6.2 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

- **Usar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial simple.**
- **Usar funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento en problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales

En la sección anterior se aprendió a analizar de manera visual las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante los campos de pendientes, y la solución aproximada de forma numérica mediante el método de Euler. Analíticamente, se aprendió a resolver sólo dos tipos de ecuaciones diferenciales, las de las formas $y' = f(x)$ y $y'' = f(x)$. En esta sección, se aprenderá a resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales. La estrategia es reescribir la ecuación de manera tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación. La estrategia se denomina *separación de variables*. (Se estudiará esa estrategia más a detalle en la sección 6.3.)

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x}{y}$$ Escribir la ecuación original.

$$yy' = 2x$$ Multiplicar ambos miembros por y.

$$\int yy'\,dx = \int 2x\,dx$$ Integrar con respecto a x.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$ $dy = y'dx$.

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$ Aplicar la regla de la potencia.

$$y^2 - 2x^2 = C$$ Reescribir, sea $C = 2C_1$.

Así, la solución general está dada por $y^2 - 2x^2 = C$.

AYUDA DE ESTUDIO Se puede usar derivación implícita para verificar la solución en el ejemplo 1.

EXPLORACIÓN

En el ejemplo 1, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y^2 - 2x^2 = C.$$

Usar una herramienta de graficación para graficar varias soluciones particulares, éstas se dan por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir las soluciones gráficamente. ¿Es verdadero o falso el enunciado de cada solución?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es igual a dos veces la razón de x y y.

Explicar el razonamiento. ¿Están todas las curvas para las cuales este enunciado es verdadero representadas por la solución general?

Cuando se integran ambos miembros de la ecuación en el ejemplo 1, no se necesita agregar una constante de integración a ambos miembros de la ecuación. Si se hace, se obtendrá el mismo resultado que en el ejemplo 1.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

En la práctica, más personas prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales cuando se aplica separación de variables. La solución del ejemplo 1 se muestra abajo por medio de esta notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$
$$y\,dy = 2x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$
$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es una función del tiempo t, la proporción se puede escribir como se muestra.

Razón de cambio de y — es — proporcional a y.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1 MODELO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

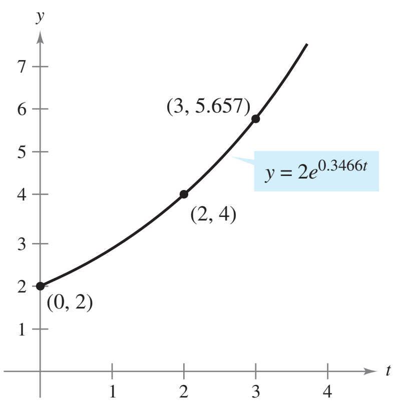
$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$.

Demostración

$y' = ky$	Escribir la ecuación original.
$\dfrac{y'}{y} = k$	Separar variables.
$\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t.
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$.
$\ln y = kt + C_1$	Encontrar la antiderivada de cada miembro.
$y = e^{kt}e^{C_1}$	Despejar y.
$y = Ce^{kt}$	Sea $C = e^{C_1}$.

Así, todas las soluciones de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$. Diferenciar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y verificar que $y' = ky$.



Si la razón de cambio de y es proporcional a y, entonces y sigue un modelo exponencial

Figura 6.8

EJEMPLO 2 Uso de un modelo de crecimiento exponencial

La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución Dado que $y' = ky$, se sabe que y y t se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$. Al aplicar las condiciones iniciales se encuentran los valores de las constantes C y k.

$2 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = 2$		Cuando $t = 0$, $y = 2$.
$4 = 2e^{2k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$		Cuando $t = 2$, $y = 4$.

Así, el modelo es $y \approx 2e^{0.3466t}$. Cuando $t = 3$, el valor de y es $2e^{0.3466(3)} \approx 5.657$. (Ver la figura 6.8.)

