CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Se sabe cómo maximizar la utilidad de una compañía (como se vio en el capítulo 13) cuando tanto los ingresos como los costos están escritos como funciones de una sola cantidad, a saber, el número de unidades producidas. Pero, por supuesto, el nivel de producción en sí, está determinado por otros factores y, en general, ninguna variable sola puede representarlo.

Por ejemplo, la cantidad de petróleo que se bombea cada semana desde un campo petrolero depende del número de bombas y del número de horas que están funcionan. Su número dependerá de la cantidad de capital disponible originalmente para construir las bombas, así como del tamaño y forma del campo. El número de horas que las bombas pueden ser operadas depende de la mano de obra disponible para hacerlas funcionar y darles mantenimiento. Además, la cantidad de petróleo que se deseará bombear desde el campo petrolero dependerá de la demanda de petróleo en un momento dado, que está relacionada con el precio del petróleo.

La maximización de la utilidad semanal de un campo petrolero requerirá de un equilibrio entre el número de bombas y la cantidad de tiempo que cada bomba pueda ser operada. La utilidad máxima no se alcanzará mediante la construcción de más bombas de las que puedan ser operadas ni con pocas bombas a tiempo completo.

Éste es un ejemplo del problema general de maximización de utilidades cuando la producción depende de varios factores. La solución implica un análisis de la función de producción, que relaciona la producción con la asignación de recursos para la misma. Como por lo general son necesarias varias variables para describir la asignación de recursos, la asignación que proporciona mayor utilidad no puede encontrarse por medio de la diferenciación con respecto a una sola variable, como en los capítulos anteriores. En este capítulo se estudiarán las técnicas avanzadas necesarias para realizar dicha tarea.

OBJETIVO

Analizar funciones de varias variables y calcular valores funcionales. Analizar coordenadas en tres dimensiones y hacer bosquejos de superficies simples.

17.1 Funciones de varias variables

Suponga que un fabricante produce dos artículos, X y Y. Entonces, el costo total depende de los niveles de producción *tanto* de X *como* de Y. En la tabla 17.1 se presenta un programa que indica el costo total para diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se producen 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total c es 17. En esta situación parece natural asociar el número 17 con el *par ordenado* (5, 6):

$$(5, 6) \mapsto 17$$

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X producidas, mientras que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades producidas de Y. Para las otras situaciones de producción se tiene

$$(5, 7) \mapsto 19$$

$$(6, 6) \mapsto 18$$

y

$$(6, 7) \mapsto 20$$

TABLA 17.1

Número de unidades de X producidas, x	Número de unidades de Y producidas, y	Costo total de producción, c
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

Esta correspondencia puede considerarse como una relación entrada-salida donde las entradas son los pares ordenados. Con cada entrada se asocia exactamente una salida. Así, la correspondencia define una función f cuyo dominio consiste en (5, 6), (5, 7), (6, 6), (6, 7) y el rango consiste en 17, 19, 18 y 20. En notación funcional,

$$f(5, 6) = 17 \quad f(5, 7) = 19$$

$$f(6, 6) = 18 \quad f(6, 7) = 20$$

Se dice que el programa de costo total puede describirse mediante $c = f(x, y)$, que es una función de las dos variables independientes x y y. La letra c es la variable dependiente.

Ahora se considerará otra función de dos variables, se observa que la ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a z como una función de x y y:

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación tiene sentido, cuando el primero y segundo elementos de (x, y) se sustituyen por x y y, respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados excepto (0, 0). Por ejemplo, para encontrar $f(2, 3)$, se sustituye $x = 2$ y $y = 3$ en la expresión $2/(x^2 + y^2)$. Se obtiene, $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$.

Para las funciones de varias variables, no es necesario profundizar tanto como con la anterior f. La suma ordinaria de números reales define la función

$$Z = f(x, y) = x + y$$

que generaliza a las funciones lineales que se estudiaron en el capítulo 7. Así de fácil, es posible considerar funciones donde las entradas son tripletas ordenadas de números

reales. En el ejemplo 2 de la sección 7.4 se tenía

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

y se podría ciertamente escribir $Z = f(x_1, x_2, x_3)$. No existe razón por la que una función de dos variables deba estar definida para pares de números *reales* arbitrarios. En la sección 5.4 se estudió $a_{\overline{n}|r}$, el valor presente de n pagos de un dólar a una tasa de interés de r por periodo. La notación es extraña, pero si se escribe

$$A = a(n, r) = a_{\overline{n}|r}$$

se observa que para pares de entradas (n, r), donde n es un entero positivo y r es un número (racional) en el intervalo $(0, 1]$, la función a definida así proporciona números reales según se dan, aproximadamente, en el listado parcial del apéndice A. Para ver otro ejemplo, ahora de la sección 8.2, considere

$$C(n, r) = {}_nC_r$$

el número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

El costo por día para la fabricación de tazas para café de 12 y 20 onzas está dado por $c = 160 + 2x + 3y$, donde x es el número de tazas de 12 onzas y y es el número de tazas de 20 onzas. ¿Cuál es el costo por día de la fabricación de

1. 500 tazas de 12 onzas y 700 tazas de 20 onzas?
2. 1000 tazas de 12 onzas y 750 tazas de 20 onzas?

EJEMPLO 1 Funciones de dos variables

a. $f(x, y) = \dfrac{x+3}{y-2}$ es una función de dos variables. Como el denominador es cero cuando $y = 2$, el dominio de f son todos los (x, y) tales que $y \neq 2$. Algunos valores de la función son

$$f(0, 3) = \frac{0+3}{3-2} = 3$$

$$f(3, 0) = \frac{3+3}{0-2} = -3$$

Observe que $f(0, 3) \neq f(3, 0)$.

b. $h(x, y) = 4x$ define a h como función de x y y. Todos los pares ordenados de números reales constituyen el dominio. Algunos valores de la función son

$$h(2, 5) = 4(2) = 8$$

$$h(2, 6) = 4(2) = 8$$

Observe que los valores de la función son independientes del valor de y.

c. Si $z^2 = x^2 + y^2$ y $x = 3$ y $y = 4$, entonces $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, $z = \pm 5$. Entonces, con el par ordenado $(3, 4)$ *no es posible* asociar exactamente un solo número de salida. Por lo tanto, $z^2 = x^2 + y^2$ no define a z como una función de x y y.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Índice temperatura-humedad

En días húmedos y calurosos, mucha gente tiende a sentirse incómoda. El grado de incomodidad está dado numéricamente por el índice temperatura-humedad, ITH, *que es una función de dos variables,* t_d *y* t_w:

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w)$$

donde t_d *es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit) y* t_w *es la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evalúe el* ITH *cuando* $t_d = 90$ *y* $t_w = 80$.

Solución: Se desea encontrar $f(90, 80)$:

$$f(90, 80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83$$

Cuando el ITH es mayor que 75, la mayoría de la gente se siente incómoda. De hecho, el ITH solía llamarse antes "índice de incomodidad". Muchos dispositivos eléctricos responden a este índice y pueden anticipar la demanda de aire acondicionado en sus sistemas.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Si $y = f(x)$ es una función de una variable, el dominio de f puede representarse de manera geométrica mediante puntos en la recta numérica de números reales. La función misma puede representarse por medio de su gráfica en un plano de coordenadas, algunas veces llamado un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Sin embargo, para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, el dominio (que consiste en pares ordenados de números reales) puede representarse de manera geométrica por medio de una *región* en el plano. La función misma puede representarse geométricamente en un **sistema coordenado rectangular en *tres* dimensiones**. Tal sistema se forma cuando tres ejes de números reales mutuamente perpendiculares en el espacio, se intersecan en el origen de cada eje como en la figura 17.1. Las tres rectas numéricas se llaman eje x, eje y, eje z; su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema. Las flechas indican las direcciones positivas de los ejes y las porciones negativas de los ejes se muestran con líneas punteadas.

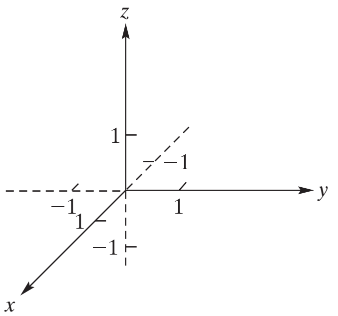

FIGURA 17.1
Sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones.

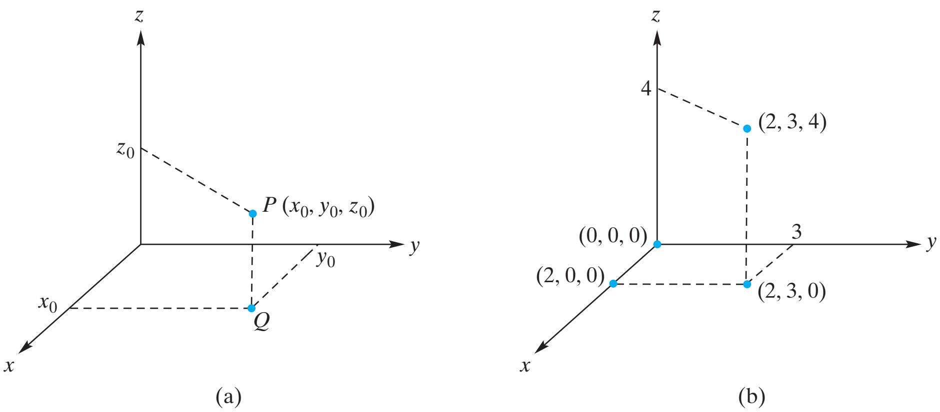

FIGURA 17.2 Puntos en el espacio.

