9.4 Reglas básicas de diferenciación

Cuatro reglas básicas

El método utilizado en la sección 9.3 para calcular la derivada de una función se basa en una interpretación fiel de la definición de la derivada como el límite de un cociente. Para determinar la regla para la derivada f' de una función f, primero calcule la diferencia del cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

y después evalúe sus limites conforme h se aproxime a cero. Como tal vez habrá observado, este método es tedioso aún para las funciones relativamente sencillas.

El propósito principal de este capítulo es determinar ciertas reglas que simplificarán el proceso de calcular la derivada de una función. Se utilizará la notación

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad \text{Léase "}d, d\,x \text{ de } f \text{ de } x\text{"}$$

que significa "la derivada de f con respecto a x en x". Al señalar las reglas de diferenciación, se asume que las funciones de f y g son diferenciables.

Regla 1: La derivada de una constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad (c\text{, una constante})$$

La derivada de una función constante es igual a cero.

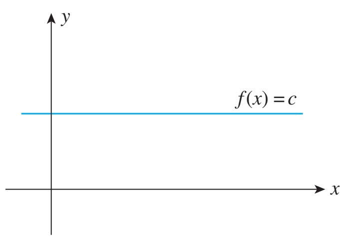

FIGURA **37**
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = c$, donde c es una constante, es cero.

Ésta se puede observar desde un punto de vista geométrico al recordar que la gráfica de una función constante es una recta paralela al eje x (figura 37). Ya que la recta tangente a una recta en cualquier punto sobre la misma coincide con la recta por sí misma, su pendiente [dada por la derivada de $f(x) = c$] debe ser cero. La definición de la derivada para comprobar este resultado puede también utilizarse al calcular

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1

a. Si $f(x) = 28$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(28) = 0$$

b. Si $f(x) = -2$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-2) = 0$$

Regla 2: La regla de potencia

Si n es un número real, entonces $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Verifique la regla de potencia para el caso especial $n = 2$. Si $f(x) = x^2$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

como se propone demostrar.

La prueba de la regla de potencia para el caso general no es sencilla de demostrar y se omitirá. Sin embargo, se le pedirá que compruebe la regla para el caso especial $n = 3$ en el ejercicio 79, página 599.

EJEMPLO 2

a. Si $f(x) = x$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

b. Si $f(x) = x^8$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^8) = 8x^7$$

c. Si $f(x) = x^{5/2}$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{5/2}) = \frac{5}{2}x^{3/2}$$

■

Para diferenciar una función cuya regla involucra una radical, primero vuelva a escribir la regla utilizando las potencias fraccionales. La expresión resultante puede ser diferenciada entonces al utilizar la regla de potencia.

EJEMPLO 3 Determine la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a. Vuelva a escribir $\sqrt{x}$ en la forma $x^{1/2}$, obtenga

(x^2) Vea la página 37.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b. Vuelva a escribir $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ en la forma $x^{-1/3}$, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{-1/3}) \\ &= -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}} \end{aligned}$$

■

Regla 3: La derivada de una constante que multiplica a una función

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (c\text{, una constante})$$

La derivada de una constante por una función diferenciable es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

Este resultado proviene de los siguientes cálculos.
Si $g(x) = cf(x)$, entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a. Si $f(x) = 5x^3$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= 5(3x^2) = 15x^2 \end{aligned}$$

b. Si $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^{-1/2}) \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{3}{2x^{3/2}} \end{aligned}$$

■

Regla 4: La regla de la suma

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

La derivada de la suma (diferencia) de dos funciones diferenciables es igual a la suma (diferencia) de sus derivadas.

Este resultado puede extenderse a la suma y diferencia de cualquier número infinito de las funciones diferenciables. Verifique la regla para la suma de dos funciones.

Si $s(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} s'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

VIDEO

EJEMPLO 5 Determine las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3$ **b.** $g(t) = \dfrac{t^2}{5} + \dfrac{5}{t^3}$

Solución

a. $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3) \\ &= \frac{d}{dx}(4x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(8x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) \\ &= 20x^4 + 12x^3 - 16x + 1 \end{aligned}$$

b. Aquí, la variable independiente es t en lugar de x, por lo que es diferenciable con respecto a t. Por tanto,

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}t^2 + 5t^{-3}\right) \qquad \text{Vuelva a escribir } \frac{1}{t^3} \text{ como } t^{-3}.$$

$$= \frac{2}{5}t - 15t^{-4} = \frac{2}{5}t - \frac{15}{t^4} \qquad \text{Vuelva a escribir } t^{-4} \text{ como } \frac{1}{t^4}.$$

$$= \frac{2t^5 - 75}{5t^4} \qquad \text{Simplifique.}$$

■

EJEMPLO 6 Determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x + 1/\sqrt{x}$ en el punto (1, 3).

Solución La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la gráfica de f está dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x + x^{-1/2}) \qquad \text{Vuelva a escribir } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ como } \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}.$$

$$= 2 - \frac{1}{2}x^{-3/2} \qquad \text{Utilice la regla de la suma.}$$

$$= 2 - \frac{1}{2x^{3/2}} \qquad \text{Vuelva a escribir } \frac{1}{2}x^{-3/2} \text{ como } \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en (1, 3) (donde $x = 1$), es

$$f'(1) = 2 - \frac{1}{2(1^{3/2})} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Utilice la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con la pendiente $\frac{3}{2}$ y el punto (1, 3), observe que una ecuación de la recta tangente es

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vea la página 75.

o, por la simplificación,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

(vea la figura 38).

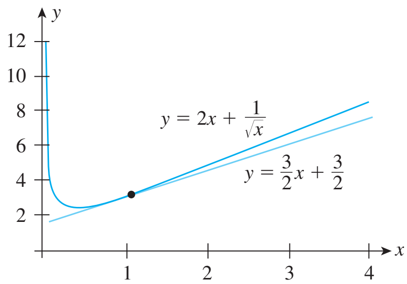

FIGURA **38**
La recta de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x + 1/\sqrt{x}$ en (1, 3).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Conservación de las especies
Un grupo de biólogos marinos del Neptune Institute of Oceanography recomienda una serie de medidas de conservación que se llevará a cabo durante la próxima década para salvar de la extinción a ciertas especies de ballenas. Después de implementar las medidas de conservación, la población de esta especie se espera que sea

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $N(t)$ denota la población al final del año t. Determine la tasa de crecimiento de la población de ballenas cuando $t = 2$ y $t = 6$. ¿Qué tan grande será la población de ballenas 8 años después de implementar las medidas de conservación?

Solución La tasa de crecimiento de la población de ballenas en cualquier momento t está dada por

$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

En particular, cuando $t = 2$ y $t = 6$, se tiene

$$\begin{aligned} N'(2) &= 9(2)^2 + 4(2) - 10 \\ &= 34 \\ N'(6) &= 9(6)^2 + 4(6) - 10 \\ &= 338 \end{aligned}$$

Así, la tasa de crecimiento en la población de ballenas será de 34 por año después de 2 años y 338 por año después de 6 años.

La población de ballenas despues de ocho años será

$$\begin{aligned} N(8) &= 3(8)^3 + 2(8)^2 - 10(8) + 600 \\ &= 2{,}184 \end{aligned}$$

La gráfica de la función N aparece en la figura 39. Observe el rápido crecimiento de la población en los últimos años, así como las medidas de conservación comienzan a dar frutos, compare con el crecimiento en los años anteriores.

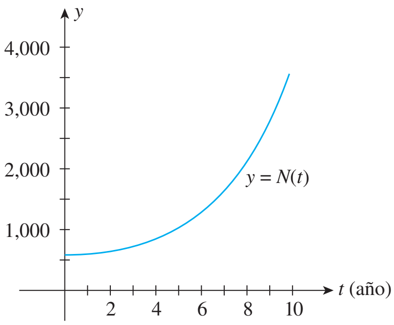

FIGURA 39
La población de ballenas después de t años está dada por $N(t)$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Altitud de un cohete La altitud de un cohete (en pies) t segundos en vuelo está dada por

$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5 \qquad (t \geq 0)$$

a. Determine una expresión v para la velocidad del cohete en cualquier momento t.
b. Calcule la velocidad del cohete cuando $t = 0$, 30, 50, 65 y 70. Interprete sus resultados.
c. Utilice los resultados, de la solución del inciso (b) y la observación que en el punto más alto dentro de su trayectoria la velocidad del cohete es cero, determine la altitud máxima alcanzada por el cohete.

Solución

a. La velocidad del cohete en cualquier momento t está dada por

$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$

b. La velocidad del cohete cuando $t = 0$, 30, 50, 65 y 70 está dada por

$$\begin{aligned}
f'(0) &= -3(0)^2 + 192(0) + 195 = 195\\
f'(30) &= -3(30)^2 + 192(30) + 195 = 3{,}255\\
f'(50) &= -3(50)^2 + 192(50) + 195 = 2{,}295\\
f'(65) &= -3(65)^2 + 192(65) + 195 = 0\\
f'(70) &= -3(70)^2 + 192(70) + 195 = -1{,}065
\end{aligned}$$

o 195, 3,255, 2,295, 0 y $-1{,}065$ pies por segundo (pies/seg).

Por tanto, el cohete tiene una velocidad inicial de 195 pies/segundo en $t = 0$ y acelera a una velocidad de 3,255 pies/segundo en $t = 30$. Cincuenta segundos dentro del vuelo, la velocidad del cohete es 2,295 pies/segundo, que es menor a la velocidad en $t = 30$. Esto significa que el cohete comienza a desacelerar después del periodo inicial de aceleración (más tarde aprenderemos cómo determinar la velocidad máxima del cohete).

La desaceleración continua: la velocidad es 0 pies/segundo en $t = 65$ y $-1{,}065$ pies/seg cuando $t = 70$. Este resultado indica que 70 minutos dentro del vuelo, el cohete se dirige a la tierra con una velocidad de 1,065 pies/seg.

c. Los resultados del inciso (b) muestran que la velocidad del cohete es cero cuando $t = 65$. En ese instante, la altitud máxima del cohete es

$$\begin{aligned}
s = f(65) &= -(65)^3 + 96(65)^2 + 195(65) + 5\\
&= 143{,}665
\end{aligned}$$

o 143,655 pies. El trazo de la gráfica de f aparece en la figura 40.

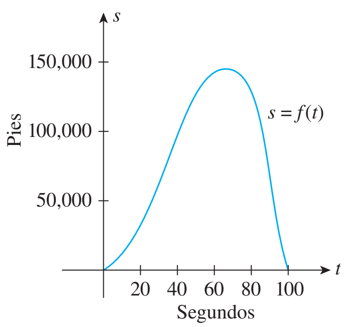

FIGURA 40
La altitud del cohete en t segundos dentro del vuelo está dada por $f(t)$.

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 8.

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función de velocidad
$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$
utilice la ventana de visualización $[0, 120] \times [-5{,}000, 5{,}000]$. Después, utilice ZOOM y TRACE, o la capacidad para localizar la raíz de su calculadora graficadora, verifique que $f'(65) = 0$.
2. Elabore la gráfica de la función de posición del cohete
$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5$$
utilice la ventana de visualización $[0, 120] \times [0, 150{,}000]$. Después utilice ZOOM y TRACE repetidamente, verifique que la altitud máxima del cohete es 143,655 pies.
3. Utilice ZOOM y TRACE, o la capacidad para localizar la raíz de su calculadora graficadora para determinar cuándo regresa el cohete a la Tierra.

9.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de cada función utilizando las reglas de diferenciación.
   a. $f(x) = 1.5x^2 + 2x^{1.5}$
   b. $g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
2. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
   a. Calcule $f'(x)$.
   b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 2$?
   c. ¿Cuál es la tasa de cambio de la función f en $x = 2$?
3. El producto interno bruto (PIB) de determinada ciudad (en millones de dólares) es descrito por la función
$$G(t) = -2t^3 + 45t^2 + 20t + 6{,}000 \qquad (0 \le t \le 11)$$
donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000.
   a. ¿A qué tasa de cambio estaba el PIB a inicios de 2005? ¿A principios de 2007? ¿A finales de 2010?
   b. ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento del PIB en el periodo 2005-2010?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.4 se encuentran en la página 599.

9.4 Preguntas de concepto

1. Exprese con sus palabras las siguientes reglas de diferenciación.
   a. La regla para diferenciar una función constante
   b. La regla de potencia
   c. La regla de una constante por una función
   d. La regla de suma
2. Si $f'(2) = 3$ y $g'(2) = -2$, determine
   a. $h'(2)$ si $h(x) = 2f(x)$
   b. $F'(2)$ si $F(x) = 3f(x) - 4g(x)$
3. Suponga que f y g son funciones diferenciables y a y b son números distintos a cero. Determine $F'(x)$ si
   a. $F(x) = af(x) + bg(x)$
   b. $F(x) = \dfrac{f(x)}{a}$

9.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-34 determine la derivada de la función *f* mediante el uso de las reglas de diferenciación.

1. $f(x) = -3$
2. $f(x) = 365$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = x^7$
5. $f(x) = x^{2.1}$
6. $f(x) = x^{0.8}$
7. $f(x) = 3x^2$
8. $f(x) = -2x^3$
9. $f(r) = \pi r^2$
10. $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
11. $f(x) = 9x^{1/3}$
12. $f(x) = \frac{5}{4}x^{4/5}$

13. $f(x) = 3\sqrt{x}$

14. $f(u) = \dfrac{2}{\sqrt{u}}$

15. $f(x) = 7x^{-12}$

16. $f(x) = 0.3x^{-1.2}$

17. $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

19. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 6$

20. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

21. $f(x) = 0.03x^2 - 0.4x + 10$

22. $f(x) = 0.002x^3 - 0.05x^2 + 0.1x - 20$

23. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x}$

25. $f(x) = 4x^4 - 3x^{5/2} + 2$

26. $f(x) = 5x^{4/3} - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + x^2 - 3x + 1$

27. $f(x) = 3x^{-1} + 4x^{-2}$

28. $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x^{-3} - x^6)$

29. $f(t) = \dfrac{4}{t^4} - \dfrac{3}{t^3} + \dfrac{2}{t}$

30. $f(x) = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 200$

31. $f(x) = 2x - 5\sqrt{x}$

32. $f(t) = 2t^2 + \sqrt{t^3}$

33. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^{1/3}}$

34. $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 1$

35. Sea $f(x) = 2x^3 - 4x$. Determine:
   a. $f'(-2)$ **b.** $f'(0)$ **c.** $f'(2)$

36. Sea $f(x) = 4x^{5/4} + 2x^{3/2} + x$. Determine:
   a. $f'(0)$ **b.** $f'(16)$

En los ejercicios 37-40 determine cada límite al evaluar la derivada de una función adecuada en un punto apropiado.

Sugerencia: Observe la definición de la derivada.

37. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^3 - 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

Sugerencia: Sea $h = x - 1$.

39. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{3(2 + h)^2 - (2 + h) - 10}{h}$

40. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - (1 + t)^2}{t(1 + t)^2}$

En los ejercicios 41-44 determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto específico.

41. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $(2, 6)$

42. $f(x) = -\dfrac{5}{3}x^2 + 2x + 2$; $\left(-1, -\dfrac{5}{3}\right)$

43. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$; $(1, 0)$

44. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\left(4, \dfrac{5}{2}\right)$

45. Sea $f(x) = x^3$.
   a. Determine el punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.
   b. Trace la gráfica de f y dibuje la recta tangente horizontal.

46. Sea $f(x) = x^3 - 4x^2$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.

47. Sea $f(x) = x^3 + 1$.
   a. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la pendiente de la recta tangente es igual a 12.
   b. Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) del inciso (a).
   c. Elabore la gráfica de f mostrando la(s) recta(s) tangente(s).

48. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 6$. Determine los valores de x por los que:
   a. $f'(x) = -12$
   b. $f'(x) = 0$
   c. $f'(x) = 12$

49. Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la pendiente de la recta tangente es igual a:
   a. $-2x$ **b.** 0 **c.** $10x$

50. Una línea recta perpendicular a y que pasa por el punto de tangencia de la recta tangente se le da el nombre de *normal* a la curva. Determine una ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ en el punto $(2, 3)$.

51. **Crecimiento de un tumor canceroso** El volumen de un tumor canceroso esférico está dado por la función

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio del tumor en centímetros. Determine la tasa de cambio en el volumen del tumor cuando

   a. $r = \dfrac{2}{3}$ cm **b.** $r = \dfrac{5}{4}$ cm

52. **Velocidad de la sangre en una arteria** la velocidad (en centímetros/segundo) de sangre r cm desde el eje central de una arteria está dada por

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

donde k es una constante y R es el radio de la arteria (vea la figura adjunta). Suponga que $k = 1{,}000$ y $R = 0.2$ cm. Determine $v(0.1)$ y $v'(0, 1)$ e interprete sus resultados.

Vaso sanguíneo

53. **VENTAS DE CÁMARAS DIGITALES** Con base en las proyecciones realizadas en 2004, los embarques mundiales de cámaras digitales de enfocar y disparar se espera crezcan de acuerdo con la regla.

$$N(t) = 16.3t^{0.8766} \qquad (1 \leq t \leq 6)$$

donde $N(t)$ está medido en millones y t en años, con $t = 1$ corresponde a 2001.

a. ¿Cuántas cámaras digitales se vendieron en 2001 ($t = 1$)?
b. ¿Qué tan rápido se incrementaron las ventas en 2001?
c. ¿Cuáles fueron las ventas proyectadas en 2005?
d. ¿Qué tan rápido crecieron las ventas proyectadas en 2005?

Fuente: International Data Corp.

54. **COMPRADORES EN LÍNEA** Conforme el uso de Internet crece, también lo hace el número de consumidores que compra en línea. Dicho número, como porcentaje de usuarios de la red, se espera que sea

$$P(t) = 53t^{0.12} \qquad (1 \leq t \leq 7)$$

donde t se mide en años, con $t = 1$ corresponde a inicios de 2002.

a. ¿Cuántos compradores en línea, como porcentaje de usuarios en la red, hubo a principios de 2007?
b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en el número de compradores en línea, como porcentaje de usuarios en la red a principios de 2007?

Fuente: Strategy Analytics

55. **HOGARES DE FAMILIAS CON HIJOS** El porcentaje de familias que fueron hogares de casados con hijos entre 1970 y 2000 es aproximadamente

$$P(t) = \frac{49.6}{t^{0.27}} \qquad (1 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en décadas, con $t = 1$ corresponde a 1970.

a. ¿Qué porcentaje de familias estuvieron casadas con hijos en 1970? ¿En 1980? ¿En 2000?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de familias casadas con hijos en 1980? ¿En 1990?