AYUDA DE ESTUDIO Mediante propiedades logarítmicas, notar que el valor de k en el ejemplo 2 puede también escribirse como $\ln\left(\sqrt{2}\right)$. Así, el modelo se convierte en $y = 2e^{(\ln\sqrt{2})t}$, el cual se puede reescribir como $y = 2\left(\sqrt{2}\right)^t$.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación tiene funciones para ajustar curvas que se pueden usar para encontrar modelos que representen los datos. Usar la función de *regresión exponencial* y la información del ejemplo 2 para encontrar un modelo para los datos. ¿Cómo se podría comparar el modelo obtenido con el modelo dado?

El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la *vida media* que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. La tasa de desintegración es proporcional a la cantidad presente. Las vidas medias de algunos isótopos radiactivos comunes muestran:

Uranio (^{238}U)	4 470 000 000 años
Plutonio (^{239}Pu)	24 100 años
Carbono (^{14}C)	5 715 años
Radio (^{226}Ra)	1 599 años
Einstenio (^{254}Es)	276 años
Nobelio (^{257}No)	25 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

Suponer que 10 gramos del isótopo ^{239}Pu se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?

Solución Considerar que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Dado que la tasa de desintegración es proporcional a y, se sabe que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Para encontrar los valores de las constantes C y k, aplicar las condiciones iniciales. Con base en que $y = 10$ cuando $t = 0$, se puede escribir

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^0$$

lo cual implica que $C = 10$. Luego, con base en el hecho de que la vida media de ^{239}Pu es de 24 100 años se puede tener $y = 10/2 = 5$ cuando $t = 24\,100$, se puede escribir

$$\begin{aligned} 5 &= 10e^{k(24\,100)} \\ \frac{1}{2} &= e^{24\,100k} \\ \frac{1}{24\,100}\ln\frac{1}{2} &= k \\ -0.000028761 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, el modelo es

$$y = 10e^{-0.000028761t}. \qquad \text{Modelo de vida media.}$$

Para encontrar el tiempo en que 10 gramos decrecen a 1 gramo, se puede despejar para t en la ecuación

$$1 = 10e^{-0.000028761t}.$$

La solución es aproximadamente 80 059 años.

NOTA El modelo de decrecimiento exponencial en el ejemplo 3 se pudo escribir como $y = 10(\frac{1}{2})^{t/24\,100}$. Este modelo es más fácil de derivar, pero para algunas aplicaciones no es conveniente usarlo.

Del ejemplo 3, notar que en un crecimiento o decrecimiento exponencial es fácil obtener el valor de C cuando se da el valor de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para resolver C y k cuando no se conoce el valor de y en $t = 0$.

EJEMPLO 4 Crecimiento de población

Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Solución Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento t, donde t se mide en días. Notar que y es continua donde el número de moscas es discreto. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$, se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \qquad \text{y} \qquad 300 = Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} 300 &= 100e^{-2k}e^{4k} \\ 300 &= 100e^{2k} \\ \ln 3 &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln 3 &= k \\ 0.5493 &\approx k \end{aligned}$$

Así, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = Ce^{0.5493t}.$$

Para resolver C, reaplicar la condición $y = 100$ cuando $t = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{0.5493(2)} \\ C &= 100e^{-1.0986} \approx 33. \end{aligned}$$

Así, la población original (cuando $t = 0$) consistía en aproximadamente $y = C = 33$ moscas, como se muestra en la figura 6.9.

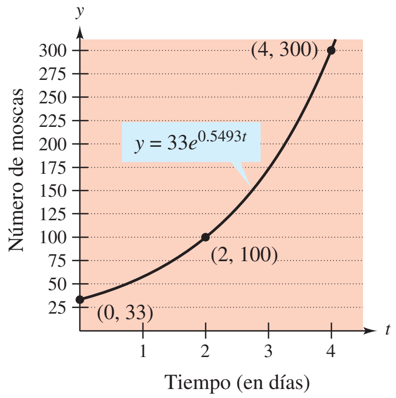


Figura 6.9

EJEMPLO 5 Ventas decrecientes

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100 000 unidades por mes a 80 000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿qué unidades habrá después de los siguientes dos meses?