A cada punto P en el espacio se le puede asignar una terna ordenada única de números, llamada coordenadas de P. Para hacerlo [vea la figura 17.2(a)], desde P se construye una recta perpendicular al plano xy, es decir, al plano determinado por lo ejes x y y. Sea Q el punto donde la línea interseca a este plano. Desde Q se trazan rectas perpendiculares a los ejes x y y, las cuales intersecan a los ejes x y y en x_0 y y_0, respectivamente. Desde P se traza una perpendicular al eje z, que lo interseca en z_0. Así, se ha asignado a P la terna ordenada (x_0, y_0, z_0). Debe ser también evidente que a cada terna ordenada se le puede asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio y ternas ordenadas, una terna ordenada puede denominarse como punto. En la figura 17.2(b) se muestran los puntos $(2, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$ y $(2, 3, 4)$. Observe que el origen corresponde a $(0, 0, 0)$. Por lo general, las porciones negativas de los ejes no se muestran a menos que sea necesario.

Es posible representar geométricamente una función de dos variables, $z = f(x, y)$. A cada par ordenado (x, y) en el dominio de f, se le asigna el punto $(x, y, f(x, y))$. El conjunto de todos estos puntos se llama *gráfica* de f. Tal gráfica se muestra en la figura 17.3. Se puede considerar que $z = f(x, y)$ representa una superficie en el espacio.[1]

En el capítulo 10 se analizó la continuidad de funciones de una variable. Si $y = f(x)$, entonces decir que f es continua en $x = a$, es decir que se pueden hacer los valores de $f(x)$ tan cercanos como se desee en $f(a)$ al tomar una x suficientemente cercana, pero diferente, de a. Este concepto se extiende a una función de dos variables. Se dice que la función $z = f(x, y)$ es continua en (a, b) si los valores de $f(x, y)$ pueden hacerse tan cercanos como se desee a $f(a, b)$ al tomar (x, y) suficientemente cercanos, pero diferentes de (a, b). Desde un punto de vista general, y sin profundizar demasiado en este concepto, se puede decir que una función de dos variables es continua en su dominio (esto es, continua en cada punto de su dominio) si su gráfica es una superficie sin interrupciones.

En general, una **función de n variables** es aquella cuyo dominio consiste en n-adas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ es una función de tres variables con un dominio que consiste en todas las ternas ordenadas. La función

[1]Nos hemos tomado la libertad de usar el término *superficie* en un sentido intuitivo.

Por lo general, a los siete octantes restantes no se les asignan nombres.

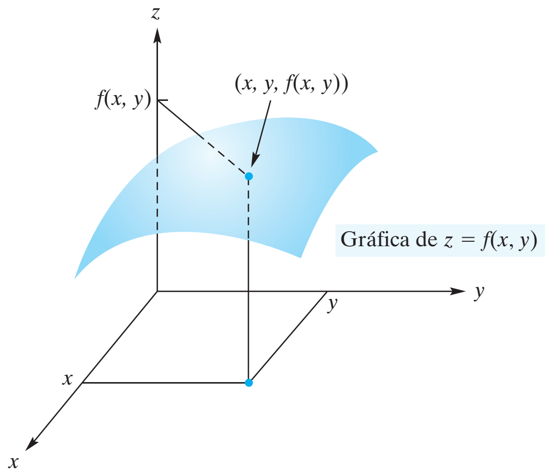

FIGURA 17.3 Gráfica de una función de dos variables.

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$ es una función de cuatro variables con un dominio que consiste en todas las tétradas ordenadas. Aunque las funciones de varias variables son sumamente importantes y útiles, no es posible visualizar las gráficas de funciones de más de dos variables.

Ahora se realizará un breve estudio del bosquejo de superficies en el espacio. Se comenzará con planos que son paralelos a un plano coordenado. Por "plano coordenado" se entiende un plano que contiene dos ejes coordenados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes x y y es el **plano** xy. De manera similar, se habla del **plano** xz y del **plano** yz. Los planos coordenados dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. En particular, la parte que contiene todos los puntos (x, y, z) donde x, y y z son positivos se llama **primer octante**.

Suponga que S es un plano paralelo al plano xy y pasa por el punto $(0, 0, 5)$. [Vea la figura 17.4(a)]. Entonces, el punto (x, y, z) estará en S si y sólo si, $z = 5$; esto es, x y y pueden ser cualesquiera números reales, pero z debe ser igual a 5. Por esta razón se dice que $z = 5$ es una ecuación de S. En forma similar, una ecuación del plano paralelo al plano xz y que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ es $y = 2$ [figura 17.4(b)]. La ecuación $x = 3$ es una ecuación del plano que pasa por $(3, 0, 0)$ y es paralelo al plano yz [figura 17.4(c)]. Ahora se verán los planos en general.

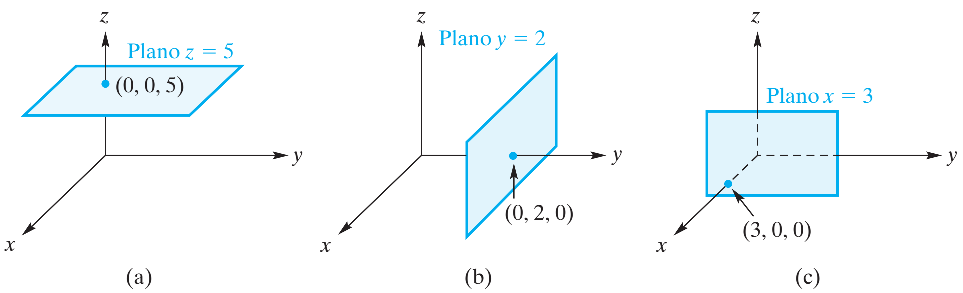

FIGURA 17.4 Planos paralelos a los planos coordenados.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde D es una constante y A, B y C son constantes y no todas son iguales a cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos en la misma recta) determinan un plano, una manera conveniente de esbozar un plano es encontrar primero los puntos, en caso de que existan, en que el plano interseca los ejes x, y y z. Esos puntos se llaman *intersecciones*.

EJEMPLO 3 Graficación de un plano

Bosqueje el plano $2x + 3y + z = 6$.

Solución: El plano interseca el eje x cuando $y = 0$ y $z = 0$. Así, $2x = 6$, lo cual da $x = 3$. De manera similar, si $x = z = 0$, entonces $y = 2$; si $x = y = 0$, entonces $z = 6$. Por lo tanto, las intersecciones son $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 6)$. Después de graficar estos puntos se pasa un plano por ellos. En la figura 17.5(a) se muestra la porción del plano en el primer octante; sin embargo, usted debe darse cuenta que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

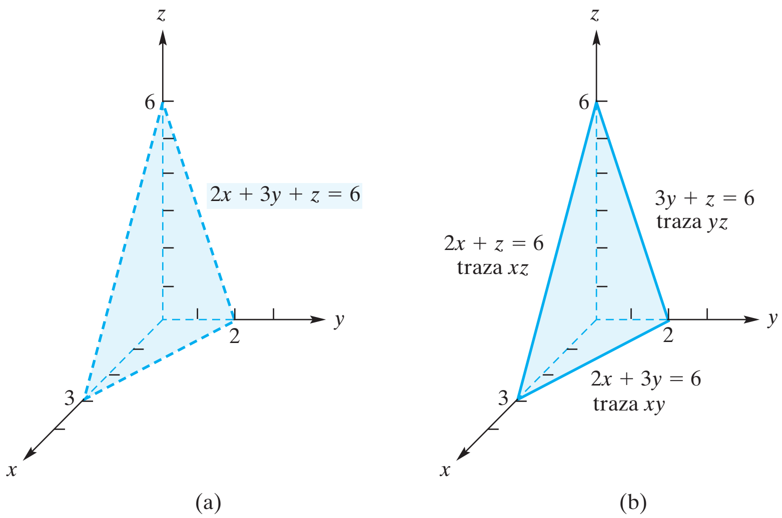

FIGURA 17.5 El plano $2x + 3y + z = 6$ y sus trazas.

Una superficie puede bosquejarse con ayuda de sus **trazas**, que son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. A modo de ilustración, para el plano $2x + 3y + z = 6$ del ejemplo 3, la traza en el plano xy se obtiene al establecer que $z = 0$. Esto da $2x + 3y = 6$, que es la ecuación de una recta en el plano xy. En forma similar, al establecer $x = 0$ se obtiene la traza en el plano yz; la recta $3y + z = 6$. La traza xz es la recta $2x + z = 6$. [Vea la figura 17.5(b)].

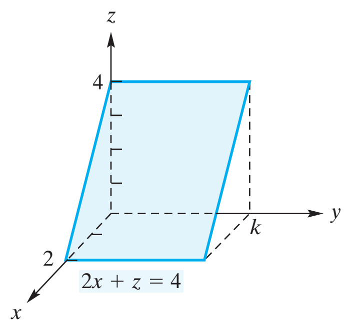

FIGURA 17.6 El plano $2x + z = 4$.

EJEMPLO 4 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie $2x + z = 4$.

Solución: Esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones x y z son $(2, 0, 0)$ y $(0, 0, 4)$ y no hay intersección y, porque x y z no pueden ser cero al mismo tiempo. Al establecer que $y = 0$ se obtiene la traza xz, $2x + z = 4$, que es una recta en el plano x, z. De hecho, la intersección de la superficie con cualquier plano $y = k$ es también $2x + z = 4$. Por consiguiente, el plano es como en la figura 17.6.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

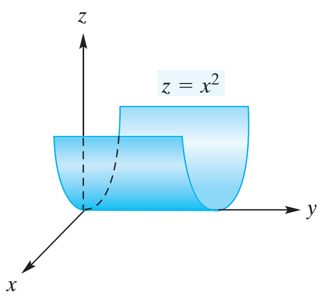

FIGURA 17.7 La superficie $z = x^2$.

Los ejemplos finales tratan con superficies que no son planos, pero cuyas gráficas pueden obtenerse con facilidad.

EJEMPLO 5 Bosquejo de una superficie

Observe que esta ecuación no pone restricción sobre y.

Bosqueje la superficie $z = x^2$.