Fuente: U.S. Census Bureau

56. **EFECTO DE LA INTERRUPCIÓN DE LA VELOCIDAD PROMEDIO** Con base en datos de un estudio, la velocidad promedio de su viaje A (en millas/hora) se relaciona con el número de paradas/milla que hace en el viaje x por la ecuación

$$A = \frac{26.5}{x^{0.45}}$$

Calcule dA/dx para $x = 0.25$ y $x = 2$. ¿Cómo afecta la tasa de cambio la velocidad promedio del viaje por el número de paradas/milla?

Fuente: General Motors

57. **VIDEO ESPECTADORES EN LÍNEA** Como la Internet de banda ancha se hace más popular, los servicios de video como YouTube seguirán expandiéndose. El número de video espectadores en línea (en millones) se prevé que crezca con base en la norma

$$N(t) = 52t^{0.531} \qquad (1 \leq t \leq 10)$$

donde $t = 1$ corresponde a 2003.

a. ¿Cuál será el número proyectado de video espectadores en línea en 2010?
b. ¿Qué tan rápido cambiará el número de espectadores en línea en 2010?

Fuente: eMarketer.com

58. **FUNCIONES DE DEMANDA** Las funciones de demanda para las lámparas de escritorio Luminar está dada por

$$p = f(x) = -0.1x^2 - 0.4x + 35$$

donde x es la cantidad demandada en miles y p el precio unitario en dólares.

a. Determine $f'(x)$.
b. ¿Cuál es la tasa de cambio en el precio unitario cuando la cantidad demandada es de 10,000 unidades ($x = 10$)? ¿Cuál es el precio unitario a ese nivel de demanda?

59. **LA DISTANCIA DE FRENADO DE UN AUTOMÓVIL DE CARRERAS** Durante una prueba realizada por los editores de una revista de automóviles, la distancia de frenado s (en pies) del automóvil de carreras MacPherson X-2 conforme a la regla

$$s = f(t) = 120t - 15t^2 \qquad (t \geq 0)$$

donde t fue el tiempo (en segundos) después de aplicar los frenos.

a. Determine una expresión para la velocidad v del automóvil en cualquier momento t.
b. ¿Cuál fue la velocidad del automóvil cuando aplicó los frenos por primera vez?
c. ¿Cuál fue la distancia de frenado para esa prueba en particular?
Sugerencia: El tiempo de frenado se determina al establecer $v = 0$.

60. **CUENTAS DE MENSAJERÍA INSTANTÁNEA** La mensajería móvil instantánea (MI) es una parte pequeña del uso de MI, pero se espera crezca considerablemente. La función

$$P(t) = 0.257t^2 + 0.57t + 3.9 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

da las cuentas proyectadas del MI móvil como un porcentaje del total de las cuentas de MI empresarial desde 2006 ($t = 0$) hasta 2010 ($t = 4$).

a. ¿Qué porcentaje del total de las cuentas de MI empresarial se esperan sean cuentas móviles en 2008?
b. ¿Qué tan rápido se espera cambie este porcentaje en 2008?

Fuente: The Radical Group

61. **OBESIDAD INFANTIL** El porcentaje de niños obesos entre 12 y 19 años de edad, en Estados Unidos, ha crecido de forma sorprendente en los años recientes. Dicho porcentaje desde 1980 hasta el 2000 es aproximado por la función

$$P(t) = -0.0105t^2 + 0.735t + 5 \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1980.

a. ¿Qué porcentaje de niños fueron obesos a principios de 1980? ¿A principios de 1990? ¿A principios de 2000?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de niños obesos a principios de 1985? ¿A principios de 1990?

Fuente: Centres for Disease Control and Prevention

62. **Gasto en Medicare** Con base en los requisitos de elegibilidad actual, un estudio realizado en 2004 reveló que el gasto federal en programas de ayuda social, en particular de Medicare, crecería enormemente en el futuro. El estudio predice que el gasto en Medicare, como porcentaje del producto interno bruto (PIB), será

$$P(t) = 0.27t^2 + 1.4t + 2.2 \qquad (0 \le t \le 5)$$

por ciento en el año t, donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

a. ¿Qué tan rápido el gasto en Medicare, como porcentaje del PIB, crecerá en 2010? ¿En 2020?

b. ¿Cuál será el gasto previsto de Medicare en 2010? ¿En 2020?

Fuente: Congressional Budget Office

63. **Pesca** La población total de pez dorado de Georges Bank en Nueva Inglaterra entre 1989 y 1999 es aproximada por la función

$$f(t) = 5.303t^2 - 53.977t + 253.8 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $f(t)$ se mide en miles de toneladas métricas y t en años, con $t = 0$ que corresponde a principios de 1989.

a. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la población de pez dorado a principios de 1994? ¿A principios de 1996?

b. Las restricciones a la pesca que fueron impuestas el 7 de diciembre de 1994, ¿fueron medidas eficaces de conservación?

Fuente: New England Fishery Management Council

64. **Eficiencia de los trabajadores** Un estudio de eficiencia realizado por Electra Electronics reveló que el número promedio de walkie-talkies Space Commanders ensamblados por trabajador en t horas después de iniciar su jornada laboral a las 8 a.m. está dado por

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$$

a. Determine la tasa promedio en la que el trabajador ensamblará los walkie-talkies en t horas después de empezar a trabajar.

b. ¿A qué tasa promedio el trabajador ensamblará walkie-talkies a las 10 a.m.? ¿A 11 a.m.?

c. ¿Cuántos walkie-talkies promedio ensamblará el trabajador entre 10 y 11 a.m.?

65. **Índice de precios al consumidor** El índice de precios al consumidor (IPC) de una economía es descrito por la función

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $t = 0$ corresponde a 1998.

a. ¿A qué tasa cambió el (IPC) en 2003? ¿En 2005? ¿En 2008?

b. ¿Cuál fue la tasa de incremento promedio del IPC durante el periodo de 2003 a 2008?

66. **Efecto de publicidad en las ventas** La relación entre la cantidad de dinero x que Cannon Precision Instruments gasta en publicidad y las ventas totales de la empresa $S(x)$ está dada por la función

$$S(x) = -0.002x^3 + 0.6x^2 + x + 500 \qquad (0 \le x \le 200)$$

donde x se mide en miles de dólares. Determine la tasa de cambio de las ventas con respecto a la cantidad de dinero gastado en publicidad. ¿Las ventas totales de Cannon están aumentando a una tasa más rápida cuando la cantidad de dinero gastado en publicidad (a) \$100,000 o (b) \$150,000?

67. **Funciones de oferta** La función de oferta de cierta marca de radio satelital está dada por

$$p = f(x) = 0.0001x^{5/4} + 10$$

donde x es la cantidad ofrecida y p es el precio unitario en dólares.

a. Determine $f'(x)$.

b. ¿Cuál es la tasa de cambio del precio unitario si la cantidad ofrecida es de 10,000 radios satelitales?

68. **Crecimiento de la población** Un estudio preparado por la Cámara de Comercio de la ciudad de Sunbelt prevé que la población de la ciudad en los próximos 3 años crecerá según la norma

$$P(t) = 50{,}000 + 30t^{3/2} + 20t$$

donde $P(t)$ denota la población en t meses a partir de hoy. ¿Qué tan rápido aumentará la población en 9 y 16 meses a partir de ahora?

69. **Velocidad promedio de un automóvil en una autopista** La velocidad promedio de un automóvil en un tramo de la autopista 134 entre las 6 y 10 a.m. en un día normal es aproximada por la función

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde $f(t)$ es medida en mph y t es medida en horas, con $t = 0$ corresponde a las 6 a.m.

a. Calcule $f'(t)$.

b. ¿Cuál es la velocidad promedio de un vehículo en ese tramo de la ruta 134 a las 6 a.m.? ¿A las 7 a.m.? ¿A las 8 a.m.?

c. ¿Qué tan rápido es el cambio de velocidad de un automóvil en ese tramo de la autopista 134 a las 6:30 a.m.? ¿A las 7 a.m.? ¿A las 8 a.m.?

70. **Contención del crecimiento poblacional** Hace cinco años, el gobierno de un estado de las islas del Pacífico lanzó una extensa campaña de propaganda para contener el crecimiento de la población del país. Según el Departamento del Censo, la población (medida en miles de personas) para los siguientes 4 años era de

$$P(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 64t + 3{,}000$$

donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al inicio de la campaña. Determine la tasa de cambio de la población a finales de los años 1, 2, 3 y 4. ¿El plan funcionó?

71. **Conservación de las especies** Ciertas especies de tortuga enfrentan la extinción, pues los comerciantes recogen camiones cargados de huevos de tortuga que venden como afrodisíacos. Después de aplicar medidas severas de conservación, se espera que la población de tortugas crezca según la norma

$$N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1{,}000 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $N(t)$ denota la población al final del año t. Determine la tasa de crecimiento de la población de tortugas cuando $t = 2$ y $t = 8$. ¿Cuál será la población 10 años después de que las medidas de conservación son aplicadas?

72. Vuelo de un cohete La altitud (en pies) de un cohete en t segundos dentro del vuelo está dada por

$$s = f(t) = -2t^3 + 114t^2 + 480t + 1 \qquad (t \geq 0)$$

a. Determine la expresión v para la velocidad del cohete en cualquier momento t.
b. Calcule la velocidad del cohete cuanto $t = 0, 20, 40$ y 60. Interprete sus resultados.
c. Utilice los resultados de la solución del inciso (b), determine la altitud máxima alcanzada por el cohete.
Sugerencia: En su punto más alto, la velocidad del cohete es cero.

73. Obesidad en Norteamérica El índice de masa corporal (IMC) mide el peso corporal en relación con la altura. Un IMC de 25 a 29.9 se considera sobrepeso, un IMC de 30 o más se considera obesidad y un IMC de 40 o más es obesidad mórbida. El porcentaje de la población norteamericana que es obesa es aproximado por la función

$$P(t) = 0.0004t^3 + 0.0036t^2 + 0.8t + 12 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991.
a. ¿Qué porcentaje de la población de Estados Unidos se consideró obeso a principios de 1991? ¿A principios de 2004?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de la población considerada obesa en Estados Unidos a principios de 1991? ¿A principios de 2004?

(*Nota:* la fórmula para calcular el IMC de una persona está dada en el ejercicio 29, página 834).
Fuente: Centers for Disease Control and Prevention

74. Gasto en cuidado de la salud A pesar de los esfuerzos de contención, el costo del programa Medicare está aumentando. Dos razones fundamentales de ello son una población que envejece y un amplio uso de nuevas tecnologías por parte de los médicos. Con base en datos de la Health Care Financing Administration y el U.S. Census Bureau, el gasto en cuidado de la salud hasta el año 2000 puede aproximarse por la función

$$S(t) = 0.02836t^3 - 0.05167t^2 + 9.60881t + 41.9 \qquad (0 \leq t \leq 35)$$

donde $S(t)$ es el gasto en miles de millones de dólares y t está medido en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1965.
a. Determine una expresión para la tasa de cambio del gasto en cuidado de la salud en cualquier momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambió el gasto en cuidado de la salud a principios de 1980? ¿A principios de 2000?
c. ¿Cuál fue la cantidad del gasto en cuidado de la salud a principios de 1980? ¿A principios de 2000?
Fuente: Health Care Financing Administration and U.S. Census Bureau

75. Envejecimiento de la población La población (en millones) de países desarrollados entre 2005 y 2034 se prevé que sea

$$f(t) = 3.567t + 175.2 \qquad (5 \leq t \leq 35)$$

donde t se mide en años. Por otra parte, la población de los países subdesarrollados y emergentes en el mismo periodo se prevé que sea

$$g(t) = 0.46t^2 + 0.16t + 287.8 \qquad (5 \leq t \leq 35)$$

a. ¿Qué representa la función $D = g + f$?
b. Determine D' y $D'(10)$ e interprete sus resultados.
Fuente: U.S. Census Bureau, United Nations

76. Escasez de enfermeras El número proyectado de enfermeras (en millones) desde 2000 hasta 2015 está dado por

$$N(t) = \begin{cases} 1.9 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ -0.0004t^2 + 0.038t + 1.72 & \text{si } 5 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

donde $t = 0$ corresponde a 2000. El número proyectado de puestos de trabajo de enfermería (en millones) para el mismo periodo es

$$J(t) = \begin{cases} -0.0002t^2 + 0.032t + 2 & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ -0.0016t^2 + 0.12t + 1.26 & \text{si } 10 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

a. Determine la regla para la función $G = J - N$ que proporcione la brecha entre la oferta y la demanda de enfermeras de 2000 a 2015.
b. ¿Qué tan rápido cambia la brecha entre la demanda y la oferta de enfermeras en 2008? ¿En 2012?
Fuente: Department of Health and Human Services

En los ejercicios 77 y 78 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

77. Si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[2f(x) - 5g(x)] = 2f'(x) - 5g'(x)$$

78. Si $f(x) = \pi^x$, entonces $f'(x) = x\pi^{x-1}$.

79. Compruebe la regla de potencia (regla 2) para el caso especial $n = 3$.
Sugerencia: Calcule el $\lim_{h \to 0} \left[\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right]$.

9.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $$f'(x) = \frac{d}{dx}(1.5x^2) + \frac{d}{dx}(2x^{1.5}) = (1.5)(2x) + (2)(1.5x^{0.5}) = 3x + 3\sqrt{x} = 3(x + \sqrt{x})$$

b. $$g'(x) = \frac{d}{dx}(2x^{1/2}) + \frac{d}{dx}(3x^{-1/2}) = (2)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + (3)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2}x^{-3/2}(2x - 3) = \frac{2x-3}{2x^{3/2}}$$

2. a. $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$

$$= (2)(3x^2) - (3)(2x) + 2$$
$$= 6x^2 - 6x + 2$$

b. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 2$ está dada por

$$f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + 2 = 14$$

c. La tasa de cambio de f en $x = 2$ está dada por $f'(2)$. Utilice los resultados del inciso (b), observe que la tasa de cambio requerida es de 14 unidades/unidad de cambio en x.

3. a. La tasa a la que el PIB cambia en cualquier momento t $(0 < t < 11)$ está dada por

$$G'(t) = -6t^2 + 90t + 20$$

En particular, las tasas de cambio en el PIB a principios de los años 2005 ($t = 5$), 2007 ($t = 7$) y 2010 ($t = 10$) están dadas por

$$G'(5) = 320 \qquad G'(7) = 356 \qquad G'(10) = 320$$

respectivamente, es decir, \$320 millones por año, \$356 millones por año y \$320 millones por año, respectivamente.

b. La tasa de crecimiento promedio del PIB a principios de 2005 ($t = 5$) a principios de 2010 ($t = 10$) está dada por

$$\frac{G(10) - G(5)}{10 - 5} = \frac{[-2(10)^3 + 45(10)^2 + 20(10) + 6{,}000]}{5} - \frac{[-2(5)^3 + 45(5)^2 + 20(5) + 6{,}000]}{5}$$
$$= \frac{8{,}700 - 6{,}975}{5}$$

o \$345 millones por año.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de la tasa de cambio de una función

La operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora se puede utilizar para obtener el valor de la derivada en un valor dado de x. Ya que la derivada de una función $f(x)$ mide la tasa de cambio de la función con respecto a x, la operación de la derivada numérica puede utilizarse para responder preguntas relacionadas a la tasa de cambio de una cantidad y con respecto a otra cantidad x, donde $y = f(x)$, por un valor específico de x.

EJEMPLO 1 Sea $y = 3t^3 + 2\sqrt{t}$.

a. Utilice la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora para determinar qué tan rápido y está cambiando con respecto a t cuando $t = 1$.

b. Verifique el resultados del inciso (a), utilice las reglas de diferenciación de esta sección.

Solución

```
nDeriv((3X^3+2X^
.5), X, 1)
     10.00000313
```

FIGURA **T1**
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $f'(1)$.

a. Escriba $f(t) = 3t^3 + 2\sqrt{t}$. Utilice la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determine la tasa de cambio de y con respecto a t cuando $t = 1$ está dada por $f'(1) = 10$ (figura T1).

b. Aquí, $f(t) = 3t^3 + 2t^{1/2}$ y

$$f'(t) = 9t^2 + 2\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) = 9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Al utilizar este resultado, observe que $t = 1$, y cambia a la tasa de

$$f'(1) = 9(1^2) + \frac{1}{\sqrt{1}} = 10$$

unidades por cambio de unidad en t, como se obtuvo antes. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Ahorro de combustible de los automóviles Con base en los datos obtenidos por el Departamento de Energía de Estados Unidos y Shell Development Company, el ahorro de combustible de un automóvil típico depende de la velocidad con que se conduce y es aproximado por la función

$$f(x) = 0.00000310315x^4 - 0.000455174x^3 + 0.00287869x^2 + 1.25986x \qquad (0 \le x \le 75)$$

donde x se mide en mph y $f(x)$ en millas por galón (mpg).

a. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la función de f sobre el intervalo $[0, 75]$.
b. Determine la tasa de cambio de f cuando $x = 20$ y $x = 50$.
c. Interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Department of Energy and the Shell Development Company

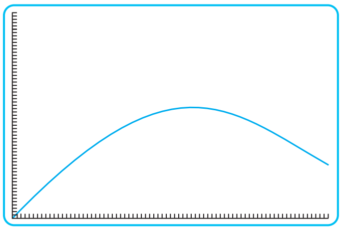

FIGURA T2
La gráfica de la función f sobre el intervalo $[0, 75]$.

Solución

a. La gráfica se muestra en la figura T2.
b. Utilice la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, observe que $f'(20) = .9280996$. La tasa de cambio de f cuando $x = 50$ está dada por $f'(50) = -.3145009995$. (Vea la figura T3a y T3b.)

```
nDeriv(.0000031
0315X^4–.0004551
74X^3+.00287869X
^2+1.25986X, X, 20)

           .9280996
```

(a)

```
nDeriv(.0000031
0315X^4–.0004551
74X^3+.00287869X
^2+1.25986X, X, 5
0)
      –.3145009995
```

(b)

FIGURA T3
La pantalla de la derivada numérica TI-83/84 al calcular (a) $f'(20)$ y (b) $f'(50)$.

c. Los resultados del inciso (b) indican que cuando un automóvil típico es conducido a 20 mph, su ahorro de combustible aumenta a una tasa de aproximadamente 0.9 mpg por cada 1 mph que incrementa en su velocidad. A una velocidad de 50 mph, su ahorro de combustible disminuye a una tasa de aproximadamente 0.3 mpg por cada 1 mph que incrementa en su velocidad. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Proporcione su respuesta adecuada a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1;\ x = 0.5$

2. $f(x) = -x^5 + 4x^2 + 3;\ x = 0.4$

3. $f(x) = x - 2\sqrt{x};\ x = 3$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x};\ x = 2$

5. $f(x) = x^{1/2} - x^{1/3};\ x = 1.2$

6. $f(x) = 2x^{5/4} + x;\ x = 2$

7. MONÓXIDO DE CARBONO EN LA ATMÓSFERA La concentración promedio de monóxido de carbono en la atmósfera mundial proyectada se aproxima por la función

$$f(t) = 0.881443t^4 - 1.45533t^3 + 0.695876t^2 + 2.87801t + 293 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en intervalos de 40 años con $t = 0$, correspondiente a principios de 1860, y $f(t)$ está medido en partes por millón por volumen.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 4] \times [280, 400]$.
b. Utilice la herramienta de graficación para estimar la rapidez en la que ha cambiado la concentración promedio proyectada de monóxido de carbono a nivel mundial a principios de 1990 ($t = 1$) y a principios de 2000 ($t = 3.5$).

