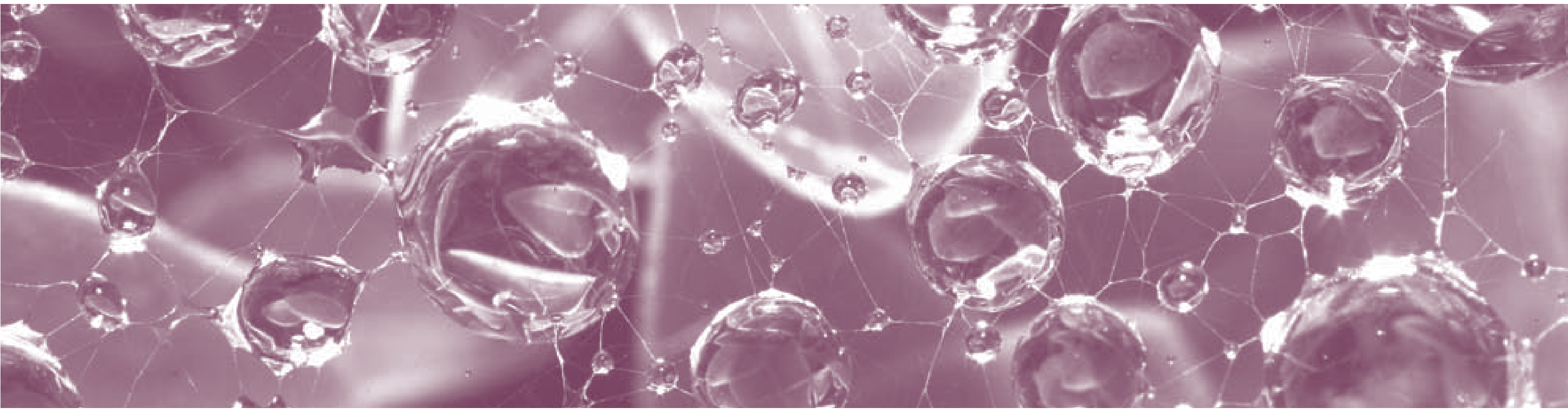
UNIDAD 2



Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

OBJETIVOS

- Conocer los diferentes métodos para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Modelar diferentes fenómenos para dar una solución.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cuál es la forma de variables separables de una ecuación diferencial?
- ¿Cuántos métodos de solución para resolver una ecuación diferencial de primer orden hay?
- ¿Cuáles son las funciones homogéneas?
- ¿Conoces la ecuación de Riccati?

2.1 Variables separables

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, adopta la forma de **variables separables** si se puede escribir como:

$$g(x) = h(y)y' = h(y)\frac{dy}{dx}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, primero se separa en la forma $g(x)dx = h(y)dy$ y luego se integra.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = 4x - 6$.

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6 \Rightarrow dy = (4x - 6)dx$$

2. Integramos:

$$\int dy = \int (4x - 6)dx \Rightarrow y = 4\frac{x^2}{2} - 6x + c = 2x^2 - 6x + c$$

3. Así, la solución general es: $y = 2x^2 - 6x + c$.
4. Comprobación de la solución:
   - Derivamos y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2 - 6x + c) = 4x - 6$$

   - Así, obtenemos la ecuación diferencial original.

Alerta

En este punto, usamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = \dfrac{9x^2 - 6}{x^2}$.

Solución

Esta ecuación se puede escribir como: $y' = 9 - \dfrac{6}{x^2}$

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = 9 - \frac{6}{x^2} \Rightarrow dy = \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx$$

2. Integramos: $\int dy = \int \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx$

$$\int \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx = \int 9\,dx - \int \frac{6}{x^2}dx = 9x - 6\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 9x + 6x^{-1}$$

Alerta

En este caso, también utilizamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. Entonces:

$$y = 9x + 6x^{-1} + c = 9x + \frac{6}{x} + C$$

4. La solución general es: $y = 9x + \frac{6}{x} + C$

5. Comprobación de la solución:

- Derivamos a y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(9x + \frac{6}{x} + c\right) = 9 - \frac{6}{x^2} = \frac{9x^2 - 6}{x^2}$$

- Obtenemos la ecuación diferencial.

Problema resuelto

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas de la ecuación diferencial: $y' = e^{4x} - 5 \text{ sen } x$, con la condición inicial $y = (0) = 5$.