Solución: La traza xz es la curva $z = x^2$, que es una parábola. De hecho, para *cualquier* valor fijo de y se obtiene $z = x^2$. Así, la gráfica es como en la figura 17.7.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

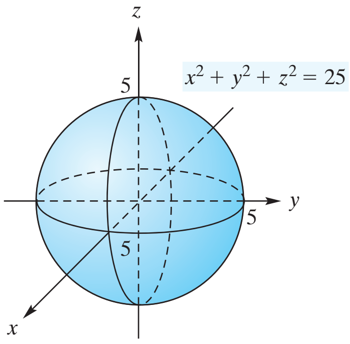

FIGURA 17.8 La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

EJEMPLO 6 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución: Se establece $z = 0$ se obtiene la traza xy, $x^2 + y^2 = 25$, lo cual es un círculo de radio 5. De manera similar, las trazas yz y xz, son los círculos $y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$, respectivamente. Note también que como $x^2 + y^2 = 25 - z^2$, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, donde $-5 \leq k \leq 5$, es un círculo. Por ejemplo, si $z = 3$, la intersección es el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Si $z = 4$, la intersección es $x^2 + y^2 = 9$. Esto es, las secciones transversales de la superficie que son paralelas al plano xy son círculos. La superficie se muestra en la figura 17.8; es una esfera.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

Problemas 17.1

En los problemas 1 a 12, determine los valores funcionales indicados para las funciones dadas.

*1. $f(x, y) = 4x - y^2 + 3$; $f(1, 2)$

2. $f(x, y) = 3x^2y - 4y$; $f(2, -1)$

*3. $g(x, y, z) = e^{2x}(3y + z)$; $g(0, 3, -1)$

4. $g(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$; $g(3, 1, -2)$

5. $h(r, s, t, u) = \dfrac{rs}{t^2 - u^2}$; $h(-3, 3, 5, 4)$

6. $h(r, s, t, u) = \ln(ru)$; $h(1, 5, 3, 1)$

7. $g(p_A, p_B) = 2p_A(p_A^2 - 5)$; $g(4, 8)$

8. $g(p_A, p_B) = p_A\sqrt{p_B} + 10$; $g(8, 4)$

9. $F(x, y, z) = 3$; $F(2, 0, -1)$

10. $F(x, y, z) = \dfrac{2x}{(y + 1)z}$; $F(1, 0, 3)$

11. $f(x, y) = e^{x+y}$; $f(x_0 + h, y_0)$

12. $f(x, y) = x^2y - 3y^3$; $f(r + t, r)$

13. **Ecología** Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones de animales en un área dada, consiste en marcar primero todos los animales obtenidos en una muestra de R especímenes del área, y luego soltarlos de manera que puedan mezclarse con otros no marcados. En fecha posterior se toma una segunda muestra de M animales y se anota el número de aquéllos que ya están marcados, S. Con base en R, M y S, una estimación de la población total N de animales en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}$$

Encuentre $f(400, 400, 80)$. Este método se llama *procedimiento de marcaje y recaptura*.[2]

14. **Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen exactamente k descendientes, la probabilidad de que haya exactamente entre ellos r de ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k-r)!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, k$$

Encuentre la probabilidad de que de un total de cuatro hijos, exactamente tres tengan ojos azules.

En los problemas 15 a 18, encuentre las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones dadas.

15. Paralelo al plano xz que pasa por el punto $(0, 2, 0)$.

16. Paralelo al plano yz que pasa por el punto $(-2, 0, 0)$.

17. Paralelo al plano xy que pasa por el punto $(2, 7, 6)$.

18. Paralelo al plano yz que pasa por el punto $(-4, -2, 7)$.

En los problemas 19 a 28, bosqueje las superficies dadas.

*19. $x + y + z = 1$

20. $2x + y + 2z = 6$

*21. $3x + 6y + 2z = 12$

22. $2x + 3y + 5z = 1$

23. $x + 2y = 2$

24. $y = 3z + 2$

*25. $z = 4 - x^2$

26. $y = z^2$

*27. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

28. $3x^2 + 2y^2 = 1$

OBJETIVO

Calcular derivadas parciales.

17.2 Derivadas parciales

En la figura 17.9 se muestra la superficie $z = f(x, y)$ y un plano paralelo al plano xz que pasa por el punto $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie. La ecuación de este plano es $y = b$. Por lo tanto, cualquier punto en la curva que sea la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$, debe tener la forma $(x, b, f(x, b))$. Así, la curva puede describirse por medio de $z = f(x, b)$. Como b es constante, $z = f(x, b)$ puede considerarse como una función de una variable, x. Cuando se evalúa la derivada de esta función en a, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$. (Vea la figura

[2]E. P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart y Winston, 1966).

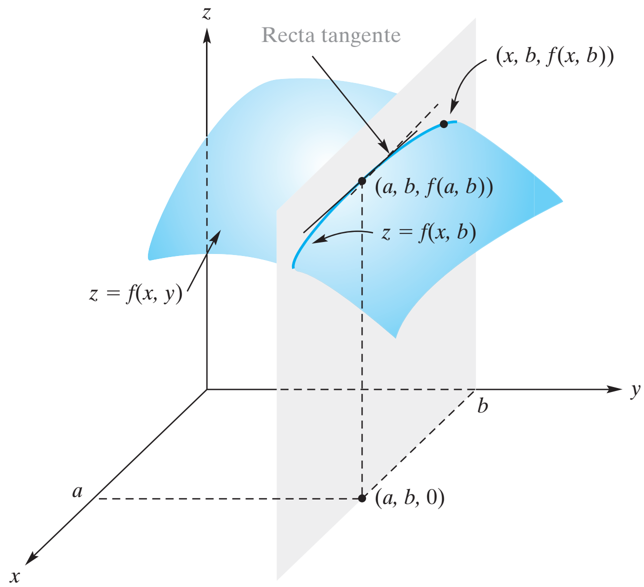

FIGURA 17.9 Interpretación geométrica de $f_x(a, b)$.

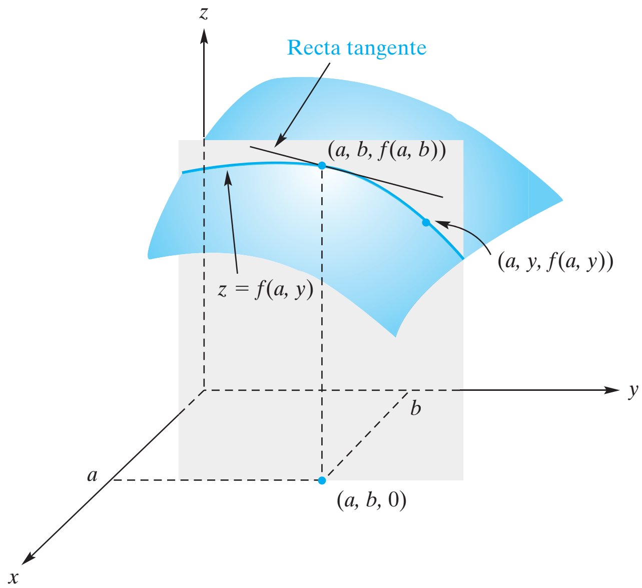

FIGURA 17.10 Interpretación geométrica de $f_Y(a, b)$.

17.9). Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a x* en (a, b) y se denota con $f_x(a, b)$. En términos de límites

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \qquad \textbf{(1)}$$

Por otra parte, en la figura 17.10 el plano $x = a$ es paralelo al plano yz corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva dada por $z = f(a, y)$, que es una función de y. Cuando se evalúa la derivada de esta función en b, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$. Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a y* en (a, b) y se denota con $f_y(a, b)$. En términos de límites,

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \qquad \textbf{(2)}$$

Esto proporciona una interpretación geométrica de una derivada parcial.

Se dice que $f_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, b, f(a, b))$ *en la dirección x*; de manera similar, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente *en la dirección y*.

Por lo general, al reemplazar a y b en las ecuaciones (1) y (2) por x y y, respectivamente, se obtiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Si $z = f(x, y)$ la ***derivada parcial de f con respecto a x***, denotada por f_x, es la función dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre que el límite exista.

La ***derivada parcial de f con respecto a y***, denotada por f_y, es la función dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Al analizar la definición anterior, es posible establecer el siguiente procedimiento para determinar f_x y f_y:

Esto proporciona un método mecánico para encontrar derivadas parciales.

Procedimiento para encontrar $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$

Para encontrar f_x, trate a y como constante y diferencie f con respecto a x de la manera usual.

Para encontrar f_y, trate a x como constante y diferencie f con respecto a y de la manera usual.

EJEMPLO 1 Obtención de derivadas parciales

Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. Encuentre también, $f_x(3, 4)$ y $f_y(3, 4)$.

Solución: Para encontrar $f_x(x, y)$, se trata a y como una constante y se diferencia a f con respecto a x:

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy$$

Para encontrar $f_y(x, y)$, se trata a x como una constante y se diferencia con respecto a y:

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2$$

Observe que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son cada una funciones de las dos variables x y y. Para encontrar $f_x(3, 4)$, se evalúa $f_x(x, y)$ cuando $x = 3$ y $y = 4$:

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40$$

De manera similar,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

En la tabla 17.2 se proporcionan las notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. En la tabla 17.3 se dan las notaciones para las derivadas parciales evaluadas en (a, b). Observe que el símbolo ∂ (no d) se usa para denotar una derivada parcial. El símbolo $\partial z/\partial x$ se lee "derivada parcial de z con respecto a x".