Fuente: Meadows *et al.*, "Beyond the Limits"

(*continúa*)

8. **Propagación del VIH** El número estimado de niños que contraen el VIH a través del contacto madre a hijo en todo el mundo está dada por

$$f(t) = -0.2083t^3 + 3.0357t^2 + 44.0476t + 200.2857 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde $f(t)$ se mide en miles y t en años, con $t = 0$ corresponde a 1990.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 800]$.

b. ¿Qué tan rápido creció el número estimado de niños infectados con el virus VIH a través del contacto madre a hijo a nivel mundial a principios de 2000?

Fuente: Naciones Unidas

9. **Modelado con datos** Un fondo de cobertura es un consorcio de dinero administrado profesionalmente. Los activos (en miles de millones de dólares) de los fondos de cobertura desde principios de 1999 ($t = 0$) hasta principios de 2004 están dados en la siguiente gráfica:

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Activos ($ mil millones)	472	517	594	650	817	950

a. Utilice la **CubicReg** para determinar una función polinómica de tercer grado por los datos, $t = 0$ corresponde a principios de 1999.

b. Elabore la gráfica de la función determinada en el inciso (a).

c. Utilice la capacidad de la derivada numérica de su herramienta de graficación para determinar la tasa a la que los fondos de cobertura se incrementaron a principios de 2000 y de 2003.

Fuente: Hennessee Group; Institutional Investor

10. **Modelado con datos** El número de personas (en millones) inscritas en HMO (Organización para el Cuidado de la Salud) desde 1994 hasta 2002 está dada por la siguiente tabla:

Año	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Personas	45.4	50.6	58.7	67.0	76.4	81.3	80.9	80.0	74.2

a. Utilice la **QuartReg** para determinar el modelo de regresión de un polinómico de cuarto grado para estos datos $t = 0$ corresponde a 1994.

b. Utilice el modelo para estimar el número de personas inscritas en HMO en 2000. ¿Cómo se compara este número con el número actual?

c. ¿Qué tan rápido fue el cambio del número de personas que reciben su atención en una HMO a principios de 2001?

Fuente: Group Health Association of America

9.5 Reglas del producto y del cociente; derivadas de orden superior

En esta sección se estudian dos o más reglas de diferenciación: la **regla del producto** y la **regla del cociente**.

La regla del producto

La derivada del producto de dos funciones diferenciables está dada por la siguiente regla:

Regla 5: La regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

La regla del producto se puede extender hasta el caso que involucra el producto de cualquier número finito de funciones (vea el ejercicio 79, p. 614). La regla del producto se muestra al final de esta sección.

La derivada del producto de dos funciones *no* está dada por el producto de las derivadas de las funciones; es decir, en general

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

VIDEO

EJEMPLO 1 Determine la derivada de la función

$$f(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + 3)$$

Solución Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 3) + (x^3 + 3)\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) \\ &= (2x^2 - 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(4x) && \text{Vea la página 10.} \\ &= 6x^4 - 3x^2 + 4x^4 + 12x \\ &= 10x^4 - 3x^2 + 12x && \text{Combine los términos semejantes.} \\ &= x(10x^3 - 3x + 12) && \text{Factorice } x. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Diferencie (es decir, determine la derivada de) la función

$$f(x) = x^3(\sqrt{x} + 1)$$

Solución Primero, expresamos la función en forma exponencial, obteniendo

$$f(x) = x^3(x^{1/2} + 1)$$

Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3\frac{d}{dx}(x^{1/2} + 1) + (x^{1/2} + 1)\frac{d}{dx}x^3 \\ &= x^3\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + (x^{1/2} + 1)(3x^2) \\ &= \frac{1}{2}x^{5/2} + 3x^{5/2} + 3x^2 \\ &= \frac{7}{2}x^{5/2} + 3x^2 \end{aligned}$$

■

Nota El problema se puede resolver desarrollando primero el producto antes de diferenciar f. Los ejemplos por lo que esto no es posible serán considerados en la sección 9.6 donde el valor real de la regla del producto será apreciado. ■

La regla del cociente

La derivada del cociente de dos funciones diferenciables está dada por la siguiente regla:

Regla 6: La regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

Como una ayuda para recordar esta expresión, observe que ésta tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{(\text{Denominador})\begin{pmatrix}\text{Derivada del}\\ \text{numerador}\end{pmatrix} - (\text{Numerador})\begin{pmatrix}\text{Derivada del}\\ \text{denominador}\end{pmatrix}}{(\text{Denominador al cuadrado})}$$

Para probar la regla del cociente, vea el ejercicio 80, página 614.

La derivada de un cociente *no* es igual al cociente de las derivadas, es decir

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

que *no* es igual a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$$

EJEMPLO 3 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{x}{2x-4}$.

Solución Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-4)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(2x-4)}{(2x-4)^2}\\
&= \frac{(2x-4)(1) - x(2)}{(2x-4)^2}\\
&= \frac{2x-4-2x}{(2x-4)^2} = -\frac{4}{(2x-4)^2}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solución Por la regla del cociente.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1) - (x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{(x^2-1)(2x) - (x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}\\
&= -\frac{4x}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine $h'(x)$ si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

Solución Escriba de nuevo $h(x)$ en la forma $h(x) = \dfrac{x^{1/2}}{x^2 + 1}$. Por la regla del cociente, determinamos

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x^2 + 1)\dfrac{d}{dx}(x^{1/2}) - x^{1/2}\dfrac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(x^2 + 1)(\frac{1}{2}x^{-1/2}) - x^{1/2}(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^2 + 1 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^2} && \text{Factorice } \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \text{ desde el numerador.} \\
&= \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Tasa de cambio de las ventas de DVD Las ventas (en millones de dólares) de un disco DVD de una película de éxito en t años desde la fecha de lanzamiento está dada por

$$S(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

a. Determine la tasa a la que las ventas cambian en el momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambian las ventas en el momento que los DVD fueron lanzados ($t = 0$)? ¿Dos años desde la fecha de lanzamiento?

Solución

a. La tasa a la que las ventas cambian en el momento t está dada por $S'(t)$. Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{5t}{t^2 + 1}\right] = 5\,\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{t^2 + 1}\right] \\
&= 5\left[\frac{(t^2 + 1)(1) - t(2t)}{(t^2 + 1)^2}\right] \\
&= 5\left[\frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\right] = \frac{5\,(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}
\end{aligned}
$$

Vea la página 22.

b. La tasa a la que las ventas cambian en el momento del lanzamiento de los DVD está dada por

$$S'(0) = \frac{5(1 - 0)}{(0 + 1)^2} = 5$$

Es decir, han aumentado a una tasa de \$5 millones por año.

A dos años de la fecha de lanzamiento, las ventas cambian a la tasa de

$$S'(2) = \frac{5(1 - 4)}{(4 + 1)^2} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

Es decir, son decrecientes a una tasa de \$600,000 por año.

La gráfica de la función S se muestra en la figura 41.

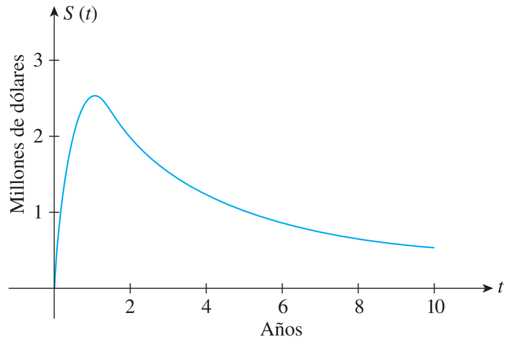

FIGURA **41**
Después del incremento espectacular, las ventas comienzan a disminuir.

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 6.

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función S, utilizando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 3]$.
2. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para determinar las coordenadas del punto más alto sobre la gráfica de S en el intervalo $[0, 10]$. Interprete sus resultados.

Explore y analice

Suponga que los ingresos de una empresa están dados por $R(x) = xp(x)$, donde x es el número de unidades del producto vendido a un precio unitario de $p(x)$ dólares.

1. Calcule $R'(x)$ y explique, con sus palabras, la relación entre $R'(x)$ y $p(x)$ y/o su derivada.
2. ¿Qué puede decir acerca de $R'(x)$ si $p(x)$ es una constante? ¿Es lo que esperaba?

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Tasa de restauración del oxígeno en un estanque Cuando los desechos orgánicos son arrojados dentro de un estanque, el proceso de oxidación da lugar a la reducción del contenido de oxígeno en el estanque. Sin embargo, con el tiempo, la naturaleza restaurará el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno en t días después de que los desechos orgánicos fueron arrojados al estanque está dada por

$$f(t) = 100\left[\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right] \qquad (0 < t < \infty)$$

por ciento de su nivel normal.

a. Determine una expresión general que dé la tasa de cambio del nivel de oxígeno en el estanque en cualquier momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambia el contenido de oxígeno dentro del estanque 1, 10 y 20 días después de que fueron arrojados los desechos orgánicos?

Solución

a. La tasa de cambio del nivel de oxígeno en el estanque en cualquier momento t está dado por la derivada de la función f. Por tanto, la expresión requerida es

$$f'(t) = 100\,\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right]$$

$$= 100\left[\frac{(t^2 + 20t + 100)\frac{d}{dt}(t^2 + 10t + 100) - (t^2 + 10t + 100)\frac{d}{dt}(t^2 + 20t + 100)}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

$$= 100\left[\frac{(t^2 + 20t + 100)(2t + 10) - (t^2 + 10t + 100)(2t + 20)}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

Vea la página 22.

$$= 100\left[\frac{2t^3 + 10t^2 + 40t^2 + 200t + 200t + 1{,}000 - 2t^3 - 20t^2 - 20t^2 - 200t - 200t - 2{,}000}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

$$= 100\left[\frac{10t^2 - 1{,}000}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

Combine los términos semejantes en el numerador.

b. La tasa a la que el contenido de oxígeno en el estanque cambia 1 día después de que los residuos orgánicos fueron arrojados está dada por

$$f'(1) = 100\left[\frac{10 - 1{,}000}{(1 + 20 + 100)^2}\right] \approx -6.76$$

Es decir, ésta es arrojada a una tasa de 6.8% por día. Después de 10 días, la tasa es

$$f'(10) = 100\left[\frac{10(10)^2 - 1{,}000}{(10^2 + 20(10) + 100)^2}\right] = 0$$

Es decir, ésta no aumenta ni disminuye. Después de 20 días, la tasa es

$$f'(20) = 100\left[\frac{10(20)^2 - 1{,}000}{(20^2 + 20(20) + 100)^2}\right] \approx 0.37$$

Es decir, el contenido de oxígeno se incrementa a una tasa de 0.37% por día, y el proceso de restauración ha iniciado. ■

Derivadas de orden superior

La derivada f' de una función f es también una función. Como tal, la posibilidad de diferenciación de f' puede ser considerada. Por tanto, la función f' tiene una derivada f'' en un punto x en el dominio de f' si el límite del cociente

$$\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

existe conforme h se aproxima a cero. En otras palabras, ésta es la derivada de la primera derivada.

A la función f'' obtenida de esta forma se le llama **segunda derivada de** la función ***f***, como la derivada f' de f a menudo se le da el nombre de la primera derivada de f. Continuar de esta manera se lleva a considerar la tercera, la cuarta y las derivadas de orden superior de f siempre que existan. Las notaciones para las primeras, segundas, terceras y, en general, *enésimas* derivadas de una función f en un punto x son

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

o

$$D^1f(x), D^2f(x), D^3f(x), \ldots, D^nf(x)$$

Si f es escrita de la forma $y = f(x)$, entonces las notaciones para estas derivadas son

$$y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

o

$$D^1y,\ D^2y,\ D^3y,\ \ldots,\ D^ny$$

respectivamente.

EJEMPLO 8 Determine las derivadas de todos los órdenes de la función polinómica

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 8$$

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 4x + 1\\
f''(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) = 20x^3 - 36x^2 + 24x - 4\\
f'''(x) &= \frac{d}{dx}f''(x) = 60x^2 - 72x + 24\\
f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx}f'''(x) = 120x - 72\\
f^{(5)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(4)}(x) = 120
\end{aligned}$$

y, en general,

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad (\text{para } n > 5)$$

■

EJEMPLO 9 Determine la tercera derivada de la función f definida por $y = x^{2/3}$. ¿Cuál es su dominio?

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2}{3}x^{-1/3}\\
y'' &= \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}
\end{aligned}$$

así que la derivada requerida es

$$y''' = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = \frac{8}{27}x^{-7/3} = \frac{8}{27x^{7/3}}$$

El dominio común de las funciones f', f'', f''' es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 0$. El dominio de $y = x^{2/3}$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de la función $y = x^{2/3}$ aparece en la figura 42. ■

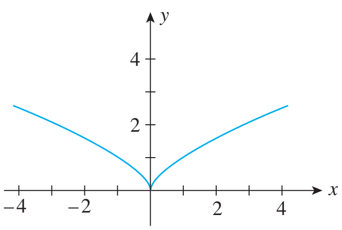

FIGURA 42
La gráfica de la función $y = x^{2/3}$.

Nota Siempre simplifique una expresión antes de diferenciarla para obtener la derivada del siguiente orden. ■

Como la derivada de una función f en un punto x mide la tasa de cambio de la función f en ese punto, la segunda derivada de f (la derivada de f') mide la tasa de cambio de la derivada f' de la función f. La tercera derivada de la función f, f''', mide la tasa de cambio de f'', y así sucesivamente.

En el capítulo 10 se estudian las aplicaciones que involucran la interpretación geométrica de la segunda derivada de una función. El siguiente ejemplo da la interpretación de la segunda derivada en un papel familiar.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Aceleración del maglev (tren de levitación magnética) En referencia al ejemplo de las páginas 534-537, la distancia s (en pies) recorrida por el maglev moviéndose a lo largo de una vía recta t segundos después de iniciar desde el reposo está dada por la función $s = 4t^2$ $(0 \leq t \leq 10)$. ¿Cuál es la aceleración del maglev en cualquier momento t?

Solución La velocidad del maglev t segundos desde el reposo está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t$$

La aceleración del maglev en t segundos desde el reposo está dada por la tasa de cambio de la velocidad de t; es decir,

$$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(8t) = 8$$

u 8 pies por segundo por segundo, abreviado normalmente 8 pies/seg^2. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 La aceleración y la velocidad de un objeto que cae Una pelota es lanzada al aire desde el techo de un edificio. La altura de la pelota que se mide desde el suelo está dada por

$$s = -16t^2 + 24t + 120$$

donde s es medida en pies y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración después de 3 segundos de que la pelota es lanzada al aire.

Solución La velocidad v y la aceleración a de la pelota en cualquier momento t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-16t^2 + 24t + 120) = -32t + 24$$

y

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-32t + 24) = -32$$

Por tanto, la velocidad de la pelota después de 3 segundos de que es lanzada al aire es

$$v = -32(3) + 24 = -72$$

Es decir, la pelota cae a una velocidad de 72 pies/seg. La aceleración de la pelota en caída es de 32 pies/seg^2 en cualquier momento durante el movimiento. ■

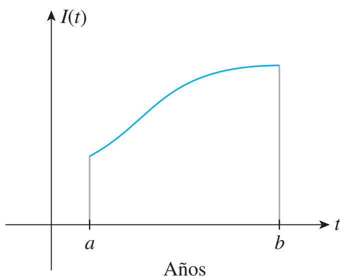

FIGURA **43**
El IPC de cierta economía desde el año a hasta el año b está dada por $I(t)$.

Otra interpretación de la segunda derivada de una función, esta vez desde el campo de economía, es la siguiente. Suponga que el índice de precios al consumidor (IPC) de una economía entre los años a y b está descrita por la función $I(t)$ $(a \leq t \leq b)$ (figura 43). Entonces la primera derivada de I en $t = c$, $I'(c)$, donde $a < c < b$, da la tasa de cambio de I en c. La cantidad

$$\frac{I'(c)}{I(c)}$$

llamada la *tasa de cambio relativa de* $I(t)$ con respecto a t en $t = c$, mide la *tasa de inflación* de la economía en $t = c$. La segunda derivada de I en $t = c$, $I''(c)$, da la tasa de cambio de I' en $t = c$. Ahora es posible para $I'(t)$ ser positiva e $I''(t)$ ser negativa en $t = c$ (vea el ejemplo 12). Esto indica que en $t = c$ la economía está experimentando inflación (el IPC es creciente), pero la tasa a la que la inflación crece, de hecho, disminuye. Ésta es precisamente la situación descrita por un economista o por un político cuando afirma que "la inflación se está desacelerando". ¡No podemos saltar a la conclusión de la cita mencionada de que el precio de los bienes y servicios está a punto de caer!

EJEMPLO DE APLICACIÓN 12 Tasa de inflación de una economía
La función

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100 \qquad (0 \leq t \leq 9)$$

da el IPC de una economía, donde $t = 0$ corresponde a 2002.

a. Determine la tasa de inflación a principios de 2008 ($t = 6$).
b. Demuestre que la inflación fue moderada en ese tiempo.

Solución

a. Determinamos $I'(t) = -0.6t^2 + 6t$. Después, calculamos.

$$I'(6) = -0.6(6)^2 + 6(6) = 14.4 \quad \text{y} \quad I(6) = -0.2(6)^3 + 3(6)^2 + 100 = 164.8$$

de la que observamos que la tasa de inflación es

$$\frac{I'(6)}{I(6)} = \frac{14.4}{164.8} \approx 0.0874$$

o aproximadamente 8.7%.

b. Determinamos

$$I''(t) = \frac{d}{dt}(-0.6t^2 + 6t) = -1.2t + 6$$

Puesto que

$$I''(6) = -1.2(6) + 6 = -1.2$$

observamos que I' es de hecho decreciente en $t = 6$ y concluimos que la inflación fue moderada en ese tiempo (figura 44). ■

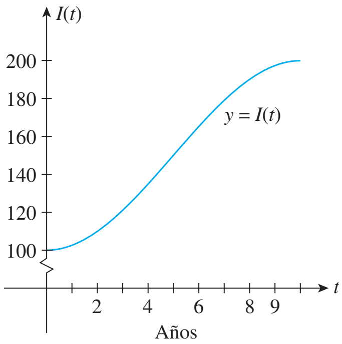

FIGURA 44
El IPC de una economía está dado, por $I(t)$.

