; máximo absoluto $9\sqrt[3]{4}$ en $x = 3$

27. Mínimo absoluto 0, en $x = 1$; máximo absoluto $\dfrac{1}{2e}$, en $x = \sqrt{e}$

29. *a*) $x = 6$ *b*) $\$(10/e) \approx \$3.68$

c) $R_{\text{máx}} = \$(60/e) \approx \$22.07$

31. *a*) dy/dt representa la tasa en que aumenta la proporción de población infectada

b) $t = 2$

c) Es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$

33. $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\times$ $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\times$ $3\sqrt[3]{4}$ pulgadas $\approx 4.76 \times 4.76 \times 4.76$ pulgadas

35. *a*) $t = 20/4.9 \approx 4.08$ segundos *b*) $h \approx 20.41$ metros

37. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9} r^3$

43. *b*) $Q = 2000$; $T_{\text{mín}} = \$10, 250$ *c*) $10,256.25

45. *a*) $x = \dfrac{4-t}{10}$; $p = \dfrac{104 + 4t}{10}$ *b*) $\dfrac{(4-t)^2}{20}$

c) $t = 2$

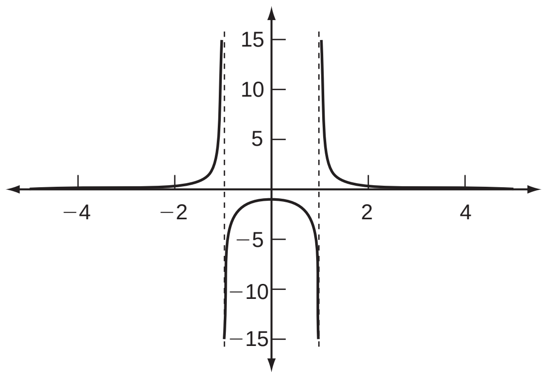
47. 9 meses

49. A:probabilidad de éxito a la larga; $p'(0) = A/B$

51. A una profundidad de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

53. 40 y 20

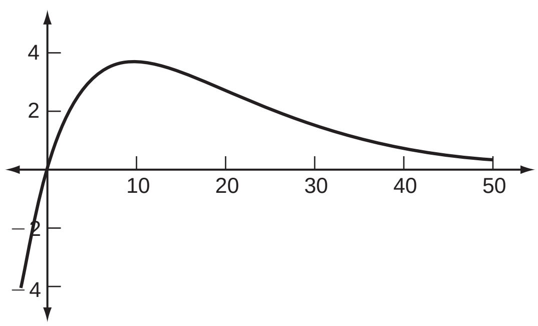
55.



Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$

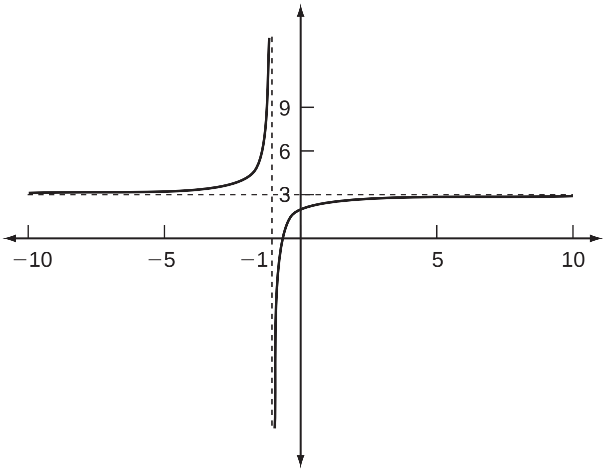
57.



Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: No tiene

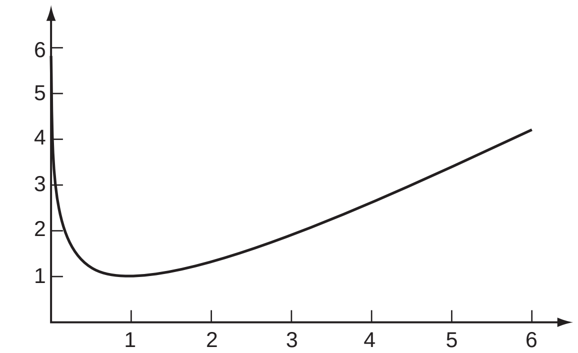
59.