TABLA 17.2

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x	**Derivada parcial de f (o z) con respecto a y**
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))$	$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$

TABLA 17.3

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x. Evaluada en (a, b)	**Derivada parcial de f (o z) con respecto a y. Evaluada en (a, b)**
$f_x(a, b)$	$f_y(a, b)$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(a,b)}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(a,b)}$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=a\\y=b}}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\substack{x=a\\y=b}}$

EJEMPLO 2 Obtención de derivadas parciales

a. *Si $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ y $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1.0)}$.*

Solución: Para encontrar $\partial z/\partial x$, se diferencia z con respecto a x. Se trata a y como una constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3(3x^2)y^3 - 9(2x)y + (1)y^2 + 0\\ &= 9x^2y^3 - 18xy + y^2\end{aligned}$$

Al evaluar la última ecuación en $(1, 0)$ se obtiene

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 9(1)^2(0)^3 - 18(1)(0) + 0^2 = 0$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$, se diferencia z con respecto a y. Se trata a x como una constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4(1)\\ &= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4\end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 9(1)^3(0)^2 - 9(1)^2 + 2(1)(0) + 4 = -5$$

b. *Si* $w = x^2e^{2x+3y}$, *encuentre* $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$.

Solución: Para encontrar $\partial w/\partial x$, se trata a y como constante y se diferencia con respecto a x. Como x^2e^{2x+3y} es un producto de dos funciones que cada una incluye a x, se usa la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2(2e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}(2x)\\ &= 2x(x+1)e^{2x+3y}\end{aligned}$$

Para encontrar $\partial w/\partial y$, se trata a x como constante y se diferencia con respecto a y:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) = 3x^2e^{2x+3y}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

Se ha visto que para una función de dos variables pueden considerarse dos derivadas parciales. En realidad, el concepto de derivadas parciales puede extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ se tienen tres derivadas parciales:

la parcial con respecto a x, denotada como $f_x(x, y, z)$, $\partial w/\partial x$, etcétera;
la parcial con respecto a y, denotada como $f_y(x, y, z)$, $\partial w/\partial y$, etcétera;

y

la parcial con respecto a z, denotada como $f_z(x, y, z)$, $\partial w/\partial z$, etcétera.

Para determinar $\partial w/\partial x$, se trata a y y z como constantes y se diferencia w con respecto a x. Para $\partial w/\partial y$, se trata a x y z como constantes y se diferencia con respecto a y. Para $\partial w/\partial z$, se trata a x y y como constantes y se diferencia con respecto a z. Para una función de n variables, se tienen n derivadas parciales que se determinan de manera análoga.

EJEMPLO 3 Derivadas parciales de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$, *encuentre* $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$.

Solución: Para encontrar $f_x(x, y, z)$ se trata a y y z como constantes y se diferencia f con respecto a x:

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

Trate a x y z como constantes y haga la diferencia con respecto a y, se tiene

$$f_y(x, y, z) = 2yz$$

Trate a x y y como constantes y haga la diferencia con respecto a z, se tiene

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 3z^2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

EJEMPLO 4 Derivadas parciales de una función de cuatro variables

Si $p = g(r, s, t, u) = \dfrac{rsu}{rt^2 + s^2t}$, *encuentre* $\dfrac{\partial p}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}$, *y* $\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)}$.

Solución: Para encontrar $\partial p/\partial s$, primero observe que p es un cociente de dos funciones y que cada una incluye a la variable s. Así, se usa la regla del cociente y se trata a r, t y u como constantes:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{(rt^2 + s^2t)\frac{\partial}{\partial s}(rsu) - rsu\frac{\partial}{\partial s}(rt^2 + s^2t)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

$$= \frac{(rt^2 + s^2t)(ru) - (rsu)(2st)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

Al simplificar se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ru(rt - s^2)}{t(rt + s^2)^2} \qquad \text{(un factor de } t \text{ se cancela)}$$

Para encontrar $\partial p/\partial t$, se puede escribir primero a p como

$$p = rsu(rt^2 + s^2t)^{-1}$$

A continuación, se usa la regla de la potencia y se trata a r, s y u como constantes:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rsu(-1)(rt^2 + s^2t)^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(rt^2 + s^2t)$$

$$= -rsu(rt^2 + s^2t)^{-2}(2rt + s^2)$$

de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{rsu(2rt + s^2)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

Al hacer $r = 0, s = 1, t = 1$ y $u = 1$ resulta

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)} = -\frac{0(1)(1)(2(0)(1) + (1)^2)}{(0(1)^2 + (1)^2(1))^2} = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

Problemas 17.2

En los problemas 1 a 26, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

*1. $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7$

2. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$

3. $f(x, y) = 2y + 1$

4. $f(x, y) = \ln 2$

5. $g(x, y) = 3x^4y + 2xy^2 - 5xy + 8x - 9y$

6. $g(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^3 + 5xy^3 - 2$

7. $g(p, q) = \sqrt{pq}$

8. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}$

9. $h(s, t) = \dfrac{s^2 + 4}{t - 3}$

10. $h(u, v) = \dfrac{8uv^2}{u^2 + v^2}$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\ln(q_1 + 2) + \frac{1}{3}\ln(q_2 + 5)$

12. $Q(l, k) = 2l^{0.38}k^{1.79} - 3l^{1.03} + 2k^{0.13}$

13. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 9}}{x^2y + y^2x}$

15. $z = e^{5xy}$

16. $z = (x^2 + y^2)e^{2x+3y+1}$

17. $z = 5x\ln(x^2 + y)$

18. $z = \ln(5x^3y^2 + 2y^4)^4$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}(r^3 - 2rs + s^2)$

20. $f(r, s) = \sqrt{rs}\, e^{2+r}$

21. $f(r, s) = e^{3-r}\ln(7 - s)$

22. $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s)$

*23. $g(x, y, z) = 2x^3y^2 + 2xy^3z + 4z^2$

24. $g(x, y, z) = 2xy^2z^6 - 4x^2y^3z^2 + 3xyz$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$

26. $g(r, s, t, u) = rs\ln(2t + 5u)$

En los problemas 27 a 34, evalúe las derivadas parciales dadas.

*27. $f(x, y) = x^3y + 7x^2y^2$; $f_x(1, -2)$

28. $z = \sqrt{2x^3 + 5xy + 2y^2}$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$

29. $g(x, y, z) = e^x\sqrt{y + 2z}$; $g_z(0, 6, 4)$

30. $g(x, y, z) = \dfrac{3x^2y^2 + 2xy + x - y}{xy - yz + xz}$, $g_y(1, 1, 5)$

*31. $h(r, s, t, u) = (s^2 + tu)\ln(2r + 7st)$; $h_s(1, 0, 0, 1)$

32. $h(r, s, t, u) = \dfrac{7r + 3s^2u^2}{s}$; $h_t(4, 3, 2, 1)$

33. $f(r, s, t) = rst(r^2 + s^3 + t^4)$; $f_s(1, -1, 2)$

34. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}}$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

35. Si $z = xe^{x-y} - ye^{y-x}$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} + e^{y-x}$$

36. Precio de acciones de un ciclo de dividendos En un análisis de los precios de un ciclo de dividendos, Palmon y Yaari[3] consideran la función f dada por

$$u = f(t, r, z) = \frac{(1+r)^{1-z}\ln(1+r)}{(1+r)^{1-z} - t}$$

donde u es la tasa instantánea de la apreciación del precio solicitado, r es una tasa de rendimiento anual de oportunidad, z la fracción de un ciclo de dividendos sobre el cual una porción de las acciones es controlada por un vendedor de medio ciclo y t es la tasa efectiva del impuesto por ganancias de capital. Ellos afirman que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{t(1+r)^{1-z}\ln^2(1+r)}{[(1+r)^{1-z} - t]^2}$$

Verifique esto.

37. Demanda de dinero En un análisis de teoría de inventarios sobre la demanda de dinero, Swanson[4] considera la función

$$F(b, C, T, i) = \frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que $\dfrac{\partial F}{\partial C} = -\dfrac{bT}{C^2} + \dfrac{i}{2}$. Verifique esta derivada parcial.

38. Desregulación de la tasa de interés En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[5] obtienen la ecuación

$$r_L = r + D\frac{\partial r}{\partial D} + \frac{dC}{dD} \qquad \textbf{(3)}$$

donde r es la tasa de interés por depósitos pagados por los bancos comerciales, r_L es la tasa de interés ganado por esos bancos, C es el costo administrativo por transformar los depósitos en activos productivos y D el nivel de los depósitos por ahorros. Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r\left[\frac{1+\eta}{\eta}\right] + \frac{dC}{dD} \qquad \textbf{(4)}$$

donde $\eta = \dfrac{r/D}{\partial r/\partial D}$ es la elasticidad del depósito con respecto al interés del depósito. Exprese la ecuación (3) en términos de η para verificar la ecuación (4).

39. Publicidad y rentabilidad En un análisis sobre publicidad y rentabilidad, Swales[6] considera una función f dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$$

donde R es la tasa ajustada de utilidad, r la tasa contable de utilidad, a es una medida de los gastos publicitarios y n el número de años en que la publicidad se deprecia por completo. En el análisis, Swales determina $\partial R/\partial n$. Encuentre esta derivada parcial.

17.3 Aplicaciones de las derivadas parciales

OBJETIVO

Desarrollar las nociones de costo marginal parcial, productividad marginal y productos competitivos y complementarios.

Desde la sección 17.2 se sabe que si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones x y y, respectivamente. Existen otras interpretaciones: como $\partial z/\partial x$ es la derivada de z con respecto a x cuando y se mantiene fija, y como una derivada es una razón de cambio, se tiene

Aquí se tienen las interpretaciones de las derivadas parciales como "tasa de cambio".

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ es la razón de cambio de z con respecto a x cuando y se mantiene fija.

De modo similar,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ es la razón de cambio de z con respecto a y cuando x se mantiene fija.

Ahora se verán algunas aplicaciones en las que la noción "razón de cambio" de una derivada parcial resulta muy útil.

[3] D. Palmon y U. Yaari, "Taxation of Capital Gains and the Behavior of Stock Prices over the Dividend Cycle", *The American Economist*, XXVII, núm. 1 (1983), 13-22.
[4] P. E. Swanson, "Integer Constraints on the Inventory Theory of Money Demand", *Quarterly Journal of Business and Economics*, 23, núm. 1 (1984), 32-37.
[5] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification," *Review of Business and Economic Research*, XX (1984), 39-49.
[6] J. K. Swales, "Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub," *Applied Economics*, 17, núm. 4 (1985), 603-617.