Verificación de la regla del producto

Ahora verificaremos la regla del producto. Si $p(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Al sumar $-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)$ (¡que es cero!) al numerador y al factorizar, tenemos

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + \lim_{h \to 0} g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \qquad \text{Por la propiedad 3 de límites}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{Por la propiedad 4 de límites}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Observe que en la segunda desde el último eslabón en la cadena de igualdades, se ha utilizado el hecho de que el $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ debido a que f es continua en x.

9.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$.

2. Determine la derivada de
$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 6x + 10$$

3. Las ventas totales de Productos de Seguridad en sus primeros 2 años de operación están dados por
$$S = f(t) = \frac{0.3t^3}{1 + 0.4t^2} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$
donde S se mide en millones de dólares y $t = 0$ corresponde a la fecha en la que Productos de Seguridad comenzó a operar. ¿Qué tan rápido se incrementaron las ventas al inicio del segundo año de operación de la empresa?

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 9.5 pueden encontrarse en la página 614.

9.5 Preguntas de concepto

1. Exprese con sus palabras la regla de la diferenciación.
   a. Regla del producto **b.** Regla del cociente

2. Si $f(1) = 3$, $g(1) = 2$, $f'(1) = -1$ y $g'(1) = 4$, determine
   a. $h'(1)$ si $h(x) = f(x)g(x)$ **b.** $F'(1)$ si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

3. **a.** ¿Cuál es la segunda derivada de una función f?
   b. ¿Cómo se determina la segunda derivada de una función f, suponiendo que ésta existe?

4. Si $s = f(t)$ dé la posición de un objeto moviéndose sobre una coordenada, ¿qué mide $f'(t)$ y $f''(t)$?

9.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-30, determine la derivada de cada función.

1. $f(x) = 2x(x^2 + 1)$
2. $f(x) = 3x^2(x - 1)$
3. $f(t) = (t - 1)(2t + 1)$
4. $f(x) = (2x + 3)(3x - 4)$
5. $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 2)$
6. $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$
7. $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$
8. $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$
9. $f(w) = (w^3 - w^2 + w - 1)(w^2 + 2)$
10. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + (x^2 + 1)(x^2 - x - 1) + 28$
11. $f(x) = (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1)$
12. $f(t) = (1 + \sqrt{t})(2t^2 - 3)$
13. $f(x) = (x^2 - 5x + 2)\left(x - \dfrac{2}{x}\right)$
14. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$
16. $g(x) = \dfrac{3}{2x + 4}$
17. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$
18. $f(t) = \dfrac{1 - 2t}{1 + 3t}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
20. $f(u) = \dfrac{u}{u^2 + 1}$
21. $f(s) = \dfrac{s^2 - 4}{s + 1}$
22. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$
23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$
24. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$
25. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 2x + 3}$
27. $f(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 2}$
28. $f(x) = (3x^2 - 1)\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4} - \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$
30. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{3x}}{3x - 1}$

En los ejercicios 31-34, suponga que f y g son funciones que son diferenciables en $x = 1$ y que $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(1) = -2$ y $g'(1) = 3$. Determine el valor de $h'(1)$.

31. $h(x) = f(x)g(x)$ **32.** $h(x) = (x^2 + 1)g(x)$

33. $h(x) = \dfrac{xf(x)}{x + g(x)}$ **34.** $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$

En los ejercicios 35-38, determine la derivada de cada una de las funciones dadas y evalúe $f'(x)$ en el valor dado de x.

35. $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$; $x = 1$

36. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$; $x = 2$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x^4 - 2x^2 - 1}$; $x = -1$

38. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)(x^{3/2} - x)$; $x = 4$

En los ejercicios 39-42, determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función f en el punto específico.

39. $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 - 2)$; $(2, 18)$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$; $\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$

41. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$; $(1, 1)$

42. $f(x) = \dfrac{1 + 2x^{1/2}}{1 + x^{3/2}}$; $\left(4, \dfrac{5}{9}\right)$

En los ejercicios 43-48, determine la primera y segunda derivadas de la función dada.

43. $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

44. $f(x) = -0.2x^2 + 0.3x + 4$

45. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

46. $g(x) = -3x^3 + 24x^2 + 6x - 64$

47. $h(t) = t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 3t + 10$

48. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

En los ejercicios 49-52, determine la tercera derivada de la función dada.

49. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

50. $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 8x + 12$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **52.** $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

53. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = (x^3 + 1)(3x^2 - 4x + 2)$ en el punto $(1, 2)$.

54. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2}$ en el punto $(2, 3)$.

55. Sea $f(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.

56. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.

57. Determine el (los) sobre la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + 6)(x - 5)$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a -2.

58. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a $-\frac{1}{2}$.

59. **CONCENTRACIÓN DE UN FÁRMACO EN EL TORRENTE SANGUÍNEO** La concentración de cierto fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente en t horas después de la inyección está dada por

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

a. Determine la tasa a la que la concentración del fármaco cambia con respecto al tiempo.

b. ¿Qué tan rápido cambia la concentración $\frac{1}{2}$ hora, 1 hora, y 2 horas después de la inyección?

60. **COSTO DE LA ELIMINACIÓN DE RESIDUOS TÓXICOS** Recientemente se encontró que un pozo principal de una ciudad estaba contaminado con tricloroetileno, un compuesto químico cancerígeno, como resultado de un vertedero abandonado que filtraba productos químicos dentro el agua. Se presentó una propuesta a los miembros del consejo de la ciudad indicando el costo, medido en millones de dólares, para eliminar x% de los contaminantes tóxicos esta dada por

$$C(x) = \frac{0.5x}{100 - x}$$

Determine $C'(80)$, $C'(90)$, $C'(95)$ y $C'(99)$. ¿Qué le dicen sus resultados acerca del costo de eliminar *todos* los contaminantes?

61. **DOSIS DE FÁRMACOS** Thomas Young ha sugerido la siguiente regla para calcular la dosis de medicina para niños de 1 a 12 años de edad. Si a denota la dosis de adultos (en miligramos) y si t denota la edad del niño (en años), entonces la dosis para el niño está dada por

$$D(t) = \frac{at}{t + 12}$$

Suponga que la dosis para adultos de una sustancia es de 500 mg. Determine la expresión que dé la tasa de cambio de la dosis de un niño con respecto a su edad. ¿Cuál es la tasa de cambio en la dosis para un niño en relación con su edad para un niño de 6 años? ¿Un niño de 10 años de edad?

62. **EFECTO DE UN BACTERICIDA** El número de bacterias $N(t)$ en cierto cultivo t minutos después de que es introducido un bactericida experimental obedece a la regla

$$N(t) = \frac{10{,}000}{1 + t^2} + 2{,}000$$

Determine la tasa de cambio del número de bacterias en el cultivo 1 minuto y 2 minutos después de que el bactericida fue introducido. ¿Cuál es la población de las bacterias en cultivo 1 minuto y 2 minutos después de haber introducido el bactericida?

63. Funciones de demanda La función de la demanda de relojes de pulsera Sicard está dada por

$$d(x) = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \qquad (0 \leq x \leq 20)$$

donde x (se mide en unidades de millar) es la cantidad demandada por semana y $d(x)$ es el precio unitario en dólares.

a. Determine $d'(x)$.
b. Determine $d'(5)$, $d'(10)$ y $d'(15)$ e interprete sus resultados.

64. Curvas de aprendizaje Por experiencia, Emory Secretarial School sabe que el estudiante promedio que toma Mecanografía avanzada progresará conforme a la regla

$$N(t) = \frac{60t + 180}{t + 6} \qquad (t \geq 0)$$

donde $N(t)$ mide el número de palabras por minuto que el estudiante puede escribir después de t semanas en el curso.

a. Determine una expresión para $N'(t)$.
b. Calcule $N'(t)$ para $t = 1, 3, 4$ y 7 e interprete sus resultados.
c. Elabore la gráfica de la función N. ¿Confirma sus resultados obtenidos en el inciso (b)?
d. ¿Cuál será la velocidad promedio de mecanografiado de un estudiante al final del curso de 12 semanas?

65. Ingresos en taquilla Los ingresos totales de taquilla en todo el mundo para una película de larga duración son aproximados por la función

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

donde $T(x)$ se mide en millones de dólares y x es el número de años desde el lanzamiento de la película. ¿A qué velocidad cambian los ingresos totales 1 año, 3 años y 5 años después de su lanzamiento?

66. Niveles de formaldehído Un estudio sobre los niveles de formaldehído en 900 hogares indica que las emisiones de diversas sustancias químicas pueden disminuir con el tiempo. El nivel de formaldehído (partes por millón) en un hogar promedio en un estudio está dada por

$$f(t) = \frac{0.055t + 0.26}{t + 2} \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde t es la edad de la casa en años. ¿Qué tan rápido disminuye la tasa promedio del nivel de formaldehído en una casa cuando ésta es nueva? ¿A principios del cuarto año?

Fuente: Bonneville Power Administration

67. Crecimiento de la población Una gran empresa construye un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias en 4,325 acres dentro de la comunidad rural de Glen Cove. Como resultado de este desarrollo, los encargados de la planeación han estimado que la población de Glen Cove (en miles) t años a partir de ahora se dará por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a. Determine la velocidad en la que la población de Glen Cove cambia con respecto al tiempo.
b. ¿Cuál será la población después de 10 años? ¿A qué tasa aumenta la población cuando $t = 10$?

68. Aceleración de un automóvil La distancia en s (en pies) recorrida por un automóvil después de t segundos partiendo del reposo está dada por

$$s = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

Determine una expresión general para la aceleración del automóvil en cualquier momento $t(0 \leq t \leq 6)$. Demuestre que el automóvil desacelera $2\frac{2}{3}$ segundos después de iniciar desde el reposo.

69. Tasas de criminalidad El número de delitos graves cometidos en Bronxville entre 2000 y 2007 se aproxima por la función

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

donde $N(t)$ denota el número de delitos cometidos en el año t, con $t = 0$ corresponde a principios del año 2000. Enfurecidos por el aumento sorprendente en la tasa de criminalidad, los ciudadanos de Bronxville, con la ayuda de la policía local, organizaron un grupo "Vigilancia Vecinal contra la delincuencia" a principios de 2004 para luchar contra esta amenaza.

a. Compruebe que la tasa de criminalidad aumentó desde inicios de 2000 hasta principios de 2007.
Sugerencia: Calcule $N'(0), N'(1), \ldots, N'(7)$.
b. Demuestre que el programa de Vigilancia Vecinal contra el crimen ha funcionado al calcular $N''(4)$, $N''(5)$, $N''(6)$ y $N''(7)$.

70. PIB de una ciudad en vías de desarrollo El producto interno bruto (PIB) de un país en vías de desarrollo desde 2000 hasta 2008 es aproximado por la función

$$G(t) = -0.2t^3 + 2.4t^2 + 60 \qquad (0 \leq t \leq 8)$$

donde $G(t)$ está en medido en miles de millones de dólares, con $t = 0$ correspondiente a principios de 2000.

a. Calcule $G'(0), G'(1), \ldots, G'(8)$.
b. Calcule $G''(0), G''(1), \ldots, G''(8)$.
c. Utilice los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b), demuestre que después de una tasa de crecimiento espectacular en los primeros años, el crecimiento del PIB se congeló.

71. Beneficios por discapacidad El número de personas de edades entre 18 y 64 años que recibe los beneficios por discapacidad a través del Seguro Social, Seguro de Ingreso Suplementario, o ambos, desde 1990 hasta 2000 es aproximado por la función

$$N(t) = 0.00037t^3 - 0.0242t^2 + 0.52t + 5.3 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $f(t)$ se mide en unidades de millar y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Calcule $N(8)$, $N'(8)$ y $N''(8)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Social Security Administration

72. El censo en Estados Unidos El número de estadounidenses entre 45 y 54 años de edad es de aproximadamente

$$N(t) = -0.00233t^4 + 0.00633t^3 - 0.05417t^2 + 1.3467t + 25$$

millones de personas en el año t, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Calcule $N'(10)$ y $N''(10)$ e interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Census Bureau

73. **Obesidad en Estados Unidos** El índice de masa corporal (IMC) mide el peso corporal en relación a la altura. Un IMC de 25 a 29.9 se considera sobrepeso, un IMC de 30 o más se considera obesidad y un IMC de 40 o más es obesidad mórbida. El porcentaje de la población de Estados Unidos que es obesa es aproximado por la función

$$P(t) = 0.0004t^3 + 0.0036t^2 + 0.8t + 12 \qquad (0 \le t \le 13)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991. Demuestre que el promedio de la tasa de cambio del porcentaje de la población norteamericana que se considera obeso fue positiva desde 1991 hasta 2004. ¿Qué significa esto?
Fuente: Centers for Disease Control and Prevention

74. **Depuración del aire** Durante la prueba de una cierta marca de purificador de aire, la cantidad de humo restante en t minutos después de haber iniciado la prueba fue de

$$A(t) = -0.00006t^5 + 0.00468t^4 - 0.1316t^3 + 1.915t^2 - 17.63t + 100$$

por ciento de la cantidad original. Calcule $A'(10)$ y $A''(10)$ e interprete sus resultados.
Fuente: Consumer Reports

En los ejercicios 75-78, determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

75. Si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

76. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + xf'(x)$$

77. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^2}\right] = \frac{f'(x)}{2x}$$

78. Si la segunda derivada de f existe en $x = a$, entonces $f''(a) = [f'(a)]^2$.

79. Desarrolle la regla del producto para la diferenciación de los siguientes casos que involucran el producto de las tres funciones diferenciables: sea $h(x) = u(x)v(x)w(x)$ y demuestre que $h'(x) = u(x)v(x)w'(x) + u(x)v'(x)w(x) + u'(x)v(x)w(x)$.
Sugerencia: Sea $f(x) = u(x)v(x)$, $g(x) = w(x)$ y $h(x) = f(x)g(x)$ y aplique la regla del producto a la función h.

80. Pruebe la regla del cociente para la diferenciación (regla 6).
Sugerencia: Sea $k(x) = f(x)/g(x)$ y verifique los siguientes pasos:

a. $$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

b. Al sumar $[-f(x)g(x) + f(x)g(x)]$ al numerador y al simplificar, demuestre que

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)} \times \left\{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\cdot g(x) - \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\cdot f(x)\right\}$$

c. $$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

9.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Utilice la regla del cociente para obtener

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-1)\frac{d}{dx}(2x+1) - (2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{(x^2-1)(2) - (2x+1)(2x)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-2(x^2 + x + 1)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
f'(x) &= 10x^4 - 9x^2 + 2x - 6 \\
f''(x) &= 40x^3 - 18x + 2 \\
f'''(x) &= 120x^2 - 18
\end{aligned}$$

3. La tasa en la que las ventas totales de la empresa cambian en cualquier momento t está dada por

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \frac{(1 + 0.4t^2)\frac{d}{dt}(0.3t^3) - (0.3t^3)\frac{d}{dt}(1 + 0.4t^2)}{(1 + 0.4t^2)^2} \\
&= \frac{(1 + 0.4t^2)(0.9t^2) - (0.3t^3)(0.8t)}{(1 + 0.4t^2)^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, al principio del segundo año de operación, las ventas de Productos de Seguridad se incrementaron a una tasa de

$$S'(1) = \frac{(1 + 0.4)(0.9) - (0.3)(0.8)}{(1 + 0.4)^2} = 0.520408$$

o \$520,408/año.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Las reglas del producto y del cociente

EJEMPLO 1 Sea $(x) = (2\sqrt{x} + 0.5x)(0.3x^3 + 2x - \frac{0.3}{x})$. Determine $f'(0.2)$.

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, determinamos

$$f'(0.2) = 6.4797499802$$

vea la figura T1.

```
nDeriv((2X^.5+.5
X) (.3X^3+2X–.3/X),
X, .2)
        6.4797499802
█
```

FIGURA T1
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $f'(0.2)$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 **Importancia del tiempo al tratar ataques cardíacos** Según la American Heart Association, la ventaja del tratamiento para los ataques cardíacos depende del tiempo hasta el tratamiento y está descrito por la función

$$f(t) = \frac{0.44t^4 + 700}{0.1t^4 + 7} \qquad (0 \le t \le 24)$$

donde t está medido en horas y $f(t)$ está expresado como un porcentaje.

a. Utilice la calculadora graficadora para trazar la función f utilizando la ventana de visualización $[0, 24] \times [0, 100]$.
b. Utilice la calculadora graficadora para determinar la derivada de f cuando $t = 0$ y $t = 2$.
c. Interprete los resultados obtenidos en el inciso (b).

Fuente: American Heart Association

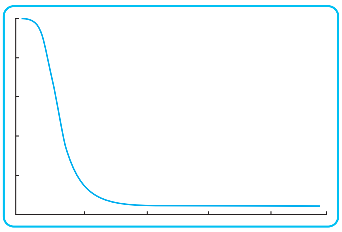

FIGURA T2

Solución

a. La gráfica de f se muestra en la figura T2.
b. Al utilizar la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, obtenemos

$$f'(0) \approx 0$$
$$f'(2) \approx -28.95402429$$

(vea la figura T3).

```
nDeriv((.44X^4+7
00)/(.1X^4+7),X,
0)
              0
```

(a)

```
nDeriv((.44X^4+7
00)/(.1X^4+7),X,
2)
     -28.95402429
```

(b)

FIGURA T3
Pantalla TI-83/84 de la derivada numérica (a) al calcular $f'(0)$ y (b) al calcular $f'(2)$.

c. Los resultados del inciso (b) demuestran que no existe una caída en el tratamiento cuando el ataque cardíaco es tratado de inmediato. Sin embargo, el beneficio del tratamiento disminuye a una tasa de aproximadamente 29% por hora cuando el tiempo de tratamiento es de 2 horas. Así, es muy urgente que un paciente que sufre de un ataque cardíaco reciba atención médica tan pronto como sea posible.

(*continúa*)

Determinación de la segunda derivada de una función en un punto dado

Algunas calculadoras graficadoras tienen la capacidad de calcular numéricamente la segunda derivada de una función en un punto. Si su calculadora tiene esta capacidad, utilícela para trabajar con los ejemplos y ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 3 Utilice la operación de la (segunda) derivada numérica de la calculadora graficadora para determinar la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución Al utilizar la operación de la (segunda) derivada numérica, determinamos

$$f''(4) = \text{der2}(x\hat{}.5, x, 4) = -.03125$$

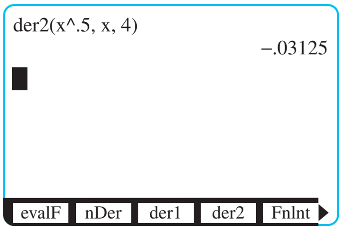

FIGURA T4
La pantalla TI-86 calcula la segunda derivada $f''(4)$.

