TRABAJO Nº 3

1) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

a) $\frac{dy}{dx} = 9x^2$	b) $\frac{dy}{dx} = \pi$
c) $y' = x^{3/2}$	d) $y' = 2x^{-3}$
e) $y' = 2x$	f) $y' = 6$

AYUDA

2) Condiciones Iniciales
   a) Hallar $f(x)$ a partir de que $f'(x) = x^3 + 2$, $f(0) = 1$
   b) Hallar $f(x)$ a partir de que $f'(x) = 2x + 1$, $f(3) = 4$
   c) Hallar y a partir de que $\frac{dy}{dx} = 3 - 4x$, $f(1) = 6$
   d) Hallar y a partir de que $\frac{dy}{dx} = ax^2 + bx + c$, $f(0) = 0$

AYUDA

3) Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $\frac{dh(t)}{dt} = 1.5y$+5, donde t es el tiempo en años y $h(t)$ es la altura en centímetros dependiente del tiempo t. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan (t=0); es decir h(0)=12.
   a) Determinar la altura después de t años.
   b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

4) La tasa de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días $(0 \leq t \leq 10)$. Esto es, $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Fórmulas de integración
$\int 0\, dx = C$
$\int k\, dx = kx + C$
$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\int a\, u\, du = a \int u\, du + C, \qquad u = u(x)$
$\int \frac{du}{u} = Ln\, \lvert u \rvert + C, \qquad u = u(x)$
$\int a^u\, du = \frac{a^u}{Ln\, a} + C, \qquad u = u(x)$
$\int e^u\, du = e^u + C, \qquad u = u(x)$
$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

CONDICIONES INICIALES

Ejemplo 1

Resolución de una ecuación diferencial

Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución

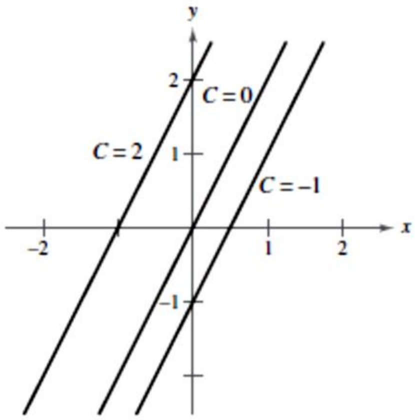
$$y' = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$dy = 2dx$$

$$\int dy = \int 2dx$$

$$y = 2x + C \qquad \text{(Solución general)}$$



Funciones de la forma $y = 2x + C$

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la figura.

Ejemplo 2

Hallar $f(x)$ sabiendo que

$$f'(x) = x^3 + 2 \qquad \text{y} \qquad f(0) = 1$$

Solución. Lo que se tiene que hacer primero es calcular $f(x) = \int (x^3 + 2)dx$ para cualquier valor de la constante C

$$f(x) = \int (x^3 + 2)dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

Para conocer el valor de C utilizaremos las condiciones iniciales es decir, cuando $f(0) = 1$;

$$f(0) = \frac{1}{4}(0)^4 + 2(0) + C = 1$$

de esta última expresión se obtiene que $C = 1$. Por lo tanto, la función $f(x)$ buscada es

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + 1$$

La gráfica muestra algunas funciones de la familia

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C.$$