Suponga que un fabricante produce x unidades del producto X y y unidades del producto Y. Entonces, el costo total c de esas unidades es una función de x y y, que es llamada una **función de costos conjuntos**. Si una función de este tipo es $c = f(x, y)$, entonces $\partial c/\partial x$ se llama **costo marginal (parcial) con respecto a** x, y es la razón de cambio de c con respecto a x cuando y se mantiene fija. De manera similar, $\partial c/\partial y$ es el **costo marginal (parcial) con respecto a** y, y es la razón de cambio de c con respecto a y cuando x se mantiene fija.

Por ejemplo, si c se expresa en dólares y $\partial c/\partial y = 2$, entonces el costo de producir una unidad adicional de Y cuando el nivel de producción de X es fijo, es aproximadamente de dos dólares.

Si un fabricante produce n artículos, la función de costos conjuntos es una función de n variables y habrá n funciones de costo marginal (parcial).

EJEMPLO 1 Costos marginales

Una compañía fabrica dos tipos de esquís, los modelos Ligero y Alpino. Suponga que la función de costos conjuntos de producir x pares del modelo Ligero y y pares del modelo Alpino por semana es

$$c = f(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000$$

donde c se expresa en dólares. Determine los costos marginales de $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ cuando $x = 100$ y $y = 50$, e interprete los resultados.

Solución: Los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.14x + 75 \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 85$$

Así,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100,50)} = 0.14(100) + 75 = 89 \tag{1}$$

y

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100,50)} = 85 \tag{2}$$

La ecuación (1) implica que al aumentar la producción del modelo Ligero de 100 a 101, mientras se mantiene en 50 la producción del modelo Alpino, aumentan los costos aproximadamente en \$89. La ecuación (2) implica que al aumentar la producción del modelo Alpino de 50 a 51, mientras se mantiene en 100 la producción del modelo Ligero, aumentan los costos aproximadamente en \$85. De hecho, como $\partial c/\partial y$ es una función constante, el costo marginal con respecto a y es de \$85 en todos los niveles de producción.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Pérdida de calor de un cuerpo

En un día frío, una persona puede sentir aún más frío cuando hay viento que cuando no lo hay, porque la razón a la cual se pierde calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

indica la razón de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados Celsius) y la velocidad del viento w (en metros por segundo). Para $H = 2000$, la piel expuesta se congelará en un minuto.[7]

a. *Evalúe H cuando $t = 0$ y $w = 4$.*

Solución: Cuando $t = 0$ y $w = 4$,

$$H = (10.45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 872.85$$

[7] G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, 2a. ed. (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

b. *Evalúe $\partial H/\partial t$ y $\partial H/\partial t$* cuando $t = 0$ y $w = 4$ *e interprete los resultados.*

Solución:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \left(\frac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial w}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = 49.5$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(-1), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = -26.45$$

Estas ecuaciones significan que cuando $t = 0$ y $w = 4$, al incrementar w por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo t, H aumentará alrededor de 49.5 veces lo que aumente w. Al incrementar t por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo w, H disminuirá alrededor de 26.45 veces lo que aumente t.

c. *Cuando $t = 0$ y $w = 4$, ¿qué tiene más influencia en H: un cambio en la velocidad del viento de* 1 m/s *o un cambio en la temperatura de* 1°C?

Solución: Como la derivada parcial de H con respecto a w es mayor en magnitud que la parcial con respecto a t cuando $t = 0$ y $w = 4$, un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s tendrá un mayor efecto sobre H.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

La fabricación de un producto depende de muchos factores de producción. Entre éstos se encuentran la mano de obra, el capital, el terreno, la maquinaria, etcétera. Por simplicidad, se supondrá que la producción sólo depende del trabajo y del capital. Si la función $P = f(l, k)$ proporciona la producción P cuando el productor emplea l unidades de trabajo y k unidades de capital, entonces esta función se llama **función de producción**. Se define la **productividad marginal con respecto a** l como $\partial P/\partial l$. Ésta es la razón de cambio de P con respecto a l cuando k se mantiene fija. Asimismo, la **productividad marginal con respecto a** k es $\partial P/\partial k$ y es la razón de cambio de P con respecto a k cuando l se mantiene fija.

EJEMPLO 3 Productividad marginal

Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$, donde l es el número de horas de trabajo por semana y k es el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de P gruesas del juguete {una gruesa son 144 *unidades}. Determine las funciones de productividad marginal y evalúelas cuando $l = 400$ y $k = 16$. Interprete los resultados.*

Solución: Como $P = (lk)^{1/2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}k = \frac{k}{2\sqrt{lk}}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}l = \frac{l}{2\sqrt{lk}}$$

Si se evalúan estas ecuaciones cuando $l = 400$ y $k = 16$, se obtiene

$$\left.\frac{\partial P}{\partial l}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{16}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{1}{10}$$

y

$$\left.\frac{\partial P}{\partial k}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{400}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{5}{2}$$

Así, si $l = 400$ y $k = 16$, al incrementar l a 401 y mantener k en 16, aumentará la producción en aproximadamente $\frac{1}{10}$ de gruesa. Pero si k se incrementa a 17 y l se mantiene en 400, la producción aumenta en alrededor de $\frac{5}{2}$ gruesas.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Productos competitivos y complementarios

Algunas veces dos productos pueden estar relacionados de modo que los cambios en el precio de uno afecten la demanda del otro. Un ejemplo representativo es el caso de la mantequilla y la margarina. Si tal relación existe entre los productos A y B, la demanda de cada producto depende del precio de ambos. Suponga que q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, respectivamente, y que p_A y p_B son sus respectivos precios. Entonces q_A y q_B son funciones de p_A y p_B:

$$q_A = f(p_A, p_B) \qquad \text{función de demanda para A}$$
$$q_B = g(p_A, p_B) \qquad \text{función de demanda para B}$$

Se pueden encontrar cuatro derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} \ \textit{la demanda marginal para A con respecto a } p_A$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} \ \textit{la demanda marginal para A con respecto a } p_B$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} \ \textit{la demanda marginal para B con respecto a } p_A$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} \ \textit{la demanda marginal para B con respecto a } p_B$$

Bajo condiciones típicas, si el precio de B está fijo y el de A aumenta, la cantidad demandada de A disminuirá. Así, $\partial q_A/\partial p_A < 0$. De manera similar, $\partial q_B/\partial p_B < 0$. Sin embargo, $\partial q_A/\partial p_B$ y $\partial q_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas. Si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0$$

entonces se dice que A y B son **productos competitivos** o **sustitutos**. En esta situación, un incremento en el precio de B ocasiona un incremento en la demanda de A, si se supone que el precio de A no cambia. En forma similar, un incremento en el precio de A ocasiona un incremento en la demanda de B cuando el precio de B se mantiene fijo. La mantequilla y la margarina son ejemplos de sustitutos.

Ahora se considerará una situación diferente, se dice que si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0$$

entonces A y B son **productos complementarios**. En este caso, un incremento en el precio de B ocasiona una disminución en la demanda de A, si el precio de A no cambia. De manera similar, un incremento en el precio de A causa una disminución en la demanda de B, cuando el precio de B se mantiene fijo. Por ejemplo, los automóviles y la gasolina son productos complementarios. Un incremento en el precio de la gasolina hará más caro el conducir un automóvil. Por consiguiente, la demanda de automóviles disminuirá. Y un incremento en el precio de los automóviles reducirá la demanda de gasolina.

EJEMPLO 4 Determinación de los productos que son competitivos y los que son complementarios

Las funciones de demanda para los productos A *y* B *son cada una función de los precios de* A *y* B *y están dadas por*

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \quad y \quad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}}$$

respectivamente. Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal y determine si A *y* B *son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.*

Solución: Si se escribe $q_A = 50p_A^{-1/2}p_B^{1/3}$ y $q_B = 75p_A p_B^{-2/3}$, se tiene

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = 50\left(-\frac{1}{2}\right)p_A^{-3/2}p_B^{1/3} = -25p_A^{-3/2}p_B^{1/3}$$
$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 50p_A^{-1/2}\left(\frac{1}{3}\right)p_B^{-2/3} = \frac{50}{3}p_A^{-1/2}p_B^{-2/3}$$
$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 75(1)p_B^{-2/3} = 75p_B^{-2/3}$$
$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = 75p_A\left(-\frac{2}{3}\right)p_B^{-5/3} = -50p_A p_B^{-5/3}$$

Como p_A y p_B representan precios, ambas son positivas. Por lo tanto, $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$. Se concluye que A y B son productos competitivos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Problemas 17.3

Para las funciones de costos conjuntos de los problemas 1 a 3, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

*1. $c = 7x + 0.3y^2 + 2y + 900$; $\frac{\partial c}{\partial y}$, $x = 20$, $y = 30$

2. $c = x\sqrt{x+y} + 5000$; $\frac{\partial c}{\partial x}$, $x = 40$, $y = 60$

3. $c = 0.03(x+y)^3 - 0.6(x+y)^2 + 9.5(x+y) + 7700$; $\frac{\partial c}{\partial x}$, $x = 50$, $y = 80$

Para las funciones de producción de los problemas 4 y 5, encuentre las funciones de producción marginal $\partial P/\partial k$ y $\partial P/\partial l$.

4. $P = 15lk - 3l^2 + 5k^2 + 500$

*5. $P = 2.314l^{0.357}k^{0.643}$

6. **Función de producción de Cobb-Douglas** En economía, una función de producción de Cobb-Douglas tiene la forma $P = Al^{\alpha}k^{\beta}$, donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para tal función, demuestre que
   (a) $\partial P/\partial l = \alpha P/l$
   (b) $\partial P/\partial k = \beta P/k$
   (c) $l\frac{\partial P}{\partial l} + k\frac{\partial P}{\partial k} = P$. Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.