(figura T4). ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Predominio del Alzheimer en pacientes El número de pacientes con Alzheimer en Estados Unidos está dado por

$$f(t) = -0.02765t^4 + 0.3346t^3 - 1.1261t^2 + 1.7575t + 3.7745 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde $f(t)$ se mide en millones y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990.

a. ¿Qué tan rápido cambiará el número de pacientes con predominio de Alzheimer en Estados Unidos a comienzos de 2030?

b. ¿Qué tan rápido cambia la tasa del número de pacientes con predominio de Alzheimer en Estados Unidos a principios de 2030?

c. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 12]$.

Fuente: Alzheimer's Association

Solución

a. Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos que el número de pacientes con Alzheimer a principios de 2030 puede anticiparse que cambie a la tasa de

$$f'(4) = 1.7311$$

es decir, el número es creciente en la tasa de aproximadamente 1.7 millones de pacientes por década.

b. Al utilizar la operación de la (segunda) derivada numérica de una calculadora graficadora, se determina que

$$f''(4) = 0.4694$$

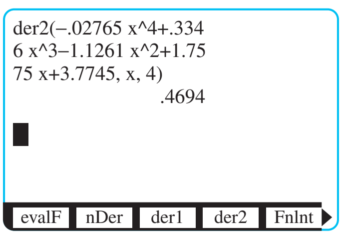

FIGURA T5
La pantalla TI-86 de la segunda derivada calcula $f''(4)$.

(figura T5): es decir, la tasa de cambio en el número de pacientes con Alzheimer es creciente en la tasa de aproximadamente 0.5 millones de pacientes por década.

c. La figura T6 muestra la gráfica.

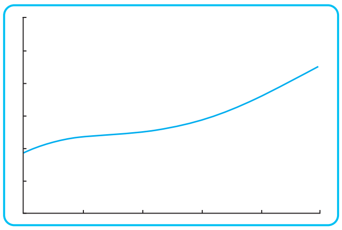

FIGURA **T6**
La gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 12]$.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Dé su respuesta a cuatro posiciones decimales precisas.

1. $f(x) = (2x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4); x = -0.5$

2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(2x^2 + x - 3); x = 1.5$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}; x = 3$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(x^2 + 4)}{x^3 + 1}; x = 4$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(1 + x^{-1})}{x + 1}; x = 1$

6. $f(x) = \dfrac{x^2(2 + \sqrt{x})}{1 + \sqrt{x}}; x = 1$

7. Nuevos empleos para la construcción La presidenta de una compañía de construcción de vivienda asegura que el número de empleos creados para la construcción en los próximos t meses está dado por

$$f(t) = 1.42\left(\frac{7t^2 + 140t + 700}{3t^2 + 80t + 550}\right)$$

donde $f(t)$ está medido en empleos por año. ¿A qué tasa se crearán empleos en la construcción en un año a partir de ahora, suponiendo que su pronóstico sea correcto?

8. Crecimiento de la población Una gran empresa está construyendo un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias en 4,325 acres en la comunidad rural de Glen Cove. Como resultado de este desarrollo, los encargados de la planeación han estimado que la población de Glen Cove (en miles) t años a partir de ahora estará dada por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a. ¿Cuál será la población en 10 años a partir de ahora?
b. ¿A qué tasa se incrementará la población en 10 años a partir de ahora?

En los ejercicios 9-16 determine el valor de la segunda derivada de f en el valor dado de x. Exprese su respuesta correcta a cuatro posiciones decimales.

9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1; x = -1$

10. $f(x) = 2.5x^5 - 3x^3 + 1.5x + 4; x = 2.1$

11. $f(x) = 2.1x^{3.1} - 4.2x^{1.7} + 4.2; x = 1.4$

12. $f(x) = 1.7x^{4.2} - 3.2x^{1.3} + 4.2x - 3.2; x = 2.2$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x^3 + 1}; x = 2.1$

14. $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{2x^2 - 5x + 4}; x = 1.2$

15. $f(x) = \dfrac{x^{1/2} + 2x^{3/2} + 1}{2x^{1/2} + 3}; x = 0.5$

16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2x + \sqrt{x} + 4}; x = 2.3$

17. Tasa de quiebras bancarias La tasa en la que los bancos quebraron entre 1982 y 1994 está dada por

$$f(t) = -0.063447t^4 - 1.953283t^3 + 14.632576t^2 - 6.684704t + 47.458874 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde $f(t)$ se mide en el número de bancos por año y t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1982. Calcule $f''(6)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Federal Deposit Insurance Corporation

18. Modelado con datos Los ingresos (en miles de millones de dólares) de publicidad por cable para los años 1995 hasta 2000 es la siguiente

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ingresos	5.1	6.6	8.1	9.4	11.1	13.7

a. Utilice la **Regresión cúbica** para determinar el modelo de regresión polinómica para los datos. $t = 0$ corresponde a 1995.
b. Elabore la gráfica de la función f determinada en el inciso (a), utilice la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 14]$.
c. Calcule $f''(5)$ e interprete sus resultados.

Fuente: National Cable Television Association

9.6 La regla de la cadena

La población de los estadounidenses de 55 años y mayores como porcentaje de la población total es aproximado por la función

$$f(t) = 10.72(0.9t + 10)^{0.3} \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

donde t se mide en años con $t = 0$ correspondiente al año 2000 (figura 45).

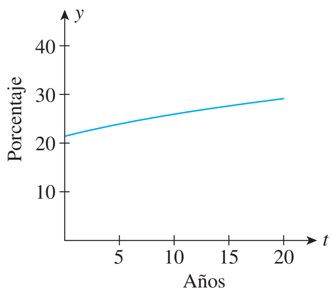

FIGURA 45
La población de estadounidenses de 55 años de edad y mayores.
Fuente: U.S. Census Bureau

¿Qué tan rápido aumentará la población de 55 años de edad y mayores a principios de 2012? Para responder a esta pregunta, se tiene que evaluar $f'(12)$, donde f' es la derivada de f. Pero las reglas de diferenciación que hemos desarrollado hasta ahora no ayudarán a determinar la derivada de f'.

En esta sección se introducirá otra regla de diferenciación llamada la **regla de la cadena**. Cuando se utiliza en forma conjunta con las normas de diferenciación desarrolladas en las últimas dos secciones, la regla de la cadena permite ampliar en gran medida las clases de funciones que seamos capaces de diferenciar (en el ejercicio 70, página 626, se utilizará la regla de la cadena para responder a estas preguntas planteadas en los ejemplos de introducción).

La regla de la cadena

Al considerar la función $h(x) = (x^2 + x + 1)^2$. Si se fuera a calcular $h'(x)$ utilizando sólo las reglas de diferenciación de las secciones anteriores, entonces la aproximación podría desarrollar a $h(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

de la que determinamos

$$h'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

Pero, ¿qué hay de la función $H(x) = (x^2 + x + 1)^{100}$? La misma técnica puede ser utilizada para determinar la derivada de la función H, pero la cantidad de trabajo involucrado en este caso sería enorme! Considere también la función $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Para cada una de las funciones H y G, las reglas de diferenciación de las secciones anteriores no pueden aplicarse directamente para calcular las derivadas H' y G'.

Observe que ambas H y G son **funciones compuestas**, es decir, cada una está compuesta de, o construida a partir de, funciones simples. Por ejemplo, la función H se compone de las dos funciones simples $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^{100}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H(x) &= g[f(x)] = [f(x)]^{100} \\ &= (x^2 + x + 1)^{100} \end{aligned}$$

De igual forma, observe que la función G está compuesta de las dos funciones más simples $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Por tanto,

$$G(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)}$$
$$= \sqrt{x^2 + 1}$$

Como un primer paso hacia la determinación de la derivada h' de una función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x) = g[f(x)]$, escribimos

$$u = f(x) \quad \text{y} \quad y = g[f(x)] = g(u)$$

La dependencia de h sobre g y f está ilustrada en la figura 46. Ya que u es una función de x, se puede calcular la derivada de u con respecto a x, si f es una función diferenciable, obteniendo $du/dx = f'(x)$. Después, si g es una función diferenciable de u, se puede calcular la derivada de g con respecto a u, obteniendo $dy/du = g'(u)$. Ahora, ya que la función h está compuesta por la función g y de la función f, se puede suponer que la regla $h'(x)$ para la derivada h' de h esté dada por una expresión que involucre las reglas para las derivadas de f y g. Pero, ¿cómo se combinan estas derivadas para obtener h'?

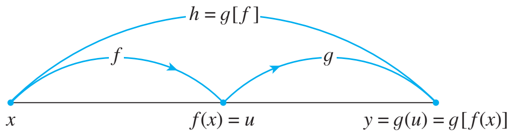

FIGURA 46
La función compuesta $h(x) = g[f(x)]$.

Esta pregunta puede contestarse al interpretar la derivada de cada función como la tasa de cambio de esa función. Por ejemplo, suponga que $u = f(x)$ cambia tres veces tan rápido como x, es decir,

$$f'(x) = \frac{du}{dx} = 3$$

Y suponga que $y = g(u)$ cambia dos veces tan rápido como u, esto es

$$g'(u) = \frac{dy}{du} = 2$$

Después, esperaríamos que $y = h(x)$ cambie seis veces tan rápido como x, es decir,

$$h'(x) = g'(u)f'(x) = (2)(3) = 6$$

o el equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2)(3) = 6$$

Esta observación sugiere el siguiente resultado, el cual afirmamos sin prueba.

Regla 7: La regla de la cadena

Si $h(x) = g[f(x)]$, entonces

$$h'(x) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'x \tag{10}$$

o de forma equivalente, si se escribe $y = h(x) = g(u)$, donde $u = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{11}$$

Notas

1. Si se etiqueta la función compuesta h de la siguiente forma

$$h(x) = \underbrace{g}_{\text{fuera de la función}}[\overbrace{f(x)}^{\text{dentro de la función}}]$$

entonces $h'(x)$ es sólo la *derivada* de "fuera de la función" *evaluada* "dentro de la función" por la *derivada* de "dentro de la función".

2. La ecuación 11 puede recordarse al observar que si se "cancela" la de du, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

La regla de la cadena para las funciones de potencia

Numerosas funciones compuestas tienen la forma especial $h(x) = g(f(x))$, donde g está definida por la regla $g(x) = x^n$ (n, un número real); es decir,

$$h(x) = [f(x)]^n$$

En otras palabras, la función h está dada por la potencia de la función f. Las funciones

$$h(x) = (x^2 + x + 1)^2 \qquad H(x) = (x^2 + x + 1)^{100} \qquad G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

discutidas con anterioridad son ejemplos de este tipo de función compuesta. Al utilizar el siguiente corolario de la regla de la cadena, la regla de potencia general, se puede determinar la derivada de este tipo de función mucho más fácilmente que mediante el uso directo de la regla de la cadena.

La regla general de potencia

Si la función f es diferenciable y $h(x) = [f(x)]^n$ (n, un número real), entonces

$$h'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x) \tag{12}$$

Para ver esto, observe que $h(x) = g(f(x))$, donde $g(x) = x^n$, así que, por virtud de la regla de cadena, tenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= n\,[f(x)]^{n-1}f'(x) \end{aligned}$$

puesto que $g'(x) = nx^{n-1}$.

EJEMPLO 1 Sea $F(x) = (3x + 1)^2$.

a. Determine $F'(x)$, utilizando la regla general de potencia.
b. Verifique sus resultados sin el beneficio de la regla general de potencia.

Solución

a. Al utilizar la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(3x + 1)^1\frac{d}{dx}(3x + 1) \\ &= 2(3x + 1)(3) \\ &= 6(3x + 1) \end{aligned}$$

b. Primero desarrolle $F(x)$. Por tanto,

$$F(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

Después, al diferenciar, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(9x^2 + 6x + 1) \\ &= 18x + 6 \\ &= 6(3x + 1) \end{aligned}$$

como antes. ■

EJEMPLO 2 Al diferenciar la función $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solución Escriba nuevamente la función $G(x)$ como

$$G(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$$

y aplicamos la regla general de potencia, obteniendo

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Diferencie la función $f(x) = x^2(2x + 3)^5$.

Solución Al aplicar la regla del producto seguida por la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}(2x + 3)^5 + (2x + 3)^5\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= (x^2)5(2x + 3)^4 \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) + (2x + 3)^5(2x) \\ &= 5x^2(2x + 3)^4(2) + 2x(2x + 3)^5 \\ &= 2x(2x + 3)^4(5x + 2x + 3) = 2x(7x + 3)(2x + 3)^4 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Determine $f'(x)$ si $f(x) = (2x^2 + 3)^4(3x - 1)^5$.

Solución Al aplicar la regla del producto, tenemos

$$f'(x) = (2x^2 + 3)^4\frac{d}{dx}(3x - 1)^5 + (3x - 1)^5\frac{d}{dx}(2x^2 + 3)^4$$

Después, aplicamos la regla general de potencia en cada término, para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3)^4 \cdot 5(3x - 1)^4\frac{d}{dx}(3x - 1) + (3x - 1)^5 \cdot 4(2x^2 + 3)^3\frac{d}{dx}(2x^2 + 3) \\ &= 5(2x^2 + 3)^4(3x - 1)^4 \cdot 3 + 4(3x - 1)^5(2x^2 + 3)^3(4x) \end{aligned}$$

Por último, observe que $(2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4$ es común en ambos términos, se puede factorizar y simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4[15(2x^2 + 3) + 16x(3x - 1)] \\ &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4(30x^2 + 45 + 48x^2 - 16x) \\ &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4(78x^2 - 16x + 45) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2 - 7)^2}$.

Solución Vuelva a escribir $f(x)$ y después aplique la regla general de potencia, para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(4x^2-7)^2}\right] = \frac{d}{dx}(4x^2-7)^{-2} \\ &= -2(4x^2-7)^{-3}\frac{d}{dx}(4x^2-7) \\ &= -2(4x^2-7)^{-3}(8x) = -\frac{16x}{(4x^2-7)^3} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^3$$

en el punto $(0, \frac{1}{8})$.

Solución La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto está dada por $f'(x)$. Para calcular $f'(x)$, usamos la regla general de potencia seguida por la regla del cociente para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right) \\ &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \left[\frac{(3x+2)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+2)^2}\right] \\ &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \left[\frac{6x+4-6x-3}{(3x+2)^2}\right] \\ &= \frac{3(2x+1)^2}{(3x+2)^4} \end{aligned}$$

(x^2) Vea la página 22.

Combine los términos semejantes y simplifique.

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(0, \frac{1}{8})$ está dada por

$$f'(0) = \frac{3(0+1)^2}{(0+2)^4} = \frac{3}{16}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 6.

1. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función f, utilizando la ventana de visualización $[-2, 1] \times [-1, 2]$. Después dibuje la recta tangente a la gráfica de f en $(0, \frac{1}{8})$.
2. Para una mejor ilustración, repita el paso 1 utilizando la ventana de visualización $[-1, 1] \times [-0.1, 0.3]$.
3. Utilice la capacidad de diferenciación numérica de la calculadora graficadora para verificar que la pendiente de la recta tangente en $(0, \frac{1}{8})$ sea $\frac{3}{16}$.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Crecimiento de la membresía de un club de salud La membresía de The Fitness Center, que se inauguró hace unos años, es aproximada por la función

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{2/3} \qquad (0 \le t \le 52)$$

donde $N(t)$ da el número de miembros al principio de la semana t.

a. Determine $N'(t)$.
b. ¿Qué tan rápido aumentó inicialmente la membresía en el club ($t = 0$)?
c. ¿Qué tan rápido se incrementó la membresía a comienzos de la semana 40?
d. ¿Cuál era el número de miembros cuando se inauguró el club? ¿A principios de la semana 40?

Solución

a. Al utilizar la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{d}{dt}[100(64 + 4t)^{2/3}] \\ &= 100\frac{d}{dt}(64 + 4t)^{2/3} \\ &= 100\left(\frac{2}{3}\right)(64 + 4t)^{-1/3}\frac{d}{dt}(64 + 4t) \\ &= \frac{200}{3}(64 + 4t)^{-1/3}(4) \\ &= \frac{800}{3(64 + 4t)^{1/3}} \end{aligned}$$

b. La tasa en la que la membresía se incrementó cuando el club se abrió por primera vez está dada por

$$N'(0) = \frac{800}{3(64)^{1/3}} \approx 66.7$$

o aproximadamente 67 personas por año.

c. La tasa a la que la membresía se incrementó a principios de la semana 40 está dada por

$$N'(40) = \frac{800}{3(64 + 160)^{1/3}} \approx 43.9$$

o aproximadamente 44 personas por semana.

d. La membresía cuando el club abrió por primera vez está dada por

$$N(0) = 100(64)^{2/3} = 100(16)$$

o aproximadamente 1,600 personas. La membresía a comienzos de la semana 40 está dada por

$$N(40) = 100(64 + 160)^{2/3} \approx 3{,}688.3$$

o aproximadamente 3,688 personas. ■

Explore y analice

La utilidad P del fabricante de un software depende del número de unidades de su producto vendido. El fabricante estima que venderá x unidades de su producto por semana. Suponga que $P = g(x)$ y $x = f(t)$, donde g y f son funciones diferenciables.

1. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio de la utilidad con respecto al número de unidades vendidas.
2. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio del número de unidades vendidas por semana.
3. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio de la utilidad por semana.

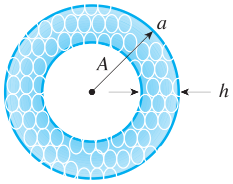

FIGURA 47
Cruza la sección de la aorta.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 La aterosclerosis La aterosclerosis inicia desde la infancia cuando la placa (masas blandas de material graso) se forma en las paredes arteriales, bloqueando el flujo de sangre por las arterias y que llevan a ataques al corazón, derrames cerebrales y gangrena. Suponga que la sección transversal concebida de la aorta es circular con un radio de a cm y al año t el espesor de la placa (suponga que es uniforme) es $h = g(t)$ cm (figura 47). Entonces el área de la abertura está dada por $A = \pi(a - h)^2$ centímetros cuadrados (cm^2).

Suponga que el radio de la arteria de un individuo es de 1 cm ($a = 1$) y que el espesor de la placa en el año t está dado por

$$h = g(t) = 1 - 0.01(10{,}000 - t^2)^{1/2} \text{ cm}$$

Puesto que el área de la apertura arterial está dada por

$$A = f(h) = \pi(1 - h)^2$$

la tasa a la que A está cambiando con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = f'(h) \cdot g'(t) && \textit{Por la regla de la cadena}\\
&= 2\pi(1 - h)(-1)\left[-0.01\left(\frac{1}{2}\right)(10{,}000 - t^2)^{-1/2}(-2t)\right] && \textit{Utilice dos veces la regla de la cadena.}\\
&= -2\pi(1 - h)\left[\frac{0.01t}{(10{,}000 - t^2)^{1/2}}\right]\\
&= -\frac{0.02\pi(1 - h)t}{\sqrt{10{,}000 - t^2}}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, cuando $t = 50$.

$$h = g(50) = 1 - 0.01(10{,}000 - 2{,}500)^{1/2} \approx 0.134$$

así que

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{0.02\pi(1 - 0.134)50}{\sqrt{10{,}000 - 2{,}500}} \approx -0.03$$

Es decir, el área de la abertura arterial disminuye a una tasa de 0.03 cm^2 por año. ■

Explore y analice

Suponga que la población P de un cultivo de ciertas bacterias está dada por $P = f(T)$, donde T es la temperatura del medio. Además, suponga que la temperatura T es una función del tiempo t en segundos, es decir, $T = g(t)$. Dé una interpretación de cada una de las siguientes cantidades.

