TRABAJO Nº 1

1) En los problemas, use de la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ de la función dada.
   a) $f(x) = 9$
   b) $f(x) = -3x - 5$
   c) $f(x) = x^3 + x + 6$
   d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

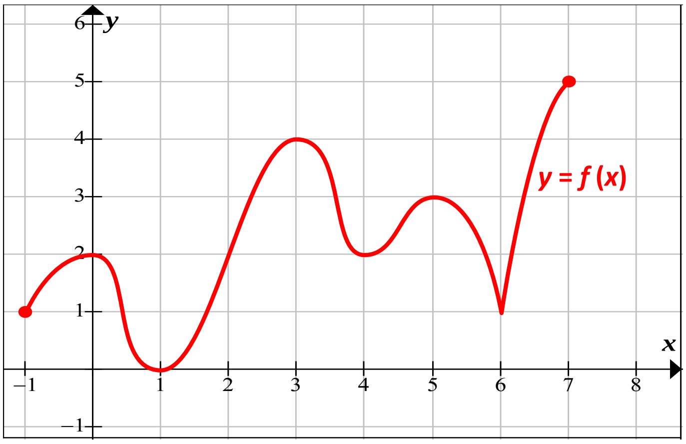
AYUDA

2) Calcule la derivada de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = (5x^2 - 3\sqrt{x})^{-5}$
   b) $f(x) = \sqrt[5]{(2x^2 - 3x + 1)^3}$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{Ln(1 - 2x - x^3)}$
   d) $f(x) = \log_2(x^4 - 4x^2) + \ln(2x^2 - x)$
   e) $f(x) = (x + 4)\sqrt{(3x^2 + x + 1)}$
   f) $f(x) = e^{x^2+3x-8} - e^{x^3}$
   g) $f(x) = x^2 e^{x^2} - x^3 e^{x^3}$
   h) $f(x) = (x^5 - 5x^2)^{5x-6}$
   i) $f(x) = \text{Ln}\left(\frac{1+Ln(x)}{1-Ln(x)}\right)$
   j) $f(x) = (Log\, x^2)^{\text{Ln}(3x-1)}$

AYUDA

3) Derive implícitamente con respecto a x las siguientes funciones
   a) $\frac{x^3}{y^4} + x^3 = y^2$
   b) $x^3 + y^2 + Ln(xy) = 3xy$
   c) $x^2 + Log\,(x^2) = xy^2 - Log\, y$
   d) $x^3y^2 = \sqrt{5x + 3y}$
   e) Determinar la ecuación de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto $(3, 1)$. Representar gráficamente las ecuaciones: ecuación implícita y la ecuación de la recta tangente, usar https://www.desmos.com/calculator

4) Use el gráfico de f para dar:
   a) Los números críticos de f.
   b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   c) Los valores extremos locales indicando la abscisa en la cual se dan.
   d) Los valores extremos globales de f indicando la abscisa en la cual se dan.



5) Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la función f es creciente o decreciente.
   a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$
   b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$
   c) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} + 1$
   d) $f(x) = \frac{3}{8}(x-9)(x-1)^{\frac{5}{3}}$

AYUDA

6) Encontrar todos los extremos relativos(máximos y mínimos relativos) de la siguiente función:
   a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12.$
   b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$
   c) $f(x) = (x-2)^{2/3} + 1$
   d) $f(x) = \frac{3}{8}(x-9)(x-1)^{\frac{5}{3}}$

AYUDA

NOTA: **PARA RESOLVER LOS EJERCICIOS DE MAXIMIZACIÓN USAR EL SIGUIENTE ENLACE**: **AYUDA** y **DESCARGAR EL ARCHIVO U7.PDF**

7) Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se han marchado todos sus clientes. La expresión que representa el número de clientes en función del número de horas que lleva abierta, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.
   a) ¿A qué hora el número de clientes es máximo? ¿Cuántos clientes hay en ese momento?
   b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

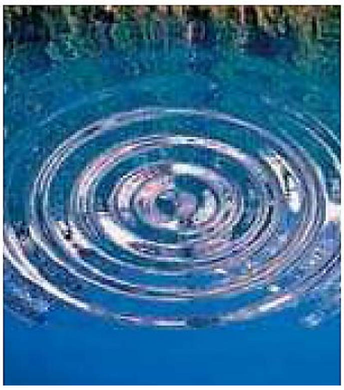
8) Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

   Determina razonadamente:
   a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales.
   b) El valor de dichos beneficios máximos.