En los problemas 7 a 9, q_A y q_B son funciones de demanda para los productos A y B, *respectivamente. En cada caso encuentre $\partial q_A/\partial p_A$, $\partial q_A/\partial p_B$, $\partial q_B/\partial p_A$, $\partial q_B/\partial p_B$ y determine si* A y B *son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.*

7. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$

8. $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$

9. $q_A = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

10. **Manufactura canadiense** La función de producción para las industrias manufactureras canadienses en 1927 se estimó como[8] $P = 33.0l^{0.46}k^{0.52}$, donde P es la producción, l es el trabajo y k el capital. Determine las productividades marginales para la mano de obra y el capital, y evalúela cuando $l = 1$ y $k = 1$.

11. **Granja lechera** Una estimación de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por[9]

$$P = A^{0.27}B^{0.01}C^{0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$$

donde P es la producción, A el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.

12. **Función de producción** Suponga que una función de producción está dada por $P = \frac{kl}{2k + 3l}$.
   (a) Determine las funciones de productividad marginal.
   (b) Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es 1/5.

*13. **Compensación a MAE** En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de empresas (MAE), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etcétera) la compensación anual actual (en dólares) estaba dada por

$$z = 43{,}960 + 4480x + 3492y$$

donde x y y son el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de MAE, respectivamente.[10] Encuentre $\partial z/\partial x$ e interprete su resultado.

[8]P. Daly y P. Douglas, "The Production Function for Canadian Manufactures", *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943), 178-186.

[9]G. Tintner y O. H. Brownlee, "Production Functions Derived from Farm Records," *American Journal of Agricultural Economics,* 26 (1944), 566-571.

[10]Adaptado de A. G. Weinstein y V. Srinivasen, "Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates", *Journal of Aplied Psychology*, 59, núm. 2 (1974), 207-212.

14. Estatus Se cree que el estatus general S_g de una persona es una función atribuible a la educación S_e y al ingreso S_i, donde S_g, S_e y S_i se representan en forma numérica. Si

$$S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i}$$

determine $\partial S_g/\partial S_e$ y $\partial S_g/\partial S_i$ cuando $S_e = 125$ y $S_i = 100$, e interprete sus resultados.[11]

15. Facilidad de lectura En ocasiones se desea evaluar el grado de legibilidad de un documento escrito. Rudolf Flesch[12] desarrolló una función de dos variables que hace esto, a saber,

$$R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s)$$

donde a R se le llama *calificación de facilidad de lectura*, w es el número promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras, y s es el número promedio de sílabas en tales muestras. Flesch afirma que un artículo para el cual $R = 0$, es "prácticamente ilegible", pero que uno con $R = 100$ es "fácil para cualquier persona que sepa leer", (a) Encuentre $\partial R/\partial w$ y $\partial R/\partial s$. (b) ¿Qué es "más fácil" de leer: un artículo para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$, u otro para el cual $w = w_0 + 1$ y $s = s_0$?

16. Modelo para voz El estudio de las frecuencias de las vibraciones de un alambre tenso es útil al considerar la voz de un individuo. Suponga

$$\omega = \frac{1}{bL}\sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}}$$

donde ω (letra griega "omega") es la frecuencia, b el diámetro, L la longitud, ρ (letra griega "ro") la densidad y τ (letra griega "tau") es la tensión.[13] Encuentre $\partial\omega/\partial b$, $\partial\omega/\partial L$, $\partial\omega/\partial\rho$ y $\partial\omega/\partial\tau$.

17. Flujo de tráfico Considere la siguiente situación de tráfico. En una autopista con dos carriles en cada dirección, un vehículo de mantenimiento bloquea el carril izquierdo (vea la figura 17.11). En el carril derecho hay dos vehículos (*anterior* y *posterior*), están con cierta distancia entre ellos. El vehículo *sujeto* puede escoger llenar o no el espacio entre los vehículos anterior y posterior. Esa decisión puede basarse no sólo en la distancia x mostrada en el diagrama, sino en otros factores (como la velocidad del vehículo *anterior*). En el análisis de tal decisión, se ha usado un *índice de espacio*, g.[14,15] Entre mayor es el valor de g, mayor es la propensión del vehículo sujeto a ocupar el espacio. Suponga que

$$g = \frac{x}{V_F} - \left(0.75 + \frac{V_F - V_S}{19.2}\right)$$

donde x (en pies) es el espacio, V_F la velocidad del vehículo *anterior* (en pies por segundo) y V_S la velocidad del vehículo sujeto (en pies por segundo). Del diagrama parece razonable suponer que si V_F, y V_S están fijas y x crece, entonces g también debería crecer. Demuestre que esto es cierto: aplique cálculo a la función g. Suponga que x, V_F y V_S son positivas.

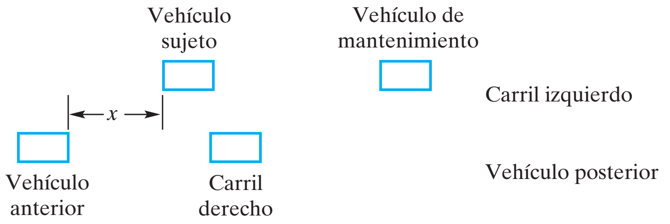

FIGURA 17.11 Diagrama para el problema 17.

18. Demanda Suponga que las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B son

$$q_A = e^{-(p_A + p_B)} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{16}{p_A^2 p_B^2}$$

donde q_A y q_B son los números de unidades demandadas de A y B cuando los precios unitarios (en miles de dólares) son p_A y p_B, respectivamente.

(a) Clasifique A y B como competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

(b) Si los precios unitarios de A y B son \$1000 y \$2000, respectivamente, estime el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye \$20 y el precio de A se mantiene constante.

***19. Demanda** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \quad \text{y} \quad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

(a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.

(b) Si p_B se reduce de 14 a 16, con p_A fijo en 9, use el inciso (a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

20. Función de costos conjuntos La función de costos conjuntos para producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600$$

donde c está en dólares.

(a) Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a q_A, y q_B.

(b) Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_A cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$. Redondee su respuesta a dos decimales.

---

[11]Adaptado de R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

[12]R. Flesch, *The Art of Readable Writing* (Nueva York: Harper & Row Publishers, Inc., 1949).

[13]R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

[14]P. M. Hurst, K. Perchonok y E. L. Seguin. "Vehicle Kinematics and Gap Acceptance" *Journal of Applied Psycholoy*, 52, núm. 4 (1968), 321-324.

[15]K. Perchonok y P. M. Hurst, "Effect of Lane-Closure Signals upon Driver Decision Making and Traffic Flow," *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 5 (1968), 410-413.

(c) Use su respuesta al inciso (a) para estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8 unidades.

21. Elecciones Para las elecciones al congreso de 1974, el porcentaje republicano R del voto republicano-democrático en un distrito está dado (aproximadamente) por[16]

$$\begin{aligned} R &= f(E_r, E_d, I_r, I_d, N) \\ &= 15.4725 + 2.5945E_r - 0.0804E_r^2 - 2.3648E_d \\ &\quad + 0.0687E_d^2 + 2.1914I_r - 0.0912I_r^2 \\ &\quad - 0.8096I_d + 0.0081I_d^2 - 0.0277E_rI_r \\ &\quad + 0.0493E_dI_d + 0.8579N - 0.0061N^2 \end{aligned}$$

Aquí, E_r y E_d son los gastos de campaña (en unidades de \$10 000) de los republicanos y demócratas, respectivamente; I_r e I_d el número de periodos en los que han estado en el Congreso, *más uno*, para los candidatos republicano y demócrata, respectivamente, y N es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon obtuvo en el distrito en 1968. La variable N proporciona una medida de la fuerza de los republicanos en ese distrito.

(a) En la ley de 1974 de la Campaña Federal de Elecciones, el Congreso estableció un límite de \$188 000 para los gastos de campaña. Tras analizar $\partial R/\partial E_r$, ¿habría aconsejado usted a un candidato republicano con nueve periodos en el Congreso, gastar \$188 000 en su campaña?

(b) Encuentre el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon tuvo un efecto negativo sobre R; esto es, encuentre N cuando $\partial R/\partial N < 0$. Dé su respuesta al porcentaje entero más cercano.

22. Ventas Después de que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas (en miles de unidades) está dado por

$$S = \frac{AT + 450}{\sqrt{A + T^2}}$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto se introdujo por primera vez y A es la cantidad (en cientos de dólares) gastada cada mes en publicidad.

(a) Verifique que la derivada parcial del volumen de ventas con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{A^2 - 450T}{(A + T^2)^{3/2}}$$

(b) Use el resultado del inciso (a) para pronosticar el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en \$9000 por mes.

Sea f una función de demanda para el producto A y $q_A = f(p_A, p_B)$, donde q_A es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es p_A y el precio por unidad del producto B es p_B. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_A, denotada η_{p_A} se define como $\eta_{p_A} = (p_A/q_A)(\partial q_A/\partial p_A)$. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_B, denotada η_{p_B} se define como $\eta_{p_B} = (p_B/q_A)(\partial q_A/\partial p_B)$. Desde un punto de vista informal η_{p_A} es la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A con respecto a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. De manera similar, η_{p_B} puede interpretarse como la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A, a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A se mantiene fijo. En los problemas 23 a 25, encuentre η_{p_A} y η_{p_B}, para los valores dados de p_A y p_B.

23. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B;\ p_A = 2,\ p_B = 10$

24. $q_A = 60 - 3p_A - 2p_B;\ p_A = 5,\ p_B = 3$

25. $q_A = 100/(p_A\sqrt{p_B});\ p_A = 1,\ p_B = 4$

OBJETIVO

Determinar derivadas parciales de una función definida de manera implícita.