1. $\dfrac{dP}{dT}$ **2.** $\dfrac{dT}{dt}$ **3.** $\dfrac{dP}{dt}$ **4.** $(f \circ g)(t)$ **5.** $f'(g(t))g'(t)$

9.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

2. Suponga que la esperanza de vida al nacer (en años) de una mujer de cierto país está descrita por la función

$$g(t) = 50.02(1 + 1.09t)^{0.1} \qquad (0 \le t \le 150)$$

donde t está medida en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1900.

a. ¿Cuál es la esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 1980? ¿A principios de 2000?

b. ¿Qué tan rápido ha cambiado la esperanza de vida de una mujer que nace en cualquier momento t?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.6 se pueden encontrar en la página 628.

9.6 Preguntas de concepto

1. En sus palabras, describa la regla de la cadena para diferenciar la función compuesta $h(x) = g[f(x)]$.

2. En sus palabras, describa la regla general de potencia para diferenciar la función $h(x) = [f(x)]^n$, donde n es un número real.

3. Si $f(t)$ da el número de unidades de un cierto producto vendido por una empresa después de t días, y $g(x)$ da la utilidad (en dólares) de la venta realizada de x unidades de los productos de la empresa, ¿qué describe $(g \circ f)'(t)$?

4. Suponga que $f(x)$ da la temperatura del aire en la góndola de un globo aerostático cuando está a una altitud de x pies del suelo y $g(t)$ da la altitud del globo en t minutos después de haberse elevado desde el suelo. Determine una función que dé la tasa de cambio de la temperatura del aire en la góndola en el momento t.

9.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-48 determine la derivada de cada función.

1. $f(x) = (2x - 1)^4$
2. $f(x) = (1 - x)^3$
3. $f(x) = (x^2 + 2)^5$
4. $f(t) = 2(t^3 - 1)^5$
5. $f(x) = (2x - x^2)^3$
6. $f(x) = 3(x^3 - x)^4$
7. $f(x) = (2x + 1)^{-2}$
8. $f(t) = \frac{1}{2}(2t^2 + t)^{-3}$
9. $f(x) = (x^2 - 4)^{3/2}$
10. $f(t) = (3t^2 - 2t + 1)^{3/2}$
11. $f(x) = \sqrt{3x - 2}$
12. $f(t) = \sqrt{3t^2 - t}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$
14. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{(2x + 3)^3}$
16. $f(x) = \dfrac{2}{(x^2 - 1)^4}$
17. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t - 3}}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$
19. $y = \dfrac{1}{(4x^4 + x)^{3/2}}$
20. $f(t) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{2t^2 + t}}$
21. $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)^{-2}$
22. $f(t) = (5t^3 + 2t^2 - t + 4)^{-3}$
23. $f(x) = (x^2 + 1)^3 - (x^3 + 1)^2$
24. $f(t) = (2t - 1)^4 + (2t + 1)^4$
25. $f(t) = (t^{-1} - t^{-2})^3$
26. $f(v) = (v^{-3} + 4v^{-2})^3$
27. $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}$
28. $f(u) = (2u + 1)^{3/2} + (u^2 - 1)^{-3/2}$
29. $f(x) = 2x^2(3 - 4x)^4$
30. $h(t) = t^2(3t + 4)^3$
31. $f(x) = (x - 1)^2(2x + 1)^4$
32. $g(u) = (1 + u^2)^5(1 - 2u^2)^8$
33. $f(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)^3$
34. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^5$
35. $s(t) = \left(\dfrac{t}{2t + 1}\right)^{3/2}$
36. $g(s) = \left(s^2 + \dfrac{1}{s}\right)^{3/2}$
37. $g(u) = \sqrt{\dfrac{u + 1}{3u + 2}}$
38. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{2x - 1}}$
39. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 - 1)^4}$
40. $g(u) = \dfrac{2u^2}{(u^2 + u)^3}$
41. $h(x) = \dfrac{(3x^2 + 1)^3}{(x^2 - 1)^4}$
42. $g(t) = \dfrac{(2t - 1)^2}{(3t + 2)^4}$
43. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{x^2 - 1}$
44. $f(t) = \dfrac{4t^2}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}}$
45. $g(t) = \dfrac{\sqrt{t + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}}$
46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$
47. $f(x) = (3x + 1)^4(x^2 - x + 1)^3$
48. $g(t) = (2t + 3)^2(3t^2 - 1)^{-3}$

En los ejercicios 49-54 determine $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{dy}{dx}$.

49. $y = u^{4/3}$ y $u = 3x^2 - 1$
50. $y = \sqrt{u}$ y $u = 7x - 2x^2$
51. $y = u^{-2/3}$ y $u = 2x^3 - x + 1$
52. $y = 2u^2 + 1$ y $u = x^2 + 1$
53. $y = \sqrt{u} + \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ y $u = x^3 - x$
54. $y = \dfrac{1}{u}$ y $u = \sqrt{x} + 1$

55. Suponga que $F(x) = g(f(x))$ y $f(2) = 3$, $f'(2) = -3$, $g(3) = 5$ y $g'(3) = 4$. Determine $F'(2)$.

56. Suponga que $h = f \circ g$. Determine $h'(0)$ dado que $f(0) = 6$, $f'(5) = -2$, $g(0) = 5$ y $g'(0) = 3$.

57. Suponga que $F(x) = f(x^2 + 1)$. Determine $F'(1)$ si $f'(2) = 3$.

58. Sea $F(x) = f(f(x))$. ¿Se deduce que $F'(x) = [f'(x)]^2$? Sugerencia: Sea $f(x) = x^2$.

59. Suponga que $h = g \circ f$. ¿Se deduce que $h' = g' \circ f'$? Sugerencia: Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

60. Suponga que $h = f \circ g$. Demuestre que $h' = (f' \circ g)g'$.

En los ejercicios 61-64 determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

61. $f(x) = (1 - x)(x^2 - 1)^2$; $(2, -9)$

62. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; $(3, 4)$

63. $f(x) = x\sqrt{2x^2 + 7}$; $(3, 15)$

64. $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x^2 + 6x}}$; $(2, 2)$

65. Televidentes El número de televidentes de una serie de televisión presentada hace varios años es aproximado por la función

$$N(t) = (60 + 2t)^{2/3} \qquad (1 \le t \le 26)$$

donde $N(t)$ (medida en millones) denota el número semanal de televidentes de las series en la semana t. Determine la tasa de crecimiento de la audiencia semanal al final de la segunda semana y al final de la duodécima semana. ¿Cuántos televidentes hubo en la semana 2? ¿En la semana 24?

66. Outsourcing de empleos Según un estudio realizado en 2003, el número total de empleos en Estados Unidos que se proyecta a dejar la ciudad por año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000, es

$$N(t) = 0.0018425(t + 5)^{2.5} \qquad (0 \le t \le 15)$$

donde $N(t)$ está medida en millones. ¿Qué tan rápido cambió el número de empleos que se reclutaron en Estados Unidos en 2005? ¿Qué tan rápido cambiará del número de empleos de Estados Unidos subcontratados a principios de 2010 ($t = 10$)?

Fuente: Forrester Research

67. Madres trabajadoras El porcentaje de madres que trabaja fuera de casa y tiene hijos menores de 6 años es aproximado por la función

$$P(t) = 33.55(t + 5)^{0.205} \qquad (0 \le t \le 21)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1980. Calcule $P'(t)$. ¿A qué tasa cambió el porcentaje de estas madres a principios de 2000? ¿Cuál fue el porcentaje de estas madres a principios de 2000?

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics

68. Precio de venta de grabadoras de DVD El auge de la música digital y el mejoramiento del formato DVD son algunas de las razones por las que el precio de venta promedio en grabadoras de DVD independientes se reducirá en los próximos años. La función

$$A(t) = \frac{699}{(t + 1)^{0.94}} \qquad (0 \le t \le 5)$$

proporciona el precio promedio de la venta proyectada (en dólares) de grabadoras de DVD independientes en el año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 2002. ¿Qué tan rápida fue la caída del precio promedio de la venta de grabadoras de DVD independientes a principios de 2002? ¿Qué tan rápida fue la caída a principios de 2006?

Fuente: Consumer Electronics Association

69. Fondos de responsabilidad social Desde su creación en 1971, las inversiones de fondos de responsabilidad social, o SRI, han dado rentabilidad a los inversionistas a la par que las inversiones en general. Los activos de los fondos de responsabilidad social (en miles de millones de dólares) desde 1991 hasta 2001 están dados por

$$f(t) = 23.7(0.2t + 1)^{1.32} \qquad (0 \le t \le 11)$$

donde $t = 0$ corresponde a principios de 1991.

a. Determine la tasa a la que los activos del SRI fueron cambiando a principios de 2000.

b. ¿Cuáles fueron los activos de SRI a principios de 2000?

Fuente: Thomson Financial Wiesenberger

70. Envejecimiento de la población La población estadounidense de 55 años o más como porcentaje de la población total es aproximado por la función

$$f(t) = 10.72(0.9t + 10)^{0.3} \qquad (0 \le t \le 20)$$

donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000. ¿Cuál fue el porcentaje de la tasa de cambio en la población estadounidense de 55 años y más a principios de 2000? ¿Cuál será el porcentaje de la tasa de cambio de la población estadounidense de 55 años de edad y más en 2010? ¿Cuál será el porcentaje de la población estadounidense de 55 años de edad y más en 2010?

Fuente: U.S. Census Bureau

71. La concentración de monóxido de carbono (CO) en el aire Según un estudio realizado por la gerencia ambiental de Oxnard y la agencia estatal del gobierno, la concentración de CO en el aire se debe al escape de los automóviles en t años a partir de ahora está dada por

$$C(t) = 0.01(0.2t^2 + 4t + 64)^{2/3}$$

partes por millón.

a. Determine la tasa en la que el nivel de CO cambia con respecto al tiempo.

b. Determine la tasa en la que el nivel de CO cambiará en 5 años a partir de ahora.

72. La continuación de la matriculación escolar El secretario de la Universidad de Kellogg estima que el total de estudiantes inscritos en la división de Educación Profesional estará dado por

$$N(t) = -\frac{20{,}000}{\sqrt{1 + 0.2t}} + 21{,}000$$

donde $N(t)$ denota el número de estudiantes inscritos en la división en el año t a partir de ahora. Determine una expresión para $N(t)$. ¿Con qué rapidez está aumentando el número de estudiantes inscritos en la actualidad? ¿Qué tan veloz será su incremento en 5 años a partir de ahora?

73. Contaminación del aire Según la South Coast Air Quality Management District, el nivel de dióxido de nitrógeno, un gas de color marrón que afecta la respiración, presente en la atmósfera en un cierto día de mayo en el centro de Los Ángeles es aproximado por

$$A(t) = 0.03t^3(t - 7)^4 + 60.2 \qquad (0 \le t \le 7)$$

donde $A(t)$ se mide por el índice estándar de contaminación y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m.

a. Determine $A'(t)$.
b. Determine $A'(1)$, $A'(3)$ y $A'(4)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Los Angeles Times

74. Efecto del impuesto de lujo al consumo Los economistas del gobierno de un país en desarrollo determinaron que la compra de perfumes importados se relaciona con una propuesta al "impuesto de lujo" por la fórmula

$$N(x) = \sqrt{10{,}000 - 40x - 0.02x^2} \qquad (0 \le x \le 200)$$

donde $N(x)$ mide el porcentaje del consumo normal de un perfume cuando un "impuesto al lujo" de $x\%$ se le había asignado. Determine la tasa de cambio de $N(x)$ para los impuestos de 10, 100 y 150%.

75. Frecuencia del pulso de un atleta La frecuencia cardíaca (el número de latidos por minuto) de un corredor de larga distancia en t segundos después de salir de la recta de inicio está dada por

$$P(t) = \frac{300\sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{t + 25} \qquad (t \ge 0)$$

Calcule $P'(t)$. ¿A qué tasa aumentó la frecuencia cardíaca de un atleta 10 segundos, 60 segundos y 2 minutos durante la carrera? ¿Cuál es su frecuencia cardíaca a los 2 minutos durante la carrera?

76. Modelo de aprendizaje Thurstone El psicólogo L.L. Thurstone sugirió la siguiente relación entre el tiempo de aprendizaje T y la longitud de una lista n:

$$T = f(n) = An\sqrt{n - b}$$

donde A y b son constantes que dependen de la persona y la tarea.
a. Calcule dT/dn e interprete su resultado.
b. Para una persona y una tarea determinadas, suponga que $A = 4$ y $b = 4$. Calcule $f'(13)$ y $f'(29)$ e interprete sus resultados.

77. Derrames de hidrocarburos En aguas tranquilas, el derrame de hidrocarburos de una ruptura del casco de un buque cisterna encallado se extiende en todas direcciones. Suponga que la superficie contaminada es un círculo y que su radio aumenta a una velocidad de 2 pies/seg, determine que tan rápido aumenta el área cuando el radio del círculo es de 40 pies.

78. La aterosclerosis Consulte el ejemplo 8, página 624. Suponga que el radio de la arteria de un individuo es de 1 cm y el espesor de la placa (en centímetros) t años a partir de ahora está dada por

$$h = g(t) = \frac{0.5t^2}{t^2 + 10} \qquad (0 \le t \le 10)$$

¿Qué tan rápido la apertura arterial disminuirá en 5 años a partir de ahora?

79. Flujo de tráfico Inaugurada a finales de 1950, la Arteria Central en el centro de Boston fue diseñada para mover 75,000 automóviles por día. El número de automóviles que circulan por día es aproximado por la función

$$x = f(t) = 6.25t^2 + 19.75t + 74.75 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde x se mide en miles y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1959. Suponga que la velocidad promedio del flujo del tráfico en mph está dado por

$$S = g(x) = -0.00075x^2 + 67.5 \qquad (75 \le x \le 350)$$

donde x tiene el mismo significado que antes. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la velocidad promedio del flujo del tráfico a principios de 1999? ¿Cuál fue la velocidad promedio del flujo de tráfico en ese momento?
Sugerencia: $S = g[f(t)]$.

80. Tasas de ocupación de un hotel La tasa de ocupación de todas las suites del hotel Wonderland, situado cerca del parque de atracciones, está dada por la función

$$r(t) = \frac{10}{81}t^3 - \frac{10}{3}t^2 + \frac{200}{9}t + 60 \qquad (0 \le t \le 12)$$

donde t se mide en meses, con $t = 0$ corresponde a principios de enero. La dirección ha estimado que el ingreso mensual (en miles de dólares por mes) es aproximado por la función

$$R(r) = -\frac{3}{5{,}000}r^3 + \frac{9}{50}r^2 \qquad (0 \le r \le 100)$$

donde r es la tasa de ocupación.
a. Determine una expresión que dé la tasa de variación del índice de ocupación de Wonderland con respecto al tiempo.
b. Determine una expresión que dé la tasa de variación de la utilidad mensual de Wonderland con respecto a la tasa de ocupación.
c. ¿Cuál es la tasa de variación de la utilidad mensual de Wonderland con respecto al tiempo a principios de enero? ¿A principios de julio?
Sugerencia: Utilice la regla de la cadena para determinar $R'(r(0))r'(0)$ y $R'(r(6))r'(6)$.

81. Efecto de la construcción de vivienda en el empleo El presidente de una importante compañía de construcción de vivienda afirmó que el número de empleos creados en la construcción está dada por

$$N(x) = 1.42x$$

donde x denota el número de viviendas en construcción. Suponga que el número de viviendas construidas en el próximo mes t se espera que sea

$$x(t) = \frac{7t^2 + 140t + 700}{3t^2 + 80t + 550}$$

un millón de unidades por año. Determine una expresión que dé la tasa a la que se crearán los empleos en la construcción en t meses a partir de ahora. ¿A qué tasa se crearán los empleos a 1 año a partir de ahora?

82. Demanda de PC La cantidad demandada por mes, x, de una cierta marca de computadora personal (PC) se relaciona con el precio unitario promedio, p (en dólares) de la PC por la ecuación

$$x = f(p) = \frac{100}{9}\sqrt{810{,}000 - p^2}$$

Se estima que en t meses, a partir de ahora, el precio promedio de una PC estará dada por

$$p(t) = \frac{400}{1 + \frac{1}{8}\sqrt{t}} + 200 \qquad (0 \le t \le 60)$$

dólares. Determine la tasa en la que la cantidad demandada por mes de las PC cambiará en 16 meses a partir de ahora.

83. Demanda de relojes La ecuación de la demanda por el reloj de pulsera Sicard está dada por

$$x = f(p) = 10\sqrt{\frac{50 - p}{p}} \qquad (0 < p \le 50)$$

donde x (medida en unidades de millar) es la cantidad demandada por semana y p es el precio unitario en dólares. Determine la tasa de cambio de la cantidad demandada de los relojes de pulsera con respecto al precio unitario cuando este es de \$25.

84. Reservaciones para un crucero La gerencia de operaciones del Cruise World, cruceros de lujo por el Caribe, espera que el porcentaje de jóvenes que reserve su pasaje en sus cruceros en los próximos años se incrementará drásticamente. Han construido el siguiente modelo, que da el porcentaje de los jóvenes pasajeros en el año t:

$$p = f(t) = 50\left(\frac{t^2 + 2t + 4}{t^2 + 4t + 8}\right) \qquad (0 \le t \le 5)$$

Los jóvenes eligen normalmente cruceros más cortos y por lo general gastan menos en su pasaje. El siguiente modelo da una aproximación de la cantidad promedio de dinero R (en dólares) gastados por pasajero sobre un crucero cuando el porcentaje de jóvenes es p:

$$R(p) = 1{,}000\left(\frac{p + 4}{p + 2}\right)$$

Determine la tasa a la que el precio del pasaje promedio cambiará en 2 años a partir de ahora.

En los ejercicios 85-88, determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, porporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

85. Si f y g son diferenciables y $h = f \circ g$, entonces $h'(x) = f'[g(x)]g'(x)$.

86. Si f es diferenciable y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(cx)] = cf'(cx)$$

87. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

88. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

89. En la sección 9.4, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

en el caso especial cuando $n = 2$. Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(x^{1/n}) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

por cualquier entero distinto a cero, asumiendo que $f(x) = x^{1/n}$ es diferenciable.
Sugerencia: Sea $f(x) = x^{1/n}$ así que $[f(x)]^n = x$. Diferencie ambos lados con respecto a x.

