6.3 Separación de variables y la ecuación logística

- **Reconocer y resolver las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante separación de variables.**
- **Reconocer y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.**
- **Usar ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver y analizar las ecuaciones diferenciales logísticas.**

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es una función continua sólo de x y N es una función continua sólo de y. Como se observó en la sección anterior, para este tipo de ecuación, todos los términos x se pueden agrupar con dx y todos los de y con dy, y se puede obtener una solución por integración. Tales ecuaciones se dice que son **separables**, y el procedimiento de solución se denomina **separación de variables**. Abajo se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que son separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\frac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\operatorname{sen} x)y' = \cos x$	$dy = \cot x\,dx$
$\frac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\frac{1}{e^y + 1}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encontrar la solución general de $(x^2+4)\frac{dy}{dx} = xy$.

Solución Para iniciar, observar que $y = 0$ es una solución. Para encontrar otras soluciones, suponer que $y \neq 0$ y separar las variables como se muestra.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Separar variables.}$$

Ahora, integrar para obtener

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2 + 4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}.$$

Dado que $y = 0$ es también una solución, se puede escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2 + 4}. \qquad \text{Solución general } (C = \pm e^{C_1})$$

NOTA Asegurarse de verificar las soluciones de este capítulo. En el ejemplo 1, se debe verificar la solución $y = C\sqrt{x^2 + 4}$ por derivación y sustitución en la ecuación original.

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2 + 4)\frac{Cx}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{?}{=} x\left(C\sqrt{x^2 + 4}\right)$$

$$Cx\sqrt{x^2 + 4} = Cx\sqrt{x^2 + 4}$$

Así, la solución concuerda.

En algunos casos, no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El siguiente ejemplo ilustra tal situación. La derivación implícita se puede usar para verificar esta solución.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un ejemplo (de ingeniería) de una ecuación diferencial que es separable, ver el artículo "Designing a Rose Cutter", de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la condición inicial $y(0) = 1$, encontrar la solución particular de la ecuación

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solución Notar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, pero esta solución no satisface la condición inicial. Así, se puede suponer que $y \neq 0$. Para separar variables, se debe despejar el primer término de y y el segundo término de e^{-x^2}. Así, se debe multiplicar por e^{x^2}/y y obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= 0 \\ e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= -xy\,dx \\ \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy &= \int -xe^{x^2}\,dx \\ \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = 1$, se tiene $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, lo cual implica que $C = 1$. Así, la solución particular tiene la forma implícita

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1 \\ y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} &= 2. \end{aligned}$$

Se puede verificar esto derivando y reescribiendo para obtener la ecuación original.

EJEMPLO 3 Encontrar la curva de una solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto $(1, 3)$ y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y).

Solución Dado que la pendiente de la curva está dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando las variables e integrándolas se tiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \quad 0$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$y = e^{-(1/x) + C_1} = Ce^{-1/x}.$$

Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se concluye que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Así, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \qquad x > 0.$$

Ya que la solución no se define en $x = 0$ y la condición inicial se da en $x = 1$, x está restringida a valores positivos. Ver la figura 6.12.

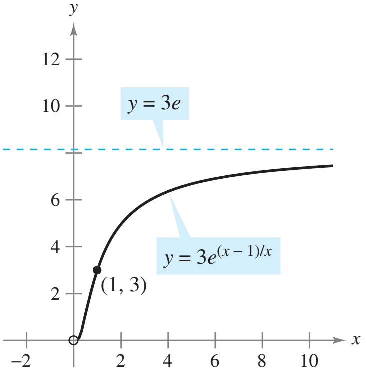

Figura 6.12