Solución Usar el modelo de decrecimiento exponencial $y = Ce^{kt}$, donde t se mide en meses. De la condición inicial ($t = 0$), se sabe que $C = 100\,000$. Además, dado que $y = 80\,000$ cuando $t = 4$, se tiene

$$\begin{aligned} 80\,000 &= 100\,000e^{4k} \\ 0.8 &= e^{4k} \\ \ln(0.8) &= 4k \\ -0.0558 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, después de 2 meses más ($t = 6$), se puede especular que la tasa de ventas mensuales será

$$\begin{aligned} y &\approx 100\,000e^{-0.0558(6)} \\ &\approx 71\,500 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

Ver la figura 6.10.

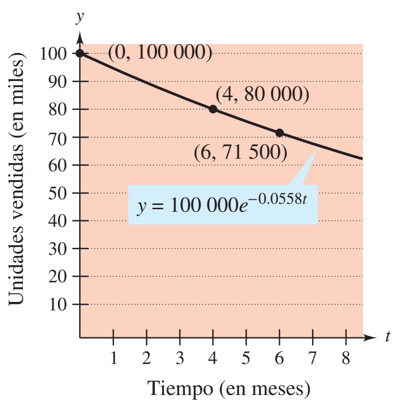


Figura 6.10

En los ejemplos 2 al 5, en realidad no se tuvo que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky.$$

(Esto se hizo una vez en la prueba del teorema 6.1.) El siguiente ejemplo ilustra un problema cuya solución involucra la técnica de separación de variables. El ejemplo concierne a la **ley de enfriamiento de Newton**, la cual establece que la razón de cambio en la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio circundante.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?

Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que la razón de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60. Esto se puede escribir como

$$y' = k(y - 60), \qquad 80 \le y \le 100.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, usar la separación de variables, como se muestra.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\, dt \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\, dy = \int k\, dt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\ln|y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada o primitiva de cada miembro.}$$

Dado que $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, se pueden omitir los signos del valor absoluto. Mediante notación exponencial, se tiene

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \quad \Rightarrow \quad y = 60 + Ce^{kt}. \qquad C = e^{C_1}$$

Mediante $y = 100$ cuando $t = 0$, se obtiene $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Dado que $y = 90$ cuando $t = 10$,

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}$$
$$30 = 40e^{10k}$$
$$k = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{3}{4} \approx -0.02877.$$

Así, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0.02877t} \qquad \text{Modelo de enfriamiento.}$$

y finalmente, cuando $y = 80$, se obtiene

$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$
$$20 = 40e^{-0.02877t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$
$$\ln\tfrac{1}{2} = -0.02877t$$
$$t \approx 24.09 \text{ minutos.}$$

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80° (ver la figura 6.11).

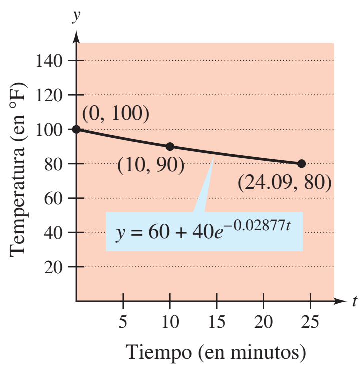


Figura 6.11

6.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, resolver la ecuación diferencial.

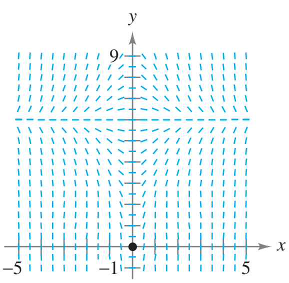
1. $\dfrac{dy}{dx} = x + 3$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - x$
3. $\dfrac{dy}{dx} = y + 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - y$
5. $y' = \dfrac{5x}{y}$
6. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{7y}$
7. $y' = \sqrt{x}\, y$
8. $y' = x(1 + y)$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
10. $xy + y' = 100x$

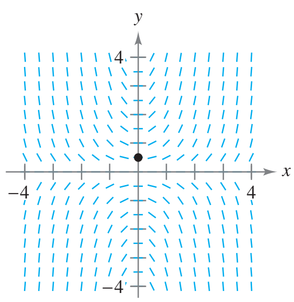
En los ejercicios 11 a 14, escribir y resolver la ecuación diferencial que modela el enunciado verbal.