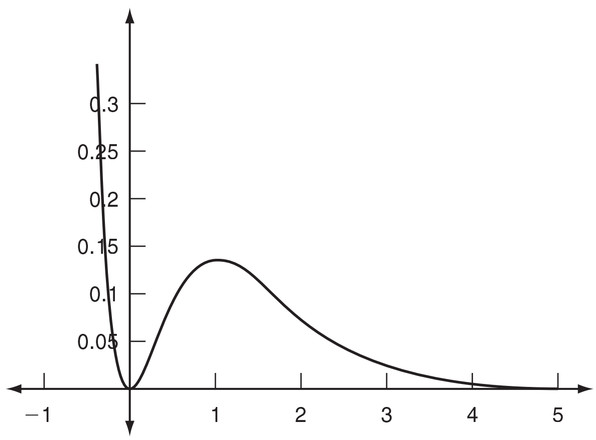
Asíntota horizontal: $y = 3$

Asíntota vertical: $x = -1$

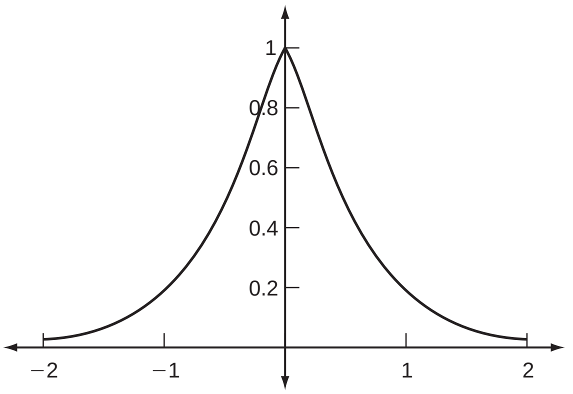
61.



63.



65.



CAPÍTULO 4

1. *a*) Falso. La diferencial de $3x^3$ es $9x^2dx$

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso. La derivada logarítmica de x^x es $1 + \ln x$

e) Verdadero

f) Verdadero

g) Falso. En una relación implícita $f(x, y) = 0$, una de las dos variables es independiente y la otra es dependiente

h) La diferencial de la función lineal $f(x) = 4x + 1$ es $4dx$

i) Verdadero

j) Verdadero

k) Falso. *Si* $f(x) = x^2$, se puede esperar que df sea aproximadamente igual a Δf, pero siempre *menor* que Δf

l) Verdadero

m) Verdadero

n) Verdadero

3. $\dfrac{5 + 2t}{2\sqrt{t^2 + 5t}}\, dt$

5. 1

7. $\Delta y \approx 0.014374$, $dy \approx 0.014434$

9. 1.04

11. 0.2

13. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t - 1}{3}$

15. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1 - x - 3xt^2}{2 + t + t^3}$

17. $y = 3$, la recta tangente es horizontal

19. $-\dfrac{1}{9}$

21. $y' = \dfrac{x^2 - 8x + 1}{2(x-4)^2}\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-1}}$

23. 0

25. $\dfrac{(\ln x - 1)dx}{(\ln x)^2}$, o bien, $\dfrac{x^2(x-y)}{y}\, dx$

27. *a*) $\dfrac{-9}{11}$ *b*) $\dfrac{-11}{9}$

c) -1

29. Elástica

31. Elástica

33. *a*) $p > \dfrac{c}{2b}$ *b*) $0 < p < \dfrac{c}{2b}$

c) $p = \dfrac{c}{2b}$

37. \$50

39. $\eta = -1\backslash 3$; la demanda disminuye en aproximadamente 1.67%

CAPÍTULO 5

1. *a*) Falso; en muchos casos la integral de un producto de funciones se puede obtener mediante integración por partes

b) Verdadero

c) Falso; las antiderivadas de una función integrable difieren por una constante arbitraria

d) Falso; $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$

e) Verdadero

f) Falso; si $f'(x) = g'(x)$, entonces, $f(x) = g(x) + C$, con C una constante arbitraria

g) Verdadero

h) Falso; $\int \dfrac{dt}{e^t} = -\dfrac{1}{e^t} + C$

i) Verdadero

j) Falso; $\int [g(x)]^n g'(x) dx = \dfrac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$

k) Falso; $\int \dfrac{dx}{x3} = \dfrac{-1}{2x^2} + C$

l) Falso; $\int e^n dx = e^n x + C$

m) Falso; $\int e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} + C$

3. $x + x^3 + \dfrac{3x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + C$

5. $3e^{x/3} + C$

7. $xe^2 + C$

9. $\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$

11. $\dfrac{x^{11}}{11} + \dfrac{x^{10}}{10} + C$

13. $e^{x^2} + C$

15. $\dfrac{3}{4}(e^x + 1)(4/3) + C$

17. $e^{-1/t} + C$

19. $t^t + C$

21. $\dfrac{5}{3}(u-1)\sqrt{2u+1} + C$

23. $\dfrac{1}{6}\left[\sqrt{1-t^2} - \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right|\right] + C$

25. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

27. $\dfrac{-x + x\ln|x|}{\ln 2} + C$

29. $-e^{1/x} + C$

31. $\dfrac{1}{2}x^2(-1 + \ln x^2) + C$

33. $\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{9+m^2} - 3\ln\left|\dfrac{3+\sqrt{m^2+9}}{m}\right|\right] + C$

35. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{-5+\sqrt{5}-t}{5+\sqrt{5}+t}\right| + C$

37. $\dfrac{5}{6}\ln\left|\dfrac{u^2}{3+\sqrt{2u^4+9}}\right| + C$

39. $\dfrac{1}{6}[\ln x^2]^3 + C$

41. $f(t) = -t + t\ln|t| + 2$

43. 9

45. \$8500

47. *a*) $0.1x - 0.001x^2 - 0.00001x^{2.5}$

b) $p = 0.1 - 0.001x - 0.00001x^{1.5}$

49. \$9000

51. *a*) $C(x) = 50x + 0.02x^2 + 3000$

b) \$14,250

53. *a*) 221 unidades *b*) 460 unidades

55. $3350 - \dfrac{8000(1 + \ln(x+25))}{(x+25)}$

57. $p = 26{,}000$

59. *a*) 15,750 automóviles *b*) 33,750 automóviles

61. *a*) $v(t) = 3t^2 + 2t + 50$ *b*) $d(t) = t^3 + t^2 + 50t$

63. $d(t) = 10t - \dfrac{5t^2}{2}$, cuando hace alto total el objeto habrá viajado 10 metros

65. $g(x) = e^{2x} + \sqrt{x}$

CAPÍTULO 6

1. *a*) Falso; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

b) Verdadero

c) Falso; si $3a$ y b son constantes, entonces $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)\right] = 0$)

d) Falso; la proposición es verdadera si $f(x)$ es *no negativa*

e) Falso; $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

f) Falso; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ es válida para toda c número real

g) Verdadero

h) Verdadero

i) Verdadero

j) Falso; la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = py(m - y)$, con p y m constantes es una ecuación logística

k) Falso; la ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y - x$ es de primer orden

l) Verdadero

m) Falso; la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal tome un valor mayor que su media es 0.5

n) Falso; la función $f(x) = x^2$, si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$; en otro caso, no puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua, ya que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}$

o) Verdadero

p) Falso, si X es una variable aleatoria continua, entonces el valor esperado de X se calcula mediante $\int_a^b xf(x)dx$, en donde $f(x)$ es la f.d.p. y es tal que $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

3. $\dfrac{1}{4}(1 + 5e^6) \approx 504.54$

5. 4

7. $\dfrac{3(e - 1)}{2e}$

9. 9

11. 847.69 horas-hombre

13. SC = 162 y SP = 48

15. $y(t) = t^3 + C$

17. $y(t) = Ce^{x - x^2/2}$

19. $-\dfrac{2}{t^2 - 2}$

21. $2e^{-\frac{t^4}{4} + \frac{x^4}{4}}$

23. $y(t) = \dfrac{100{,}000e^x}{9999 + e^x}$ en, aproximadamente, 9.21 semanas

25. $t = 4$ años; \$13.333 millones

27. No es f.d.p., ya que $\int_0^1 f(x)dx \neq 1$

29. Sí, es f.d.p.

31. $m = 2$

33. *a*) ≈ 0.61 *b*) ≈ 0.22 *c*) ≈ 0.63

35. *a*) $\dfrac{1}{3}$ *b*) $\dfrac{5}{12}$ *c*) $\dfrac{3}{4}$

37. \$11,662

39. 2.0935; 2.0941 (*Nota: el valor de la integral aproximado a cinco decimales es 2.09471*)

CAPÍTULO 7

1. *a*) Falso; a lo largo del eje y las coordenadas x y z son iguales a cero

b) Falso; en el plano xy, $z = 0$

c) Verdadero

d) Falso; el dominio de la función es todo el plano xy

e) Verdadero

f) Verdadero

g) Falso; si $h(x, y) = f(x) + g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 h(x, y)}{\partial^2 y} = \dfrac{dg(y)}{dy}$

h) Verdadero

i) Falso; si todas las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen y son continuas, entonces

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^2 \partial x^2}$$

j) Verdadero

k) Falso; si (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$ y f_{xx}, f_{yy} son positivas en (a, b) y además $f_{xx}\ f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0$ en (a, b), entonces, en (a, b) se alcanza un mínimo local de $f(x, y)$

l) Verdadero

m) Verdadero

n) Falso; la recta obtenida por el método de mínimos cuadrados, no necesariamente pasa por los puntos

o) Verdadero

p) Verdadero

q) Verdadero

3. $D = \{(x, y)|x^2 \geq y\}\backslash\{(2, 0)\}$

5. $D = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

7. $-ye^{-xy};\ -xe^{-xy};\ xye^{-xy} - e^{-xy};\ y^2e^{-xy}$

9. $\dfrac{2x}{x^2 + y^4};\ \dfrac{4y^3}{x^2 + y^4};\ -\dfrac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2};\ \dfrac{2}{x^2 + y^4}$

