Esto proporciona un método mecánico para encontrar derivadas parciales.

Procedimiento para encontrar $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$

Para encontrar f_x, trate a y como constante y diferencie f con respecto a x de la manera usual.

Para encontrar f_y, trate a x como constante y diferencie f con respecto a y de la manera usual.

EJEMPLO 1 Obtención de derivadas parciales

Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. Encuentre también, $f_x(3, 4)$ y $f_y(3, 4)$.

Solución: Para encontrar $f_x(x, y)$, se trata a y como una constante y se diferencia a f con respecto a x:

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy$$

Para encontrar $f_y(x, y)$, se trata a x como una constante y se diferencia con respecto a y:

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2$$

Observe que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son cada una funciones de las dos variables x y y. Para encontrar $f_x(3, 4)$, se evalúa $f_x(x, y)$ cuando $x = 3$ y $y = 4$:

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40$$

De manera similar,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

En la tabla 17.2 se proporcionan las notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. En la tabla 17.3 se dan las notaciones para las derivadas parciales evaluadas en (a, b). Observe que el símbolo ∂ (no d) se usa para denotar una derivada parcial. El símbolo $\partial z/\partial x$ se lee "derivada parcial de z con respecto a x".

TABLA 17.2

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))$	$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$

TABLA 17.3

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x. Evaluada en (a, b)	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y. Evaluada en (a, b)
$f_x(a, b)$	$f_y(a, b)$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(a,b)}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(a,b)}$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=a\\y=b}}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\substack{x=a\\y=b}}$

Problemas 1

En los problemas 1 a 7, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

***1.** $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7$

2. $g(x, y) = 3x^4y + 2xy^2 - 5xy + 8x - 9y$

3. $f(x, y) = 2y + 1$

4. $f(x, y) = \ln 2$

5. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}$

6. $z = e^{5xy}$

7. $z = 5x \ln(x^2 + y)$

Aplicaciones de las derivadas parciales

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ es la razón de cambio de z con respecto a x cuando y se mantiene fija.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ es la razón de cambio de z con respecto a y cuando x se mantiene fija.

EJEMPLO 1 Costos marginales

Una compañía fabrica dos tipos de esquís, los modelos Ligero y Alpino. Suponga que la función de costos conjuntos de producir x pares del modelo Ligero y y pares del modelo Alpino por semana es

$$c = f(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000$$

donde c se expresa en dólares. Determine los costos marginales de $\partial c/\partial x$ *y* $\partial c/\partial y$ *cuando* $x = 100$ *y* $y = 50$*, e interprete los resultados.*

Solución: Los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.14x + 75 \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 85$$

Así,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100,50)} = 0.14(100) + 75 = 89 \tag{1}$$

y

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100,50)} = 85 \tag{2}$$

La ecuación (1) implica que al aumentar la producción del modelo Ligero de 100 a 101, mientras se mantiene en 50 la producción del modelo Alpino, aumentan los costos aproximadamente en \$89. La ecuación (2) implica que al aumentar la producción del modelo Alpino de 50 a 51, mientras se mantiene en 100 la producción del modelo Ligero, aumentan los costos aproximadamente en \$85. De hecho, como $\partial c/\partial y$ es una función constante, el costo marginal con respecto a y es de \$85 en todos los niveles de producción.

Problemas 2

Para las funciones de costos conjuntos de los problemas 1 a 3, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

*__1.__ $c = 7x + 0.3y^2 + 2y + 900;\quad \dfrac{\partial c}{\partial y}, x = 20, y = 30$

2. $c = x\sqrt{x+y} + 5000;\quad \dfrac{\partial c}{\partial x}, x = 40, y = 60$

3. $c = 0.03(x+y)^3 - 0.6(x+y)^2 + 9.5(x+y) + 7700;$
$\dfrac{\partial c}{\partial x}, x = 50, y = 80$

11. Granja lechera Una estimación de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por[9]

$$P = A^{0.27}B^{0.01}C^{0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$$

donde P es la producción, A el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.

12. Función de producción Suponga que una función de producción está dada por $P = \dfrac{kl}{2k+3l}$.

(a) Determine las funciones de productividad marginal.

(b) Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es 1/5.

*__13. Compensación a MAE__ En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de empresas (MAE), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etcétera) la compensación anual actual (en dólares) estaba dada por

$$z = 43{,}960 + 4480x + 3492y$$

donde x y y son el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de MAE, respectivamente.[10] Encuentre $\partial z/\partial x$ e interprete su resultado.

Diferenciación parcial implícita

Una ecuación en x, y y z no necesariamente define a z como función de x y y. Por ejemplo, en la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

Para encontrar $\partial z/\partial x$ de

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

primero se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a x y se trata a z como función de x y y, y a y como constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0$$

Al despejar $\partial z/\partial x$, se obtiene

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$ se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a y, se trata a z como función de x y y, y se mantiene a x como una constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y} = 0\right)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$$

El método que se usa para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se llama *diferenciación parcial implícita*.

Problemas 3

En los problemas 1 a 5, encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

*1. $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 900$; $\partial z/\partial x$

2. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0$; $\partial z/\partial x$

3. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$

4. $e^x + e^y + e^z = 10$; $\partial z/\partial y$

5. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$; $\partial z/\partial x$

Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x, y)$, entonces no sólo z es una función de x y y, también lo son f_x y f_y. Por lo que es posible diferenciar f_x y f_y, para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de f. En forma simbólica,

$$f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x \qquad f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y$$

$$f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x \qquad f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y$$

En términos de la notación ∂,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Encuentre las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^2y + x^2y^2$.

Solución: Como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2$$

se tiene

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy$$

También, como

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2y$$

se tiene

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2y) = 2x + 4xy$$

Problemas 4

En los problemas 1 al 6, encuentre las derivadas parciales indicadas.

*1. $f(x, y) = 6xy^2$; $f_x(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$

2. $f(x, y) = 2x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy$; $f_x(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$

*3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$, $f_{yyx}(x, y)$

4. $f(x, y) = 9e^{2xy}$; $f_y(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yxy}(x, y)$

5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$

6. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$; $f_x(x, y, z)$, $f_{xz}(x, y, z)$, $f_{zx}(x, y, z)$

En los problemas, encuentre el valor indicado.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, encuentre $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. *Si* $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, encuentre $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 3l^3k^6 - 2l^2k^7$, encuentre $f_{klk}(2, 1)$.

14. Si $f(x, y) = 3x^3y^2 + xy - x^2y^2$, encuentre $f_{xxy}(5, 1)$ y $f_{xyx}(5, 1)$.