17.4 Diferenciación parcial implícita[17]

Una ecuación en x, y y z no necesariamente define a z como función de x y y. Por ejemplo, en la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (1)$$

si $x = 1$ y $y = 1$, entonces $z^2 - 1 - 1 = 0$, por lo que $z = \pm\sqrt{2}$. Así, la ecuación (1) no define a z como función de x y y. Sin embargo, tras despejar z de la ecuación (1) se obtiene

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

cada una de las cuales define a z como función de x y y. Aunque la ecuación (1) no expresa de manera explícita a z como función de x y y, puede considerarse que expresa a z *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de x y y. Observe que la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ tiene la forma $F(x, y, z) = 0$, donde F es una función de tres variables. Cualquier ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ puede considerarse que expresa a z de manera implícita como un conjunto de posibles funciones de x y y. Además, es posible encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ directamente de la forma $F(x, y, z) = 0$.

Para encontrar $\partial z/\partial x$ de

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (2)$$

[16] J. Silberman y G. Yochum, "The Role of Money in Determining Election Outcomes," *Social Science Quarterly*, 58, núm. 4 (1978), 671-682.

[17] Esta sección puede omitirse sin que se pierda la continuidad

primero se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a x y se trata a z como función de x y y, y a y como constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0$$

Debido a que y se trata como una constante, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Al despejar $\partial z/\partial x$, se obtiene

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$ se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a y, se trata a z como función de x y y, y se mantiene a x como una constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y} = 0\right)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$$

El método que se usa para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se llama *diferenciación parcial implícita*.

EJEMPLO 1 Diferenciación parcial implícita

Si $\dfrac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$, *evalúe* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *cuando* $x = -1$, $y = 2$ *y* $z = 2$.

Solución: Se tratará a z como función de x y y, y se diferenciarán ambos lados de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

Si se usa la regla del cociente para el primer término a la izquierda, se tiene

$$\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) - xz^2\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2} + 0 = 0$$

Mediante la regla del producto para $\frac{\partial}{\partial x}(xz^2)$ resulta

$$\frac{(x+y)\left[x\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z^2(1)\right] - xz^2(1)}{(x+y)^2} = 0$$

Se despeja $\partial z/\partial x$, y se obtiene

$$2xz(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2(x+y) - xz^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz^2 - z^2(x+y)}{2xz(x+y)} = -\frac{yz}{2x(x+y)} \qquad z \neq 0$$

Así,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)} = 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

EJEMPLO 2 Diferenciación parcial implícita

Si $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$, *determine* $\partial t/\partial u$.

Solución: Se considera a t como función de r, s y u. Al diferenciar ambos lados con respecto a u, mientras se mantienen constantes a r y a s, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(se^{r^2+u^2}) &= \frac{\partial}{\partial u}(u\ln(t^2+1)) \\
2sue^{r^2+u^2} &= u\frac{\partial}{\partial u}(\ln(t^2+1)) + \ln(t^2+1)\frac{\partial}{\partial u}(u) \qquad \text{(regla del producto)} \\
2sue^{r^2+u^2} &= u\frac{2t}{t^2+1}\frac{\partial t}{\partial u} + \ln(t^2+1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2+1)(2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1))}{2ut}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Problemas 17.4

En los problemas 1 a 11, encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

*1. $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 900$; $\partial z/\partial x$

2. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0$; $\partial z/\partial x$

3. $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0$; $\partial z/\partial y$

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9$; $\partial z/\partial y$

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$

6. $z^3 + 2x^2z^2 - xy = 0$; $\partial z/\partial x$

7. $e^x + e^y + e^z = 10$; $\partial z/\partial y$

8. $xyz + 3y^3x^2 - \ln z^3 = 0$; $\partial z/\partial y$

9. $\ln(z) + 9z - xy = 1$; $\partial z/\partial x$

10. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$; $\partial z/\partial x$

11. $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3+5} = 2$; $\partial z/\partial y$

En los problemas 12 a 20, evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

12. $xz + xyz - 5 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 1$, $y = 4$, $z = 1$

*13. $3xz^2 + 2yz^2 - 7x^4y = 3$; $\partial z/\partial x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

14. $e^{zx} = xyz$; $\partial z/\partial y$, $x = 1$, $y = -e^{-1}$, $z = -1$

15. $e^{yz} = -xyz$; $\partial z/\partial x$, $x = -e^2/2$, $y = 1$, $z = 2$

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0$; $\partial z/\partial y$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 6$

17. $\ln z = 4x + y$; $\partial z/\partial x$, $x = 5$, $y = -20$, $z = 1$

18. $\dfrac{2r^2s^2}{s^2+t^2} = t$; $\partial r/\partial t$, $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$

19. $\dfrac{s^2+t^2}{rs} = 10$; $\partial t/\partial r$, $r = 1$, $s = 2$, $t = 4$

20. $\ln(x + y + z) + xyz = ze^{x+y+z}$; $\partial z/\partial x$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$

21. **Función de costos conjuntos** Una función de costos conjuntos se define en forma implícita mediante la ecuación

$$c + \sqrt{c} = 12 + q_A\sqrt{9 + q_B^2}$$

donde c denota el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B.

(a) Si $q_A = 6$ y $q_B = 4$, encuentre el correspondiente al valor de c.

(b) Determine los costos marginales con respecto a q_A y q_B cuando $q_A = 6$ y $q_B = 4$.

OBJETIVO

Calcular derivadas parciales de orden superior.

17.5 Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x, y)$, entonces no sólo z es una función de x y y, también lo son f_x y f_y. Por lo que es posible diferenciar f_x y f_y, para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de f. En forma simbólica,

$$f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x \qquad f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y$$

$$f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x \qquad f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y$$

En términos de la notación ∂,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ADVERTENCIA

Para $z = f(x, y)$, $f_{xy} = \partial^2 z/\partial y \partial x$.

Observe que para encontrar f_{xy}, primero se diferencia f con respecto a x. Para $\partial^2 z/\partial x \partial y$, primero se diferencia con respecto a y.

Es posible extender la notación más allá de las derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo, $f_{xxy}(= \partial^3 z/\partial y \partial x^2)$ es una derivada parcial de tercer orden de f, esto es, la derivada parcial de $f_{xx}(= \partial^2 z/\partial x^2)$ con respecto a y. Una generalización a derivadas parciales de orden superior con funciones de más de dos variables debería ser obvia.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales de segundo orden

Encuentre las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^2y + x^2y^2$.

Solución: Como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2$$

se tiene

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy$$

También, como

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2y$$

se tiene

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2y) = 2x + 4xy$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Las derivadas f_{xy} y f_{yz} se llaman **derivadas parciales mixtas**. Observe en el ejemplo 1 que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Bajo las condiciones apropiadas, las derivadas parciales mixtas de una función son iguales; es decir, el orden de diferenciación no tiene importancia. Puede suponerse que éste es el caso para todas las funciones que se consideren.

EJEMPLO 2 Derivada parcial mixta

Encuentre el valor de $\left.\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}\right|_{(1,2,3)}$ *si* $w = (2x + 3y + 4z)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 3(2x + 3y + 4z)^2 \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z) \\
&= 6(2x + 3y + 4z)^2 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y\, ?x} &= 6 \cdot 2(2x + 3y + 4z)\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z) \\
&= 36(2x + 3y + 4z) \\
\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x} &= 36 \cdot 4 = 144
\end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}\right|_{(1,2,3)} = 144$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

EJEMPLO 3 Derivada parcial de segundo orden de una función implícita[18]

Determine $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ si $z^2 = xy$.

Solución: Por medio de la diferenciación implícita se determina primero $\partial z/\partial x$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(xy)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z} \qquad z \neq 0$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}yz^{-1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Al sustituir $y/(2z)$ por $\partial z/\partial x$, se tiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\left(\frac{y}{2z}\right) = -\frac{y^2}{4z^3} \qquad z \neq 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

Problemas 17.5

En los problemas 1 a 10, encuentre las derivadas parciales indicadas.

*1. $f(x, y) = 6xy^2$; $f_x(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$

2. $f(x, y) = 2x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy$; $f_x(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$

*3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, $f_{yyx}(x, y)$

4. $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$; $f_x(x, y)$, $f_{xy}(x, y$

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$; $f_y(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yxy}(x, y)$

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$

7. $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$; $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$

8. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$; $f_x(x, y, z)$, $f_{xz}(x, y, z)$, $f_{zx}(x, y, z)$

9. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

10. $z = \frac{\ln(x^2 + 5)}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

En los problemas 11 a 16, encuentre el valor indicado.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, encuentre $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. *Si* $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, encuentre $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 3l^3k^6 - 2l^2k^7$, encuentre $f_{klk}(2, 1)$.

14. Si $f(x, y) = 3x^3y^2 + xy - x^2y^2$, encuentre $f_{xxy}(5, 1)$ y $f_{xyx}(5, 1)$.

15. Si $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$, encuentre $f_{xyy}(1, 1)$.

16. Si $f(x, y) = x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^3$, encuentre $f_{xy}(1, -1)$.

17. **Función de costo** Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B$$

Encuentre el valor de

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q_A\,\partial q_B}$$

cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Para $f(x, y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$, demuestre que

$$f_{xyx}(x, y) = f_{xxy}(x, y)$$

19. Para $f(x, y) = 8x^3 + 2x^2y^2 + 5y^4$, demuestre que

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

[18]Omítase si no se estudió la sección 17.4.

20. Para $f(x, y) = e^{xy}$, demuestre que

$$f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y) + f_{yx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = f(x, y)((x + y)^2 + 2)$$

21. Para $z = \ln(x^2 + y^2)$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

[19]**22.** Si $3z^2 - 2x^3 - 4y^4 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

*[19]**23.** Si $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

[19]**24.** Si $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

OBJETIVO

Demostrar cómo encontrar derivadas parciales de una función de funciones mediante el uso de la regla de la cadena.