11. La razón de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
12. La razón de cambio de P con respecto a t es proporcional a $25 - t$.
13. La razón de cambio de N con respecto a s es proporcional a $500 - s$.
14. La razón de cambio de y con respecto a x varía juntamente con x y $L - y$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes son dados.** ***a)*** **Trazar la gráfica de dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, uno de los cuales pasa a través del punto dado.** ***b)*** **Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con la gráfica en el apartado** ***a*****).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$
16. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$





En los ejercicios 17 a 20, encontrar la función $y = f(t)$ que pasa a través del punto (0, 10) con la primera derivada dada. Usar una herramienta de graficación para representar la solución.

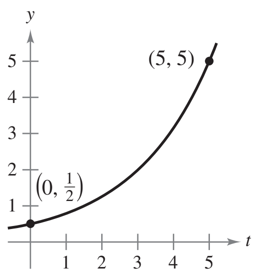
17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
18. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
19. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
20. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

En los ejercicios 21 a 24, escribir y resolver la ecuación diferencial que modele el enunciado verbal. Evaluar la solución en los valores específicos de la variable independiente.

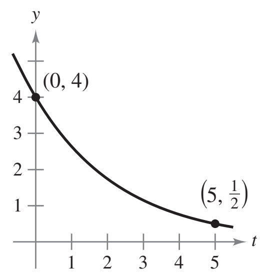
21. La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $x = 0$, $y = 6$ y cuando $x = 4$, $y = 15$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 8$?
22. La razón de cambio de N es proporcional a N. Cuando $t = 0$, $N = 250$ y cuando $t = 1$, $N = 400$. ¿Cuál es el valor de N cuando $t = 4$?
23. La razón de cambio de V es proporcional a V. Cuando $t = 0$, $V = 20\,000$, y cuando $t = 4$, $V = 12\,500$. ¿Cuál es el valor de V cuando $t = 6$?
24. La razón de cambio de P es proporcional a P. Cuando $t = 0$, $P = 5\,000$, y cuando $t = 1$, $P = 4\,750$. ¿Cuál es el valor de P cuando $t = 5$?

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pase a través de los dos puntos dados.

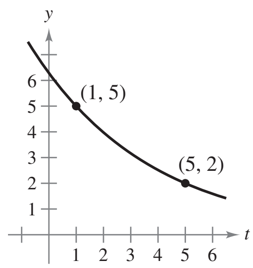
25.



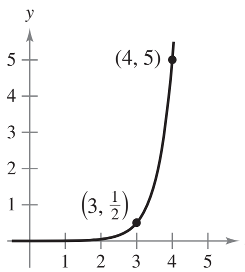
26.



27.



28.



Desarrollo de conceptos

29. Describir qué representan los valores de C y k en el modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial, $y = Ce^{kt}$.
30. Proporcionar una ecuación diferencial que modele el crecimiento y decrecimiento exponencial.

En los ejercicios 31 y 32, determinar los cuadrantes en los cuales la solución de la ecuación diferencial es una función creciente. Explicar. (No resolver la ecuación diferencial.)

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

Desintegración radiactiva **En los ejercicios 33 a 40, completar la tabla de los isótopos radiactivos.**

	Isótopo	*Semivida o vida media (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1 000 años*	*Cantidad después de 10 000 años*
33.	^{226}Ra	1 599	20 g		
34.	^{226}Ra	1 599		1.5 g	
35.	^{226}Ra	1 599			0.1 g
36.	^{14}C	5 715			3 g
37.	^{14}C	5 715	5 g		
38.	^{14}C	5 715		1.6 g	
39.	^{239}Pu	24 100		2.1 g	
40.	^{239}Pu	24 100			0.4 g

41. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida o vida media de aproximadamente 1 599 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad dada permanece después de 100 años?