90. Con la ayuda del ejercicio 89, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

por cualquier número racional r.
Sugerencia: Sea $r = m/n$, donde m y n son enteros, con $n \ne 0$, y escriba $x^r = (x^m)^{1/n}$.

9.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al volver a escribir, tenemos

$$f(x) = -(2x^2 - 1)^{-1/2}$$

Al utilizar la regla general de potencia, determinamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{d}{dx}(2x^2 - 1)^{-1/2} \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 1)^{-3/2}\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 - 1)^{-3/2}(4x) \\ &= \frac{2x}{(2x^2 - 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

2. a. La esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 1980 está dada por

$$g(80) = 50.02[1 + 1.09(80)]^{0.1} \approx 78.29$$

o aproximadamente 78 años. De igual forma, la esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 2000 está dada por

$$g(100) = 50.02[1 + 1.09(100)]^{0.1} \approx 80.04$$

o aproximadamente 80 años.

b. La tasa de cambio en la esperanza de vida de una mujer nacida en cualquier momento t está dada por $g'(t)$. Al utilizar la regla general de potencia, tenemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= 50.02\frac{d}{dt}(1 + 1.09t)^{0.1} \\ &= (50.02)(0.1)(1 + 1.09t)^{-0.9}\frac{d}{dt}(1 + 1.09t) \\ &= (50.02)(0.1)(1.09)(1 + 1.09t)^{-0.9} \\ &= 5.45218(1 + 1.09t)^{-0.9} \\ &= \frac{5.45218}{(1 + 1.09t)^{-0.9}} \end{aligned}$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de la derivada de una función compuesta

EJEMPLO 1 Determine la tasa de cambio de $f(x) = \sqrt{x}(1 + 0.02x^2)^{3/2}$ cuando $x = 2.1$.

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos

$$f'(2.1) = 0.5821463392$$

o aproximadamente 0.58 unidades por unidad de cambio en x (vea la figura T1).

```
nDeriv(X^.5(1+.0
2X^2)^1.5, X, 2.1)

      .5821463392
█
```

FIGURA **T1**
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica para calcular $f'(2.1)$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Asistencia al parque de diversiones La gerencia de AstroWorld ("El parque de atracciones del futuro") estima que el numero total de visitantes (en miles) al parque de diversiones en t horas después de la hora de apertura a las 9 a.m., está dado por

$$N(t) = \frac{30t}{\sqrt{2 + t^2}}$$

¿Cuál es la tasa a la que los visitantes son admitidos al parque de diversiones a las 10:30 a.m.?

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos

$$N'(1.5) \approx 6.8481$$

o aproximadamente 6,848 visitantes por hora (vea la figura T2).

```
nDeriv((30X)/(2+
X^2)^.5,X,1.5)
        6.848066034
█
```

FIGURA **T2**
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $N'(1.5)$

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6 utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de *f*(*x*) en el valor dado de *x*. Proporcione su respuesta precisa a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$; $x = 0.5$
2. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$; $x = 0.4$
3. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$; $x = 0.2$
4. $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 4})^{3/2}$; $x = 1$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3 + 2}$; $x = -1$
6. $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + (1 + x^2)^{3/2}}$; $x = 3$
7. **Producción mundial de automóviles** La producción mundial de automóviles entre 1960 y 1990 está dada por la función

$$f(t) = 16.5\sqrt{1 + 2.2t} \qquad (0 \le t \le 3)$$

donde $f(t)$ se mide en unidades de un millón y t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1960. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la producción mundial de vehículos a principios de 1970? ¿A principios de 1980?

Fuente: Automotive News

8. **Acumulación de años** Las personas de 40 y 50 años y medio están en los primeros años de inversión. Los estudios demográficos de este tipo son de particular importancia para las instituciones financieras. La función

$$N(t) = 34.4(1 + 0.32125t)^{0.15} \qquad (0 \le t \le 12)$$

da el número proyectado del grupo de personas en esta edad en Estados Unidos (en millones) al año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 1996.

a. ¿Qué tan grande fue el segmento de la población proyectado a principios de 2005?

b. ¿Qué tan rápido creció el segmento de la población a principios de 2005?

Fuente: U.S. Census Bureau

9.7 Diferenciación de funciones exponenciales y logarítmicas

La derivada de una función exponencial

Para estudiar los efectos del presupuesto de los planes de reducción del déficit en los diferentes niveles de ingresos, es importante conocer la distribución de los ingresos de las familias norteamericanas. Con base en los datos de House Budget Committee, House Ways and Means Committee y la U.S. Census Bureau, la gráfica de f se muestra en la figura 48 e indica el número de familias norteamericanas y (en millones) en función de sus ingresos anuales x (en miles de dólares) en 1990.

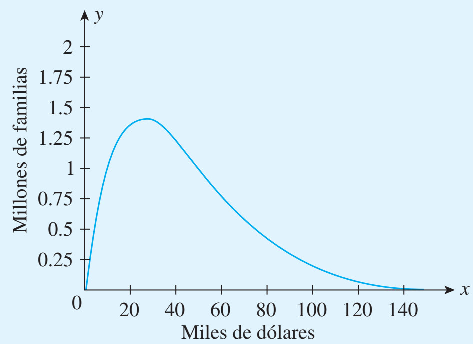

FIGURA 48 La gráfica de f muestra el número de familias frente a su ingreso anual

Fuente: House Budget Committee, House Ways and Means Committee y la U.S. Census Bureau

Observe que la gráfica de f se eleva muy rápidamente, y después declina. En la gráfica de f, se puede ver que la mayoría de las familias norteamericanas ganó menos de \$100,000 por año. De hecho, 95% de las familias norteamericanas ganó menos de \$102,358 por año en 1990 (se hace de nuevo referencia a este modelo en el uso de la tecnología al final de esta sección).

Para el análisis de modelos matemáticos que implican funciones exponenciales y logarítmicas con mayor detalle, se tienen que desarrollar normas para el cálculo de la derivada de estas funciones. Se empieza por observar la regla para el cálculo de la derivada de la función exponencial.

Regla 8: La derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Por tanto, la derivada de la función exponencial con base e es igual a la función misma. Para demostrar la validez de esta regla, calculamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} && \text{Escriba } e^{x+h} = e^x e^h \text{ y factorice.} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} && \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

Para evaluar

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

observe la tabla 5, que está construida con la ayuda de una calculadora. Desde la tabla observamos que

TABLA 5

h	$\frac{e^h - 1}{h}$
0.1	1.0517
0.01	1.0050
0.001	1.0005
−0.1	0.9516
−0.01	0.9950
−0.001	0.9995

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(Aunque una prueba rigurosa de este hecho es posible, está más allá del alcance de este libro. Vea también el ejemplo 1 de la sección "Uso de la tecnología" de la página 640). Al utilizar este resultado, concluimos que

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

como se propuso demostrar.

EJEMPLO 1 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2e^x$ **b.** $g(t) = (e^t + 2)^{3/2}$

Solución

a. La regla del producto da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2e^x) = x^2\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2) \end{aligned}$$

(x^2) Ver página 16.

b. Al utilizar la regla general de potencia, determinamos

$$g'(t) = \frac{3}{2}(e^t + 2)^{1/2}\frac{d}{dt}(e^t + 2) = \frac{3}{2}(e^t + 2)^{1/2}e^t = \frac{3}{2}e^t(e^t + 2)^{1/2}$$

Exploración con TECNOLOGÍA

Considere la función exponencial $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Utilice la definición de la derivada de una función para demostrar que

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

2. Utilice el resultado del punto 1 para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h}$$

3. Utilice la técnica en la sección "Uso de la tecnología", página 640, para demostrar que (a dos posiciones decimales)

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} = 0.69 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.10$$

4. Concluya de los resultados de los puntos 2 y 3 que

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

(*continúa*)

Así,

$$\frac{d}{dx}(b^x) = k \cdot b^x$$

donde k es una constante apropiada.

5. Los resultados del punto 4 sugieren que, por conveniencia, elija la base b, donde $2 < b < 3$, así que $k = 1$. Este valor de b es $e \approx 2.718281828. \ldots$ Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(e^x) \approx e^x$$

Éste es el porqué se prefiere trabajar con la función exponencial $f(x) = e^x$.

Aplicación de la regla de la cadena a las funciones exponenciales

Para ampliar la clase de funciones exponenciales a ser diferenciadas, se apela a la regla de la cadena para obtener la siguiente regla para diferenciar funciones compuestas de la forma $h(x) = e^{f(x)}$. Un ejemplo de dicha función es $h(x) = e^{x^2-2x}$. Aquí, $f(x) = x^2 - 2x$.

Regla 9: Regla de la cadena para funciones exponenciales

Si $f(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)}f'(x)$$

Para ver esto, observe que si $h(x) = g[f(x)]$, donde $g(x) = e^x$, después por virtud de la regla de la cadena,

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{f(x)}f'(x)$$

ya que $g'(x) = e^x$.

Como ayuda para recordar la regla de la cadena para funciones exponenciales, observe que ésta tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{e^{f(x)}) = e^{f(x)}}_{\text{Mismo}} \cdot \text{ derivada del exponente}$$

EJEMPLO 2 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^{2x}$ **b.** $y = e^{-3x}$ **c.** $g(t) = e^{2t^2+t}$

Solución

a. $f'(x) = e^{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-3x}\dfrac{d}{dx}(-3x) = -3e^{-3x}$

c. $g'(t) = e^{2t^2+t} \cdot \dfrac{d}{dt}(2t^2 + t) = (4t + 1)e^{2t^2+t}$ ■

EJEMPLO 3 Diferencie la función $y = xe^{-2x}$.

Solución Al utilizar la regla del producto, seguida por la regla de la cadena, determinamos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x\frac{d}{dx}e^{-2x} + e^{-2x}\frac{d}{dx}(x)\\ &= xe^{-2x}\frac{d}{dx}(-2x) + e^{-2x} && \text{Utilice la regla de la cadena sobre el primer término.}\\ &= -2xe^{-2x} + e^{-2x}\\ &= e^{-2x}(1 - 2x)\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Diferencie la función $g(t) = \dfrac{e^t}{e^t + e^{-t}}$.

Solución Al utilizar la regla del cociente, seguida por la regla de la cadena, determinamos

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{(e^t + e^{-t})\frac{d}{dt}(e^t) - e^t\frac{d}{dt}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\\ &= \frac{(e^t + e^{-t})e^t - e^t(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} && \text{Vea la página 11.}\\ &= \frac{e^{2t} + 1 - e^{2t} + 1}{(e^t + e^{-t})^2} && e^0 = 1\\ &= \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 En la sección 3.3 se estudiaron algunas aplicaciones de la función exponencial

$$Q(t) = Q_0e^{kt}$$

donde Q_0 y k son constantes positivas y $t \in [0, \infty)$. Una cantidad $Q(t)$ que crece con base en esta ley experimenta un crecimiento exponencial. Demuestre que para la cantidad $Q(t)$ que experimenta el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento de la cantidad $Q'(t)$ en cualquier momento t es directamente proporcional a la cantidad actual.

Solución Al utilizar la regla de cadena para funciones exponenciales, calculamos la derivada Q' de la función Q. Por tanto,

$$\begin{aligned}Q'(t) &= Q_0e^{kt}\frac{d}{dt}(kt)\\ &= Q_0e^{kt}(k)\\ &= kQ_0e^{kt}\\ &= kQ(t) && Q(t) = Q_0e^{kt}\end{aligned}$$

que es la conclusión deseada. ■

La derivada de ln *x*

Ahora enfoque su atención en la diferenciación de funciones logarítmicas.

Regla 10: La derivada de ln *x*

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Para obtener la regla 10, suponga que $x > 0$ y escriba $f(x) = \ln x$ en la forma equivalente

$$x = e^{f(x)}$$

Para diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a x determinamos, utilizando la regla de cadena,

$$1 = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

de la cual vemos que

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

o, puesto que $e^{f(x)} = x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

como se propuso demostrar. Se le pide compruebe la regla para el caso $x < 0$ en el ejercicio 85, página 639.

EJEMPLO 6 Determine la derivada de cada función:

a. $f(x) = x \ln x$ **b.** $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Solución

a. Al utilizar la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x \ln x) = x\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(x) \\ &= x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x \end{aligned}$$

b. Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$g'(x) = \frac{x\dfrac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{x\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Explore y analice

Puede obtener la fórmula para la derivada de $f(x) = \ln x$ directamente de la definición de la derivada, de la forma siguiente,

1. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

2. Coloque $m = x/h$ y observe que $m \to \infty$ como $h \to 0$. Entonces, $f'(x)$ puede escribirse en la forma

$$f'(x) = \lim_{m \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m/x}$$

3. Finalmente, utilice tanto el hecho que la función logarítmica natural es continua como la definición del número e para demostrar que

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] = \frac{1}{x}$$

La regla de la cadena para funciones logarítmicas

Para ampliar la clase de funciones logarítmicas para ser diferenciadas, se apela una vez más a la regla de cadena para obtener la siguiente regla para la diferenciación de funciones compuestas de la forma $h(x) = \ln f(x)$, donde $f(x)$ se supone sea una función diferenciable positiva.

Regla 11: Regla de la cadena para funciones logarítmicas

Si $f(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'x}{f(x)} \qquad [f(x) > 0]$$

Para ver esto, observe que $h(x) = g[f(x)]$, donde $g(x) = \ln x$ $(x > 0)$. Ya que $g'(x) = 1/x$, se tiene, al utilizar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Observe que en el caso especial $f(x) = x$, $h(x) = \ln x$, así que la derivada de h es, por la regla 10, dada por $h'(x) = 1/x$.

EJEMPLO 7 Determine la derivada de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución Al utilizar la regla 11, observamos de inmediato que

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Al diferenciar funciones que involucran logaritmos, las reglas de los logaritmos pueden utilizarse como ventaja, como se muestra en los ejemplos 8 y 9.

EJEMPLO 8 Diferencie la función $y = \ln[(x^2 + 1)(x^3 + 2)^6]$.

Solución Primero escribimos nuevamente la función dada y utilizamos las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} y &= \ln[(x^2 + 1)(x^3 + 2)^6] \\ &= \ln(x^2 + 1) + \ln(x^3 + 2)^6 && \ln mn = \ln m + \ln n \\ &= \ln(x^2 + 1) + 6\ln(x^3 + 2) && \ln m^n = n \ln m \end{aligned}$$

Al diferenciar y utilizar la regla 11, obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{6\frac{d}{dx}(x^3 + 2)}{x^3 + 2} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{6(3x^2)}{x^3 + 2} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{18x^2}{x^3 + 2} \end{aligned}$$

Exploración con TECNOLOGÍA

Utilice una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x) = \ln x$; su primera función derivada $f'(x) = 1/x$; y su segunda función derivada $f''(x) = -1/x^2$, utilizando la misma ventana de visualización $[0, 4] \times [-3, 3]$.

1. ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de f'?
2. ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de f''?

EJEMPLO 9 Determine la derivada de la función $g(t) = \ln(t^2 e^{-t^2})$.

Solución Aquí nuevamente, para salvar todo el trabajo, primero simplificamos la expresión dada utilizando las propiedades de los logaritmos. Tenemos

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(t^2 e^{-t^2}) \\ &= \ln t^2 + \ln e^{-t^2} && \ln mn = \ln m + \ln n \\ &= 2 \ln t - t^2 && \ln m^n = n \ln m \quad \text{y} \quad \ln e = 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g'(t) = \frac{2}{t} - 2t = \frac{2(1 - t^2)}{t}$$

Los ejemplos 10 y 11 involucrados determinan la tasa de cambio de una función exponencial.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Depreciación de los activos Un activo industrial se amortiza a una tasa, de modo que su valor en libros t años a partir de ahora será de

$$V(t) = 50{,}000e^{-0.4t}$$

dólares. ¿Qué tan rápido el valor en libros del activo cambiará en 3 años a partir de ahora?

Solución La tasa de cambio del valor en libros del activo en t años a partir de ahora es

$$\begin{aligned} V'(t) &= 50{,}000 \frac{d}{dt} e^{-0.4t} \\ &= 50{,}000(-0.4)e^{-0.4t} = -20{,}000e^{-0.4t} \end{aligned}$$

Así, en 3 años a partir de ahora el valor en libros del activo cambiará a una tasa de

$$V'(3) = -20{,}000e^{-0.4(3)} = -20{,}000e^{-1.2} \approx -6023.88$$

es decir, decrece a la tasa de aproximadamente \$6,024 por año.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Uso de Internet Según los cibernautas, las conexiones a Internet están proliferando a una tasa cada vez mayor. El número de equipos CPU (en millones) se estima sean

$$N(t) = 3.45e^{0.64t} \qquad (0 \le t \le 6)$$

en el año t ($t = 0$ corresponde a principios de 1994). ¿Qué tan rápido creció el número de computadoras CPU a principios de 1996? ¿A principios de 1999?

Fuente: Cibernautas

Solución La tasa de crecimiento de las computadoras CPU en el momento t está dada por

$$\begin{aligned} N'(t) &= (3.45)(0.64)e^{0.64t} \\ &= 2.208e^{0.64t} \end{aligned}$$

En particular, la tasa de crecimiento de las computadoras CPU a principios de 1996 está dada por

$$N'(2) = 2.208e^{0.64(2)} = 7.94138$$

o aproximadamente 7.94 millones de computadoras por año. La tasa de crecimiento de las computadoras CPU a principios de 1999 está dada por

$$N'(5) = 2.208e^{0.64(5)} = 54.16783$$

o aproximadamente 54.17 millones de computadoras por año. ■

9.7 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la primera y segunda derivadas de $f(x) = xe^{-x}$.
2. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x \ln(2x + 3)$ en el punto $(-1, 0)$.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.7 pueden encontrarse en la página 640.

9.7 Preguntas de concepto

1. Exponga la regla para diferenciar (a) $f(x) = e^x$ y (b) $g(x) = e^{f(x)}$, donde f es una función diferenciable.
2. Sea $f(x) = e^{kx}$.
   a. Calcule $f'(x)$.
   b. Utilice el resultado para deducir el signo de f' para el caso $k > 0$ y el caso $k < 0$.
3. Exprese la regla para diferenciar (a) $f(x) = \ln|x|$ $(x \neq 0)$, y $g(x) = \ln f(x)$ $[f(x) > 0]$, donde f es una función diferenciable.

9.7 Ejercicios

En los ejercicios 1-28 determine las derivadas de la función.