17.6 Regla de la cadena[20]

Suponga que un fabricante de dos productos relacionados A y B tiene una función de costos conjuntos dada por

$$c = f(q_A, q_B)$$

donde c es el costo total de producir las cantidades q_A y q_B de A y B, respectivamente. Además, suponga que las funciones de demanda para los productos son

$$q_A = g(p_A, p_B) \quad \text{y} \quad q_B = h(p_A, p_B)$$

donde p_A y p_B son los precios por unidad de A y B, respectivamente. Como c es una función de q_A y q_B, y puesto que éstos son a su vez funciones de p_A y p_B, entonces c puede verse como una función de p_A y p_B (resulta apropiado llamar a las variables q_A y q_B variables intermedias de c). En consecuencia, se debería tener la capacidad de determinar $\partial c/\partial p_A$, la razón de cambio del costo total con respecto al precio de A. Una manera de hacer esto es sustituir las expresiones $g(p_A, p_B)$ y $h(p_A, p_B)$ por q_A y q_B, respectivamente, en $c = f(q_A, q_B)$. Entonces c es una función de p_A y p_B y se puede diferenciar c con respecto a p_A directamente. Este procedimiento tiene algunas desventajas, especialmente cuando f, g o h están dadas por una expresión complicada. Otra manera de atacar el problema sería por medio de la regla de la cadena (en realidad, *una* regla de la cadena), que ahora se establece sin demostrarla.

Regla de la cadena

Sea $z = f(x, y)$ donde x y y son funciones de r y s dadas por $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$. Si f, x y y tienen derivadas parciales continuas, entonces z es una función de r y s, y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Observe que en la regla de la cadena, el número de variables intermedias de z (dos), es el mismo que el número de términos que componen a $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$.

Si se regresa a la situación original en lo que concierne al productor, se ve que si f, q_A y q_B tienen derivadas parciales continuas, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} + \frac{\partial c}{\partial q_B}\frac{\partial q_B}{\partial p_A}$$

EJEMPLO 1 Tasa de cambio del costo

Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total c de producir q_C cámaras y q_F rollos de película está dado por

$$c = 30q_C + 0.015q_Cq_F + q_F + 900$$

[19]Omítase si no se estudió la sección 17.4.

[20]Esta sección puede omitirse sin riesgo de perder continuidad.

Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos fotográficos están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C\sqrt{p_F}} \qquad \text{y} \qquad q_F = 2000 - p_C - 400p_F$$

donde p_C *es el precio por cámara y* p_F *el precio por rollo de película. Encuentre la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando* $p_C = 50$ *y* $p_F = 2$.

Solución: Primero se debe determinar $\partial c/\partial p_C$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_C} = \frac{\partial c}{\partial q_C}\frac{\partial q_C}{\partial p_C} + \frac{\partial c}{\partial q_F}\frac{\partial q_F}{\partial p_C}$$

$$= (30 + 0.015q_F)\left[\frac{-9000}{p_C^2\sqrt{p_F}}\right] + (0.015q_C + 1)(-1)$$

Cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$, entonces $q_C = 90\sqrt{2}$ y $q_F = 1150$. Después de sustituir esos valores en $\partial c/\partial p_C$ y simplificar, se tiene

$$\left.\frac{\partial c}{\partial p_C}\right|_{\substack{p_C=50\\ p_F=2}} \approx -123.2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

La regla de la cadena puede extenderse. Por ejemplo, suponga que $z = f(v, w, x, y)$ y que v, w, x y y son todas funciones de r, s y t. Entonces, si se suponen ciertas condiciones de continuidad, puede considerarse a z como una función de r, s y t, por lo que se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Observe que el número de variables intermedias de z (cuatro) es el mismo que el número de términos que forman a $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

Ahora considere la situación en la que $z = f(x, y)$ tal que $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Use los símbolos de las derivadas parciales y los símbolos de la derivada ordinaria en forma apropiada.

Aquí se usa el símbolo dz/dt en vez de $\partial z/\partial t$, puesto que z puede considerarse como una función de *una* sola variable t. Asimismo, los símbolos dx/dt y dy/dt se usan en vez de $\partial x/\partial t$ y $\partial y/\partial t$. Como es común, el número de términos que componen dz/dt es igual al número de variables intermedias de z. Existen otras situaciones que se tratarán de manera similar.

EJEMPLO 2 Regla de la cadena

a. *Si* $w = f(x, y, z) = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$, *donde*

$$x = 2r - 3s \qquad y = 6r + s \qquad z = r - s$$

determine $\partial w/\partial r$ *y* $\partial w/\partial s$.

Solución: Como x, y y z, son funciones de r y s, entonces por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2z^2)(1)$$

$$= x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz)$$

También,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2z^2)(-1)\\ &= x(3x - 19y + z) - yz(3 + 8z^2 - 12yz)\end{aligned}$$

b. *Si* $z = \dfrac{x + e^y}{y}$, *donde* $x = rs + se^{rt}$ *y* $y = 9 + rt$, *evalúe* $\partial z/\partial s$ *cuando* $r = -2, s = 5$ y $t = 4$.

Solución: Como x y y son funciones de r, s y t (note que es posible escribir $y = 9 + rt + 0 \cdot s$), por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= \left(\frac{1}{y}\right)(r + e^{rt}) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(0) = \frac{r + e^{rt}}{y}\end{aligned}$$

Si $r = -2, s = 5$ y $t = 4$, entonces $y = 1$. Así,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{\substack{r=-2\\ s=5\\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

a. *Determine* $\partial y/\partial r$ *si* $y = x^2\ln(x^4 + 6)$ *y* $x = (r + 3s)^6$.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}\\ &= \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot \ln(x^4 + 6)\right][6(r + 3s)^5]\\ &= 12x(r + 3s)^5\left[\frac{2x^4}{x^4 + 6} + \ln(x^4 + 6)\right]\end{aligned}$$

b. *Dado que* $z = e^{xy}$, $x = r - 4s$ *y* $y = r - s$, *encuentre* $\partial z/\partial r$ *en términos de* r *y* s.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1)\\ &= (x + y)e^{xy}\end{aligned}$$

Como $x = r - 4s$ y $y = r - s$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= [(r - 4s) + (r - s)]e^{(r-4s)(r-s)}\\ &= (2r - 5s)e^{r^2 - 5rs + 4s^2}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

Problemas 17.6

En los problemas 1 a 12, encuentre las derivadas indicadas mediante la regla de la cadena.

*1. $z = 5x + 3y$, $x = 2r + 3s$, $y = r - 2s$; $\partial z/\partial r, \partial z/\partial s$

2. $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2$, $x = r^2 - s^2$, $y = r^2 + s^2$; $\partial z/\partial r, \partial z/\partial s$

3. $z = e^{x+y}$, $x = t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$; dz/dt

4. $z = \sqrt{8x + y}$, $x = t^2 + 3t + 4$, $y = t^3 + 4$; dz/dt

5. $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$, $x = 5t$,
$y = 2t + 3$, $z = 6 - t$; $\quad dw/dt$

6. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$,
$x = 2 - 3t$, $y = t^2 + 3$, $z = 4 - t$; $\quad dw/dt$

7. $z = (x^2 + xy^2)^3$, $x = r + s + t$,
$y = 2r - 3s + 8t$; $\quad \partial z/\partial t$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r^2 + s - t$,
$y = r - s + t$; $\quad \partial z/\partial r$

9. $w = x^2 + xyz + z^2$, $x = r^2 - s^2$,
$y = rs$, $z = r^2 + s^2$; $\quad \partial w/\partial s$

10. $w = e^{xyz}$, $x = r^2s^3$, $y = \ln(r - s)$, $z = \sqrt{rs^2}$; $\quad \partial w/\partial r$

11. $y = x^2 - 7x + 5$, $x = 19rs + 2s^2t^2$; $\quad \partial y/\partial r$

12. $y = 4 - x^2$, $x = 2r + 3s - 4t$; $\quad \partial y/\partial t$

***13.** Si $z = (4x + 3y)^3$, donde $x = r^2s$ y $y = r - 2s$, evalúe $\partial z/\partial r$ cuando $r = 0$ y $s = 1$.

14. Si $z = \sqrt{2x + 3y}$, donde $x = 3t + 5$ y $y = t^2 - 2t + 1$, evalúe dz/dt cuando $t = 1$.

***15.** Si $w = e^{2x+3y}(x^2 + 4z^2)$, donde $x = rs$, $y = 2s - 3r$ y $z = r + s$, evalúe $\partial w/\partial s$ cuando $r = 1$ y $s = 0$.

16. Si $y = x/(x - 5)$, donde $x = 2t^2 - 3rs — r^2t$, evalúe $\partial y/\partial t$ cuando $r = 0$, $s = 2$ y $t = -1$.

17. Función de costo Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A, y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B$$

Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial c}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial c}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Suponga que $w = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$.

(a) Establezca una regla de la cadena que proporcione dw/dt.

(b) Suponga que $h(t) = t$, de modo que $w = f(x, t)$, donde $x = g(t)$. Use el inciso (a) para encontrar dw/dt y simplifique su respuesta.

19. **(a)** Suponga que w es una función de x y y y que a su vez x y y son funciones de s y t. Establezca una regla de la cadena que exprese $\partial w/\partial t$ en términos de las derivadas de estas funciones.

(b) Sea $w = 2x^2\ln|3x - 5y|$, donde $x = s\sqrt{t^2 + 2}$ y $y = t - 3e^{2-s}$. Use el inciso (a) para evaluar $\partial w/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 0$.

20. Función de producción Al considerar una función de producción $P = f(l, k)$, donde l es el trabajo y k el capital inicial, Fon, Boulier y Goldfarb[21] suponen que $l = Lg(h)$, donde L es el número de trabajadores, h es el número de horas por día por trabajador y $g(h)$ una función de la eficiencia del trabajo. Al maximizar la ganancia p dada por

$$p = aP - whL$$

donde a es el precio por unidad de producción y w es el salario por hora por trabajador, Fon, Boulier y Goldfarb determinan $\partial p/\partial L$ y $\partial p/\partial h$. Suponga que k es independiente de L y h, y determine estas derivadas parciales.