Sean x y y dos funciones derivables de t, y relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular $\frac{dy}{dt}$ para $x = 1$, sabiendo que $\frac{dx}{dt} = 2$ para $x = 1$. **AYUDA**

9) El radio r de un círculo está creciendo a razón de 4 centímetros por minuto. Calcular la razón de cambio del área cuando a) r = 8 cm y b) r = 32 cm



10) En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares, como se muestra en la figura. El radio r del círculo exterior está creciendo a una razón constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué razón está cambiando el área A de la región circular perturbada?

AYUDA 1)

Obtenga la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 5 - (3x^2 + 4x - 5)}{\Delta x}$$

Elevando el binomio (x+Δx) al cuadrado y realizando los productos indicados, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 4x + 4\Delta x - 5 - 3x^2 - 4x + 5}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 4x + 4\Delta x - 5 - 3x^2 - 4x + 5}{\Delta x}$$

Simplificando

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$

Realizando la división

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x + 4)$$

Finalmente, calculando el límite cuando $\Delta x \to 0$ se obtiene la derivada de la función

$$f'(x) = 6x + 4$$

AYUDA 2) Derivación

Calcule la derivada de las siguientes funciones.

$$f(x) = 3x^3 - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - 3$$

derivate f(x)=3x^3-3(x)^1/3+3/x^3 -3

Examples Random

Input interpretation:

differentiate	$f(x) = 3x^3 - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - 3$	with respect to	x

Result:

$$f'(x) = -\frac{x^{10/3} - 9x^6 + 9}{x^4}$$

Alternate forms:

$$f'(x) + \frac{1}{x^{2/3}} + \frac{9}{x^4} = 9x^2$$

$$f'(x) = \frac{-x^{10/3} + 9x^6 - 9}{x^4}$$

AYUDA 3): función creciente o decreciente

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución

Sea $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

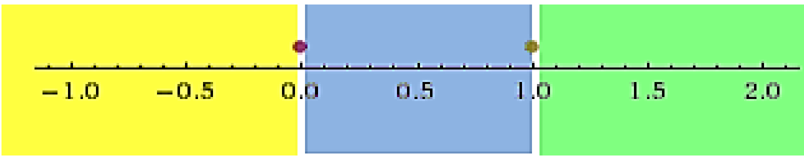
La primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3x$

Luego:

$$3x^2 - 3x = 0$$

$$3x(x-1) = 0$$

Los puntos críticos son: $\{x = 0, x = 1\}$



Valor de prueba	$x = -1$	$x = 0.5$	$x = 2$
Signo de f′(x)	$f'(-1) > 0$	$f'(0.5) < 0$	$f'(2) > 0$
Resultado	f es creciente en $(-\infty, 0)$	f es decreciente en $(0,1)$	f es creciente en $(1, +\infty)$

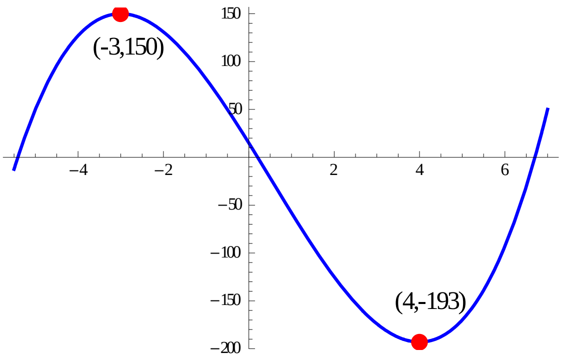
AYUDA 4): Extremos de una función

Encontrar todos los extremos relativos de la siguiente función, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 15$

Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 15$
La primera derivada: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 72$
Luego:

$$6x^2 - 6x - 72 = 0$$
$$(x+3)(x-4) = 0$$

Los puntos críticos son: $\{x = -3, x = 4\}$



Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3,4)$	$(4, +\infty)$
Valor de prueba	$x = -5$	$x = 0$	$x = 5$
Signo de $f'(x)$	$f'(-5) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(5) > 0$
Resultado	Creciente (+)	Decreciente (−)	Creciente (+)

Aplicando el criterio de la primera derivada, es posible concluir que f tiene un máximo relativo en el punto donde $x = -3$ dado por:
$f(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 72(-3) + 15 = 150$

Y mínimo relativo en el punto donde $x = 4$ dado por:
$f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 - 72(4) + 15 = -193$

Por lo tanto, hay un máximo relativo en $(-3\,,150)$ y un mínimo relativo en $(4\,,-193)$, como se puede comprobar con el gráfico.

AYUDA: TASAS RELACIONADAS

Sean x y y dos funciones derivables de t, y relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular dy/dt para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ para $x = 1$.

Solución Derivar ambos lados *con respecto a t*, utilizando la regla de la cadena.

$$y = x^2 + 3 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

d