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} - 5 \text{ sen } x \Rightarrow dy = (e^{4x} - 5 \text{ sen } x)dx$$

2. Integramos:

$$\int dy = \int (e^{4x} - 5 \text{ sen } x)\, dx$$

$$\int dy = \int e^{4x}\, dx - 5 \int \text{sen } x\, dx$$

$$y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x + C$$

3. La solución general es:

$$y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5 \cos x + C$$

4. Para obtener la solución particular, aplicamos la condición inicial $y(0) = 5$:

$$y(0) = \frac{1}{4}e^{4(0)} + 5\cos(0) + C = \frac{1}{4} + 5 + C = \frac{1 + 20}{4} + C = \frac{21}{4} + C$$

$$\frac{21}{4} + C = 5 \Rightarrow C = 5 - \frac{21}{4} = \frac{20 - 21}{4} = -\frac{1}{4}$$

5. La solución particular es, entonces: $y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x - \frac{1}{4}$

6. Comprobación de la solución:

- Derivamos a y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x - \frac{1}{4}\right) = e^{4x} - 5 \text{ sen } x$$

Alerta

Para este caso, usamos las fórmulas de integración siguientes:

$$\int \text{sen } x dx = \cos x$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Problema resuelto

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas de la ecuación diferencial: $y' = e^x \cos^2 y$, con la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = e^x dx \Rightarrow \sec^2 y dy = e^x dx$$

2. Integramos:

$$\int \sec^2 y dy = \int e^x \, dx$$

$$\tan y = e^x + C$$

3. La solución general es:

$$\tan y = e^x + C$$

4. Para obtener la solución particular, aplicamos la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan \frac{\pi}{4} = e^0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

5. La solución particular es: $\tan y = e^x$.
6. Comprobación de la solución.
   - Derivamos la última expresión:

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sec^2 x} = e^x \cos^2 x$$

Alerta

Hasta aquí hemos usado las fórmulas de integración:

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

2.2 Ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

Cuando se tiene una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$:

- Se realiza el cambio de variable $z = ax + by$.
  - La función $y(x)$ se cambia por $z(x)$; este cambio de variable transforma la ecuación en una ecuación de variables separables.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = 3x + 5y$.

Solución

1. Hacemos el cambio de variable $z = 3x + 5y$; entonces:

$$\frac{dz}{dx} = 3 + 5\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\frac{dz}{dx} - \frac{3}{5}$$

Por tanto, la ecuación diferencial será:

$$\frac{1}{5}\frac{dz}{dx}-\frac{3}{5}=z$$

2. Separamos las variables:

$$\frac{dz}{dx}=5z+3 \Rightarrow \frac{dz}{5z+3}=dx$$

3. Integramos:

$$\int\frac{dz}{5z+3}=\int dx$$

$$\frac{1}{5}\ln(5z+3)=x+C \Rightarrow \ln(5z+3)=5x+5C$$

$$e^{\ln(5z+3)}=e^{5x+5C}=Ae^{5x} \quad (A=e^{5C})$$

$$\Rightarrow 5z+3=Ae^{5x}$$

4. La solución z es:

$$z=\frac{A}{5}e^{5x}-\frac{3}{5}$$

5. Regresamos a la variable y.

Puesto que: $z=3x+5y$,

$$3x+5y=\frac{A}{5}e^{5x}-\frac{3}{5} \Rightarrow y=c_1e^{5x}-\frac{3}{5}x-\frac{3}{25}$$

6. Comprobación de la solución:

- Derivamos y con respecto a x:

$$y'=5c_1e^{5x}-\frac{3}{5}$$

- De y despejamos a c_1:

$$c_1=ye^{-5x}+\frac{3}{5}xe^{-5x}+\frac{3}{25}e^{-5x}$$

$$\Rightarrow y'=5\left(ye^{-5x}+\frac{3}{5}xe^{-5x}+\frac{3}{25}e^{-5x}\right)e^{5x}-\frac{3}{5}=5y+3x+\frac{3}{5}-\frac{3}{5} \Rightarrow y'=5y+3x$$

Alerta

En este caso, usamos la fórmula de integración:

$$\int\frac{du}{u}=\ln u$$

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y'=\dfrac{y-x+8}{y-x+1}$

Solución

1. Hacemos el cambio de la variable $z=y-x$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}+1$$

Entonces, la ecuación diferencial será:

$$\frac{dz}{dx}+1=\frac{z+8}{z+1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z+8}{z+1}-1=\frac{z+8-z-1}{z+1}=\frac{7}{z+1}$$

Esta ecuación ya es de variables separables:

$$(z+1)dz=7dx$$

2. Integramos:

$$\int (z+1)\,dz=\int 7\,dx$$

$$\frac{z^2}{2}+z=7x+C$$

3. Regresamos a la variable y.

Puesto que $z=y-x$, entonces:

$$\frac{(y-x)^2}{2}+y-x=7x+C$$

$$(y-x)^2+2(y-x)=14x+2C$$

$$y^2-2yx+x^2+2y-2x-14x=2C$$

4. Por tanto, la solución implícita de la ecuación es:

$$y^2-2yx+x^2+2y-16x=A$$

5. Comprobación de la solución:

- Derivamos la solución:

$$2yy'-2y-2xy'+2x+2y'-16=0$$

- Despejamos a y':

$$2yy'-2xy'+2y'=2y-2x+16$$

$$y'(2y-2x+2)=2(y-x+8)$$

$$y'=\frac{2(y-x+8)}{2(y-x+1)}=\frac{y-x+8}{y-x+1}$$

6. Obtenemos la ecuación diferencial.

Alerta

En este caso, usamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2.3 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones homogéneas

Las funciones homogéneas son aquellas en las que todos los términos son del mismo grado.