$-\dfrac{4x^2}{(x^2 + y^4)^2}$

11. Los puntos de la curva de nivel $C(r, h) = 100$ representan las posibles combinaciones de dimensiones de la lata que producen una lata, cuyo costo es de \$100

13. $\eta_{pA} = \eta_{pB} = \dfrac{1}{2}$, así que $\eta_{pA} + \eta_{pB} = 1$

15. $\partial C/\partial p_A = 1.1 + 2.78p_A - 3.66p_B$

$\partial C/\partial p_B = 13.8 - 3.66p_A + 8.88p_B$; estas derivadas representan la tasa de cambio en los costos de fabricación con respecto a incrementos en los precios de los productos

17. Mínimo local en $(1, 0)$

19. Mínimos locales en $\left(\pm\dfrac{1}{2}, 0\right)$, punto silla en $(0, 0)$

21. *a*) $H(0, 5) = 917.752$

b) $\dfrac{\partial H(0, 5)}{\partial w} \approx 40.79,\ \dfrac{\partial H(0,5)}{\partial t} \approx -27.81$

c) Cuando la temperatura, t, es cero y la velocidad del viento w es 5 m/s, un *pequeño* aumento en la temperatura hará que *H disminuya* aproximadamente 27.81 veces ese cambio, siempre que la velocidad del viento se mantenga constante. Ahora, si la temperatura se mantiene constante en cero grados, y la velocidad del viento sufre un *pequeño* aumento, la razón de la pérdida de calor aumenta aproximadamente 40.79 veces ese cambio. Observe que si aumenta la razón de la pérdida de calor, quiere decir que uno sentirá más frío

d) Por los resultados de la partes *b*) y *c*), cuando $t = 0$ y $w = 5$, tiene mayor influencia, en la razón de pérdida de calor, un aumento de 1m/s en la velocidad del viento que una disminución de 1˚C en la temperatura

25. *a*) $x = 28.18$, $y = 44.55$, $P = 7809.09$

b) $x = 28.04$, $y = 44.41$

27. $K = 7$, $L = 19$

31. $y = 11.179x + 75.936$, la estimación lineal es 154.2 contra 138.1 reportado por la Oficina de Censos de Estados Unidos

33. Las ecuaciones son:

$$a(x_1^4 + x_2^4 + \dots x_n^4) + b(x_1^3 + x_2^3 + \dots x_n^3) + a(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) = (x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \dots x_n^2y_n)$$

$$a(x_1^3 + x_2^3 + \dots x_n^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) + a(x_1 + x_2 + \dots x_n) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n)$$

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots x_n) + nc = (y_1 + y_2 + \dots y_n)$$

Para el caso de los datos dados, las ecuaciones se reducen a

$$354a + 100b + 30c = 104.3$$

$$100a + 30b + 10c = 41.1$$

$$30a + 10b + 5c = 30.3$$

Cuya solución es $a = 0.0357$, $b = -2.09$, $c = 10.03$

Índice

D

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

Z

CÁLCULO APLICADO

A LA ADMINISTRACIÓN Y A LA ECONOMÍA

Esta prestigiosa obra conserva y refuerza la orientación de las aplicaciones a la administración y la economía, sin descuidar aplicaciones generales a otras áreas, como ciencias sociales, biológicas y físicas, con el propósito de que sea una herramienta útil para una amplia gama de estudiantes.

Cálculo aplicado presenta características importantes como:

- Lecturas de inicio de capítulo, en las cuales se presentan casos prácticos probados en el salón de clases.

- En todos los capítulos se presenta la solución del caso al término del capítulo y se concluye con algunas preguntas, cuya finalidad es estimular el intercambio de ideas entre profesores y alumnos, así como conducir a un análisis más profundo del tema.

- Problemas de repaso del capítulo, así como la solución de los problemas impar, que se incluye al final del texto.

- En varios ejercicios de la sección Problemas de repaso del capítulo se presentan conceptos nuevos, cuyo estudio amplía lo expuesto en el texto.

  Para los profesores está disponible material de apoyo, que incluyela solución a todos los problemas de repaso, en el sitio Web: www.pearsoneducacion.net/arya

ISBN: 978-958-699-207-7

9 789586 992077

PRENTICE HALL

Visítenos en: www.pearsoneducacion.net

ALWAYS LEARNING

PEARSON