42. ***La prueba del carbono 14*** La prueba del carbono 14 supone que el contenido de dióxido de carbono sobre la Tierra hoy tiene el mismo contenido radiactivo que el de hace siglos. Si esto es cierto, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe tener la misma cantidad de ^{14}C absorbida por un árbol que crece hoy. Una pieza de carbón viejo contiene sólo 15% de la cantidad de carbono de una pieza de carbón actual. ¿Hace cuánto tiempo fue quemado el árbol para formar la pieza antigua de leño? (La vida media del ^{14}C es 5 715 años.)

Interés compuesto **En los ejercicios 43 a 48, completar la tabla para una cuenta de ahorros en la que se tiene un interés continuo.**

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo para duplicar*	*Cantidad después de 10 años*
43.	\$4 000	6%		
44.	\$18 000	$5\frac{1}{2}\%$		
45.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
46.	\$12 500		5 años	
47.	\$500			\$1 292.85
48.	\$2 000			\$5 436.56

Interés compuesto **En los ejercicios 49 a 52, encontrar el capital principal P que debe invertirse a una tasa r, a un interés mensual compuesto, tal que \$1 000 000 garanticen la jubilación en t años.**

49. $r = 7\frac{1}{2}\%,\quad t = 20$

50. $r = 6\%,\quad t = 40$

51. $r = 8\%,\quad t = 35$

52. $r = 9\%,\quad t = 25$

Interés compuesto **En los ejercicios 53 a 56, encontrar el tiempo necesario para que \$1 000 se dupliquen si se invierten a una tasa de r compuesta *a*) anual, *b*) mensual, *c*) diaria y *d*) continua.**

53. $r = 7\%$

54. $r = 6\%$

55. $r = 8.5\%$

56. $r = 5.5\%$

Población **En los ejercicios 57 a 61, se dan la población (en millones) de un país en 2007 y la razón de cambio continua anual especulada k de la población. (*Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base.*)**

***a*)** **Encontrar el modelo de crecimiento exponencial $P = Ce^{kt}$ de la población con $t = 0$ correspondiente a 2000.**

***b*)** **Usar el modelo para predecir la población del país en 2015.**

***c*)** **Discutir la relación entre el signo de k y el cambio en la población para el país.**

	País	*Población de 2007*	*k*
57.	Letonia	2.3	-0.006
58.	Egipto	80.3	0.017
59.	Paraguay	6.7	0.024
60.	Hungría	10.0	-0.003
61.	Uganda	30.3	$+0.036$

Para discusión

62. *a*) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un número constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función lineal.

b) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un porcentaje constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función exponencial.

63. ***Modelo matemático*** Sea un cultivo con una cantidad inicial de cien bacterias y N el número de bacterias que se cuentan cada hora durante 5 horas. Los resultados se muestran en la tabla, donde t es el tiempo en horas.

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial para los datos.

b) Usar el modelo para estimar el tiempo requerido para que la población se cuadriplique.

64. ***Crecimiento de bacterias*** El número de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacterias en el cultivo y 350 bacterias después de 4 horas.

a) Encontrar la población inicial.

b) Escribir un modelo de crecimiento exponencial de la población bacteriana. Sea t el tiempo en horas.

c) Usar el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias será de 25 000?

65. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número N de unidades producidas por día después de que un nuevo empleado haya trabajado t días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

a) Encontrar la curva de aprendizaje de este trabajador.
b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

66. ***Curva de aprendizaje*** Si en el ejercicio 65 el gerente requiere que un nuevo empleado produzca al menos 20 unidades por día después de 30 días en el trabajo, encontrar *a*) la curva de aprendizaje que describe este requisito mínimo y *b*) los días necesarios antes de que un trabajador produzca, como mínimo, 25 unidades por día.

67. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la población P (en millones) de Estados Unidos desde 1960 hasta 2000. (*Fuente: U.S. Census Bureau*)

Año	1960	1970	1980	1990	2000
Población, P	181	205	228	250	282

a) Usar los datos de 1960 y 1970 para encontrar un modelo exponencial P_1 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
b) Usar una herramienta de graficación para representar un modelo exponencial P_2 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
c) Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y los modelos P_1 y P_2 en la misma pantalla. Comparar el dato real con las predicciones. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
d) Estimar cuándo la población será de 320 millones.

68. ***Análisis de datos*** La tabla muestra los ingresos netos y las cantidades requeridas para satisfacer la deuda nacional (fondos de garantía de los intereses adecuados por la Tesorería) de Estados Unidos desde 2001 hasta 2010. Los años de 2007 a 2010 son estimados y las cantidades monetarias se dan en miles de millones de dólares. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Ingresos	1 991.4	1 853.4	1 782.5	1 880.3	2 153.9
Intereses	359.5	332.5	318.1	321.7	352.3

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Ingresos	2 407.3	2 540.1	2 662.5	2 798.3	2 954.7
Intereses	405.9	433.0	469.9	498.0	523.2

a) Usar la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial R para los ingresos y un modelo cuártico I para la cantidad necesaria para satisfacer la deuda. Considerar t como el tiempo en años, con $t = 1$ que corresponde a 2001.
b) Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos correspondientes a los ingresos, y trazar el correspondiente modelo. Con base en el modelo, ¿cuál es la tasa de crecimiento continuo de los ingresos?
c) Usar una herramienta de graficación para representar los puntos que corresponden a la cantidad necesaria para satisfacer la deuda, y trazar el modelo cuártico.
d) Encontrar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos necesarios para satisfacer la deuda nacional. Usar una herramienta de graficación para representar esta función.

69. ***Intensidad del sonido*** El nivel del sonido β (en decibeles), con una intensidad de I es $\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es una intensidad de 10^{-16} watts por centímetro cuadrado, que corresponde a la intensidad del sonido más débil que se puede escuchar. Determinar $\beta(I)$ para
a) $I = 10^{-14}$ watts por centímetro cuadrado (susurro)
b) $I = 10^{-9}$ watts por centímetro cuadrado (esquina de calle ruidosa)
c) $I = 10^{-6.5}$ watts por centímetro cuadrado (golpe de martillo)
d) $I = 10^{-4}$ watts por centímetro cuadrado (umbral de dolor)

70. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales de aislamiento sonoro, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Usar la función exponencial del ejercicio 69 para encontrar el porcentaje de decrecimiento en el nivel de intensidad del ruido como un resultado de la instalación de esos materiales.

71. ***Silvicultura*** El valor de un terreno de árboles maderables es $V(t) = 100\,000e^{0.8\sqrt{t}}$ donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 2008. Si el dinero gana intereses continuamente de 10%, el actual valor del bosque maderero en cualquier tiempo t es $A(t) = V(t)e^{-0.10t}$. Encontrar el año en el cual el bosque se talará para maximizar la presente función valor.

72. ***Intensidad del terremoto*** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es la intensidad mínima usada como comparación. Suponer que $I_0 = 1$.
a) Encontrar la intensidad del terremoto de San Francisco en 1906 ($R = 8.3$).
b) Encontrar el factor para el cual la intensidad aumente si la medida en la escala Richter es el doble.
c) Encontrar dR/dI.

73. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1 500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1 120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

74. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un contenedor de líquido caliente se coloca en un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 a 78, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

75. En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es constante.

76. En el crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es constante.

77. Si los precios aumentan a una tasa de 0.5% mensual, entonces éstos aumentan a una tasa de 6% por año.

78. El modelo exponencial de la ecuación diferencial de crecimiento es $dy/dx = ky$, donde k es una constante.