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = 3e^x$
3. $g(t) = e^{-t}$
4. $f(x) = e^{-2x}$
5. $f(x) = e^x + x$
6. $f(x) = 2e^x - x^2$
7. $f(x) = x^3e^x$
8. $f(u) = u^2e^{-u}$
9. $f(x) = \dfrac{2e^x}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
11. $f(x) = 3(e^x + e^{-x})$
12. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
13. $f(w) = \dfrac{e^w + 1}{e^w}$
14. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
15. $f(x) = 2e^{3x-1}$
16. $f(t) = 4e^{3t+2}$
17. $h(x) = e^{-x^2}$
18. $f(x) = e^{x^2-1}$
19. $f(x) = 3e^{-1/x}$
20. $f(x) = e^{1/(2x)}$
21. $f(x) = (e^x + 1)^{25}$
22. $f(x) = (4 - e^{-3x})^3$
23. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
24. $f(t) = -e^{-\sqrt{2t}}$
25. $f(x) = (x - 1)e^{3x+2}$
26. $f(s) = (s^2 + 1)e^{-s^2}$
27. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
28. $g(t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + t^2}$

En los ejercicios 29-32 determine la segunda derivada de la función.

29. $f(x) = e^{-4x} + 2e^{3x}$
30. $f(t) = 3e^{-2t} - 5e^{-t}$
31. $f(x) = 2xe^{3x}$
32. $f(t) = t^2e^{-2t}$
33. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{2x-3}$ en el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.
34. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x^2}$ en el punto $= \left(1, \frac{1}{e}\right)$.

En los ejercicios 35-62 determine la derivada de la función.

35. $f(x) = 5 \ln x$
36. $f(x) = \ln 5x$
37. $f(x) = \ln(x + 1)$
38. $g(x) = \ln(2x + 1)$
39. $f(x) = \ln x^8$
40. $h(t) = 2 \ln t^5$
41. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
42. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$
43. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2}$
44. $f(x) = \ln \dfrac{1}{2x^3}$
45. $f(x) = \ln(4x^2 - 6x + 3)$

46. $f(x) = \ln(3x^2 - 2x + 1)$

47. $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x + 1}$

48. $f(x) = \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$

49. $f(x) = x^2 \ln x$

50. $f(x) = 3x^2 \ln 2x$

51. $f(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$

52. $f(x) = \dfrac{3 \ln x}{x^2}$

53. $f(u) = \ln(u - 2)^3$

54. $f(x) = \ln(x^3 - 3)^4$

55. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

56. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

57. $f(x) = (\ln x)^3$

58. $f(x) = 2(\ln x)^{3/2}$

59. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

60. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 4}$

61. $f(x) = e^x \ln x$

62. $f(x) = e^x \ln\sqrt{x + 3}$

En los ejercicios 63-66 determine la segunda derivada de la función.

63. $f(x) = \ln 2x$

64. $f(x) = \ln(x + 5)$

65. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

66. $f(x) = (\ln x)^2$

67. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x \ln x$ en el punto (1, 0).

68. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de $y = \ln x^2$ en el punto (2, ln 4).

69. **Porcentaje de reubicación de la población** Con base en datos obtenidos de Census Bureau, el gerente de Plymouth Van Lines estima que el porcentaje de la población total reubicado en el año t ($t = 0$ corresponde al año 1960) se puede aproximar por la fórmula

$$P(t) = 20.6e^{-0.009t} \qquad (0 \le t \le 35)$$

Calcule $P'(10)$, $P'(20)$ y $P'(30)$ e interprete sus resultados.

70. **Banca en línea** En un estudio elaborado en 2000, el porcentaje de hogares que utiliza la banca en línea se prevé que sea

$$f(t) = 1.5e^{0.78t} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 2000.

a. ¿Cuál fue el porcentaje proyectado de hogares que utiliza la banca en línea a principios de 2003?

b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en el porcentaje proyectado de hogares que usa la banca en línea al inicio de 2003?

c. ¿Qué tan rápido fue el cambio de la tasa del porcentaje proyectado de hogares que usa la banca en línea a principios de 2003?

Sugerencia: Se quiere $f''(3)$. ¿Por qué?

Fuente: Online Banking Report

71. **Población con más de 100 años de edad** Con base en datos obtenidos de Census Bureau, el número de estadounidenses con edad de más de 100 años se espera que sea

$$P(t) = 0.07e^{0.54t} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde $P(t)$ se mide en millones y t se mide en décadas, con $t = 0$ corresponde a principios de 2000.

a. ¿Cuál fue la población de estadounidenses mayores de 100 a principios de 2000? ¿Cuál será a principios de 2030?

b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en la población de estadounidenses con más de 100 años de edad a principios de 2000? ¿Qué tan rápido será el cambio a principios de 2030?

Fuente: U.S. Census Bureau

72. **Crecimiento de la población mundial** Después de su tasa de crecimiento cada vez mayor durante las décadas de 1980 y 1990, la tasa de crecimiento de la población mundial se desacelerará considerablemente en el siglo XXI. La función

$$G(t) = 1.58e^{-0.213t}$$

da la tasa anual proyectada en el crecimiento promedio de la población/década en la $t$ava década, con $t = 1$ correspondiente a 2000.

a. ¿Cuál será la tasa proyectada del promedio anual de crecimiento de la población en 2020 ($t = 3$)?

b. ¿Qué tan rápido cambiará la tasa proyectada del promedio anual del crecimiento de la población en 2020?

Fuente: U.S. Census Bureau

73. **Muertes debidas a derrames cerebrales** Antes de 1950 poco se sabía acerca de los derrames cerebrales. En 1960, sin embargo, los factores de riesgo como la hipertensión fueron identificados. En los últimos años, el escáner CAT se usa como una herramienta de diagnóstico que ha ayudado a prevenir los derrames cerebrales. Como resultado, la muerte por derrames cerebrales ha disminuido drásticamente. La función

$$N(t) = 130.7e^{-0.1155t^2} + 50 \qquad (0 \le t \le 6)$$

da el número de muertes por cada 100,000 habitantes entre 1950 hasta 2010, donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 1950.

a. ¿Cuántas muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 personas hubo en 1950?

b. ¿Qué tan rápido cambió el número de muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 personas en 1950? ¿En 1960? ¿En 1970? ¿En 1980?

c. Si la tendencia continúa, ¿cuántas muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 habitantes habrá en 2010?

Fuente: American Heart Association, Centers for Disease Control and National Institute of Health

74. **Viajes en avión** El transporte aéreo ha ido en aumento de forma espectacular en los últimos 30 años. En un estudio realizado en 2000, la FAA proyectó un crecimiento más exponencial para el transporte aéreo hasta 2010. La función

$$f(t) = 666e^{0.0413t} \qquad (0 \le t \le 11)$$

da el número de pasajeros (en millones) en el año t, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

a. ¿Cuántos pasajeros por aire estaban allí en 2000? ¿Cuál fue el número previsto de pasajeros por aire para 2005?

b. ¿Cuál fue la tasa de cambio del número de pasajeros por aire en 2005?

Fuente: Federal Aviation Administration

75. **Nivel de alcohol en la sangre** El porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona en t h después de haber bebido 8 onzas de whisky está dada por

$$A(t) = 0.23te^{-0.4t} \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

a. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona después de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Después de 8 horas?
b. ¿Qué tan rápido cambia el porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona después de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Después de 8 horas?

Fuente: Enciclopedia Británica

76. **Lecturas del termómetro** Un termómetro se mueve desde el interior de una casa hasta la terraza. Su temperatura en t minutos después de que se ha movido está dada por

$$T(t) = 30 + 40e^{-0.98t}$$

a. ¿Cuál es la temperatura en el interior de la casa?
b. ¿Qué tan rápido cambia la lectura en el termómetro 1 minuto después de que se sacó de la casa?
c. ¿Cuál es la temperatura al aire libre?
Sugerencia: Evalúe $\lim_{t \to \infty} T(t)$.

77. **Promoción de ventas** Lady Bug, una cadena de tiendas de ropa para mujer, determinó que t días después del final de una promoción el volumen de ventas estaba dado por

$$S(t) = 20{,}000(1 + e^{-0.5t}) \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

dólares.
a. Determine la tasa de cambio en el volumen de ventas de Lady Bug en $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.
b. ¿Después de cuántos días el volumen de ventas caerá por debajo de \$27,400?

78. **Consumo de energía de aparatos** El consumo promedio de energía de un refrigerador/congelador típico fabricado por York Industries es de aproximadamente

$$C(t) = 1{,}486e^{-0.073t} + 500 \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

kilowatts por hora (kWh) al año, donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1972.
a. ¿Cuál fue el consumo promedio de energía del refrigerador/congelador York a principios de 1972?
b. Demuestre que el consumo promedio de energía del refrigerador/congelador York disminuye con los años en cuestión.
c. Todos los refrigeradores/congeladores fabricados el 1 de enero de 1990 deben cumplir con los estándares de 950 kWh por año de consumo máximo de energía establecidos por la Ley de Conservación Nacional de Aparatos. Demuestre que el refrigerador/congelador York cumple con este requisito.

79. **Precio del perfume** La demanda mensual de una determinada marca de perfume está dada por la ecuación

$$p = 100e^{-0.0002x} + 150$$

donde p denota el precio unitario de venta (en dólares) y x denota la cantidad demandada (en frascos de 1 onza).
a. Determine la tasa de cambio del precio por botella cuando $x = 1{,}000$ y $x = 2{,}000$.
b. ¿Cuál es el precio por botella cuando $x = 1{,}000$? ¿Cuando $x = 2{,}000$?

80. **Inmunización contra la poliomielitis** La poliomielitis, el asesino una vez tan temido, disminuyó notablemente en la década de 1950 en Estados Unidos, después de que Jonas Salk desarrollara la vacuna que inactivaba la polio y que llevó a cabo una inmunización masiva de niños. El número de casos de polio en dicho país desde principios de 1959 hasta principios de 1963 es aproximado por la función

$$N(t) = 5.3e^{0.095t^2 - 0.85t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $N(t)$ da el número de casos de polio (en miles) y t se mide en años con $t = 0$ correspondiente al comienzo de 1959.
a. Demuestre que la función N es decreciente sobre el intervalo de tiempo en consideración.
b. ¿Qué tan rápido disminuyó el número de casos de polio a principios de 1959? ¿A principios de 1962? (*comentario:* la siguiente presentación de la vacuna oral fue desarrollada por el doctor Albert B. Sabin en 1963, la polio en Estados Unidos había sido, por todos los propósitos prácticos, eliminada).

81. **Petróleo utilizado para alimentar la productividad económica** Un estudio sobre el uso mundial del petróleo fue desarrollado por una importante compañía petrolera. El estudio predijo que la cantidad de petróleo empleada como combustible para la productividad de un país estaba dada por

$$f(t) = 1.5 + 1.8te^{-1.2t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $f(t)$ denota el número de barriles por cada \$1,000 de la producción económica y t se mide en décadas ($t = 0$ corresponde a 1965). Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ e interprete sus resultados.

En los ejercicios 82-84 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

82. Si $f(x) = 3^x$, entonces $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$.

83. Si $f(x) = e^{\pi}$, entonces $f'(x) = e^{\pi}$.

84. Si $f(x) = \ln 5$, entonces $f'(x) = \frac{1}{5}$.

85. Demuestre que $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ para el caso $x < 0$.

86. Utilice la definición de la derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

9.7 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al utilizar la regla del producto, obtenemos

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}e^{-x} + e^{-x}\frac{d}{dx}x$$
$$= -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Al utilizar nuevamente la regla del producto, obtenemos

$$f''(x) = (1-x)\frac{d}{dx}e^{-x} + e^{-x}\frac{d}{dx}(1-x)$$
$$= (1-x)(-e^{-x}) + e^{-x}(-1)$$
$$= -e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto $(x, f(x))$ que permanece sobre la gráfica de f está dada por $f'(x)$. Al utilizar la regla del producto, se determina

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\ln(2x+3)]$$
$$= x\frac{d}{dx}\ln(2x+3) + \ln(2x+3)\cdot\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x\left(\frac{2}{2x+3}\right) + \ln(2x+3)\cdot 1$$
$$= \frac{2}{2x+3} + \ln(2x+3)$$

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$ es

$$f'(-1) = \frac{-2}{-2x+3} + \ln 1 = -2$$

Por tanto, al utilizar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, observamos que la ecuación requerida es

$$y - 0 = -2(x+1)$$
$$y = -2x - 2$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

EJEMPLO 1 Al comienzo de la sección 9.7 hemos demostrado por medio de una tabla de valores de $(e^h - 1)/h$ por todos los valores seleccionados de h la verosimilitud del resultado

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Para obtener una confirmación visual de este resultado, elabore la gráfica de

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

en la ventana de visualización $[-1, 1] \times [0, 2]$ (figura T1). De la gráfica de f, observe que $f(x)$ parece aproximarse a 1 conforme x se aproxima a 0. ■

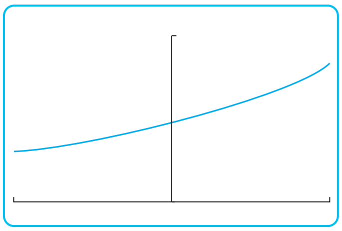

FIGURA T1
Gráfica de f en la ventana de visualización $[-1, 1] \times [0, 2]$

La función de la derivada numérica de una calculadora graficadora dará la derivada de una función exponencial o logarítmica para cualquier valor de x, como lo hizo por las funciones algebraicas.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6 utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Proporcione una respuesta precisa a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = x^3e^{-1/x}$; $x = -1$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{3/2}e^{-x}$; $x = 0.5$
3. $f(x) = x^3\sqrt{\ln x}$; $x = 2$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x+1}$; $x = 3.2$
5. $f(x) = e^{-x}\ln(2x+1)$; $x = 0.5$
6. $f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\ln(x^2+1)}$; $x = 1$
7. **UNA SITUACIÓN DE EXTINCIÓN** El número de cocodrilos de agua salada en una determinada zona del norte de Australia está dado por

$$P(t) = \frac{300e^{-0.024t}}{5e^{-0.024t} + 1}$$

a. ¿Cuántos cocodrilos se encontraban inicialmente en la población?

b. Demuestre que $\lim_{t \to \infty} P(t) = 0$.

c. Elabore la gráfica P en la ventana de visualización $[0, 200] \times [0, 70]$.

(*Comentario:* este fenómeno se conoce como *situación de extinción*).

8. INGRESOS DE LAS FAMILIAS ESTADOUNIDENSES Con base en datos, se estima que el número de familias estadounidenses y (en millones) que obtuvo x miles de dólares en 1990 está relacionado con la ecuación

$$y = 0.1584xe^{-0.0000016x^3+0.00011x^2-0.04491x} \qquad (x > 0)$$

a. Elabore la gráfica de la ecuación en la ventana de visualización $[0, 150] \times [0, 2]$.

b. ¿Qué tan rápido y cambia con respecto a x cuando $x = 10$? ¿Cuándo $x = 50$? Interprete sus resultados.

Fuente: House Budget Committee, House Ways and Means Committee, and U.S. Census Bureau

9. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN MUNDIAL Con base en datos obtenidos en un estudio, la población mundial (en miles de millones) es aproximada por la función

$$f(t) = \frac{12}{1 + 3.74914e^{-1.42804t}} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t es medida en medios siglos, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1950.

a. Elabore la gráfica de la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 14]$.

b. ¿Qué tan rápido se espera que la población crezca a principios de 2000?

Fuente: United Nations Population Division

10. AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO Los Soto planean garantizar el préstamo de \$160,000 para comprar una casa. Están considerando una hipoteca convencional a 30 años al 9% anual sobre saldos insolutos. Se puede demostrar que Los Soto tendrán un saldo pendiente de

$$B(x) = \frac{160{,}000(1.0075^{360} - 1.0075^{x})}{1.0075^{360} - 1}$$

dólares después de realizar x pagos de \$1,287.40 mensuales.

a. Elabore la gráfica de $B(x)$, utilizando la ventana de visualización $[0, 360] \times [0, 160{,}000]$.

b. Calcule $B(0)$ y $B'(0)$ e interprete sus resultados; calcule $B(180)$ y $B'(180)$ e interprete sus resultados.

11. INCREMENTO DE LA DELINCUENCIA JUVENIL El número de jóvenes de 15 a 19 años creció 21% entre 1994 y 2005, aumentando la tasa de criminalidad. Según el National Council on Crime and Delinquency, el número de arrestos por crímenes violentos de jóvenes menores de 18 años en el año t está dado por

$$f(t) = -0.438t^2 + 9.002t + 107 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

donde $f(t)$ se mide en miles y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1989. Según la misma fuente, si las tendencias como el consumo de drogas dentro de la ciudad y la mayor disponibilidad de armas de fuego continúa, entonces el número de arrestos por delitos violentos en los jóvenes menores de 18 años en el año t está dado por

$$g(t) = \begin{cases} -0.438t^2 + 9.002t + 107 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 99.456e^{0.07824t} & \text{si } 4 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

donde $g(t)$ se mide en miles y $t = 0$ corresponde a 1989.

a. Calcule $f(11)$ y los resultados de $g(11)$ e interprete sus resultados.

b. Calcule $f'(11)$ y $g'(11)$ e interprete sus resultados.

Fuente: National Council on Crime and Delinquency

12. AUMENTO EN EL RENDIMIENTO DE LOS CULTIVOS Si no se tratan los tallos de frijol, los áfidos (insectos que chupan la savia de la planta) se multiplican a una tasa creciente durante los meses de verano y reducen la productividad y la cosecha de los cultivos. Pero si los áfidos son tratados a mediados de junio, los números disminuyen drásticamente a menos de 100/tallo de frijol, lo que permite se traduzca en un rendimiento del cultivo. La función

$$F(t) = \begin{cases} 62e^{1.152t} & \text{si } 0 \leq t < 1.5 \\ 349e^{-1.324(t-1.5)} & \text{si } 1.5 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

da el número de áfidos en un tallo de fríjol típico en el momento t, donde t se mide en meses, con $t = 0$ correspondiente a principios de mayo.

a. ¿Cuántos áfidos hay en un tallo de fríjol típico a principios de junio ($t = 1$)? ¿A principios de julio ($t = 2$)?

b. ¿Qué tan rápido la población de áfidos cambia a principios de junio? ¿A principios de julio?

Fuente: *The Random House Encyclopedia*

13. MUJERES EN LA FUERZA DE TRABAJO Con base en los datos de la U.S. Census Bureau, el economista en jefe de Manpower, Inc. construyó la siguiente fórmula que da el porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil, $P(t)$, a principios de la década t ($t = 0$ corresponde al año 1900):

$$P(t) = \frac{74}{1 + 2.6e^{-0.166t+0.04536t^2-0.0066t^3}} \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

Suponga que esta tendencia continuó durante el resto del siglo XX.

a. ¿Cuál fue el porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil a principios de 2000?

b. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento del porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil a principios de 2000?

Fuente: U.S. Census Bureau